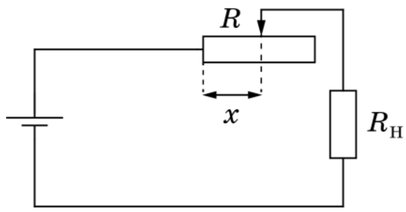
Задача 9.1. Термостат. В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента R_H в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x - это доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды t_1 = 25ºC для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении x_1 = 0,65, при t_2 = 20ºC ползунок реостата стоит в положении x_2 = 0,35. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды t_3 = 13ºC? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

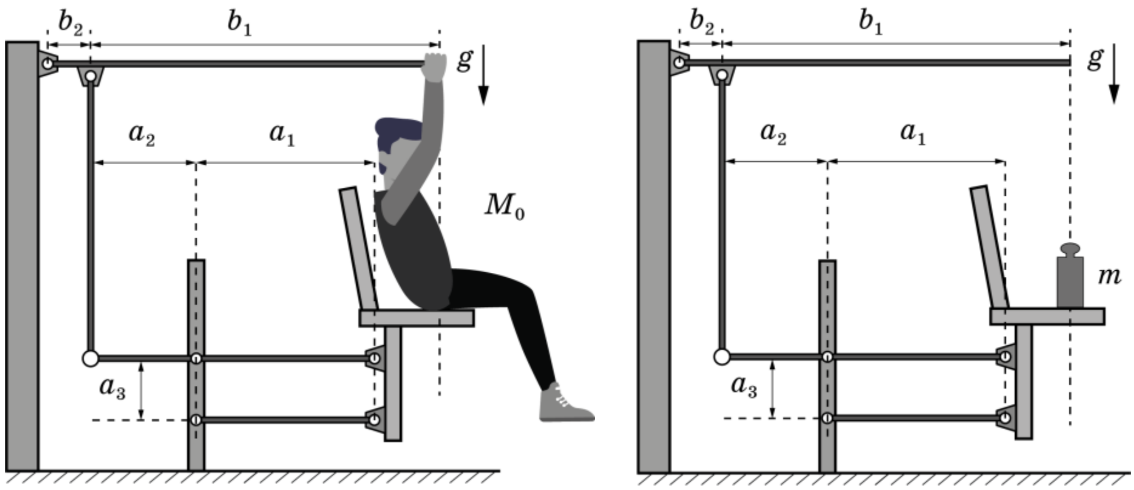
Задача 9.2. Силовой тренажёр. На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз m = 3,7 кг.

Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой M_0 = 86 кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах:

a_1 = 27,5 см; a_2 = 13,0 см; a_3 = 17,5 см; b_1 = 73,5 см; b_2 = 8,5 см.

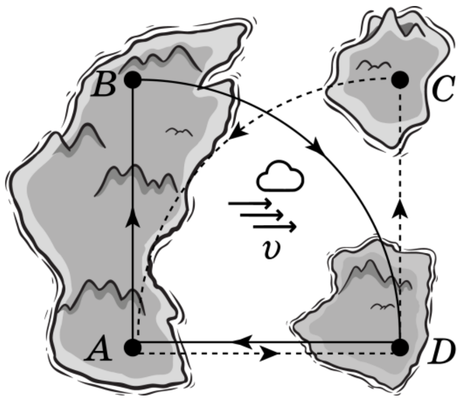
Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 9.3. Торможение шайбы. Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ – на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

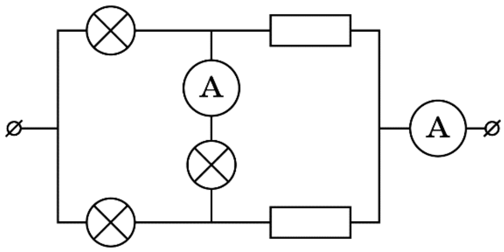
Задача 9.4. Четыре города. Четыре города расположены в вершинах квадрата *ABCD* (см. рис). Параллельно направлению *AD* дует сильный ветер (из *A* в *D*) со скоростью υ. Два одинаковых самолёта вылетают из города *A* и движутся по разным маршрутам: первый по *ABDA*, второй по *ADCA* (*BD* и *CA* – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\dfrac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = ?$ Скорость самолёта при отсутствии ветра равна *u*.



Задача 9.5. Нелинейный мост. Электрическая цепь, изображённая на рисунке, состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём:

$$I = a\sqrt{U}\ .$$

Известно, что один из амперметров показывает величину силы тока I_x, а другой I_y, причём $I_x > I_y$. Определите силу тока в каждом из элементов цепи.



24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 10.1 Шарик на нити. Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (рис. 1). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?

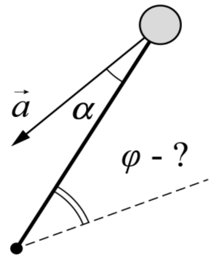
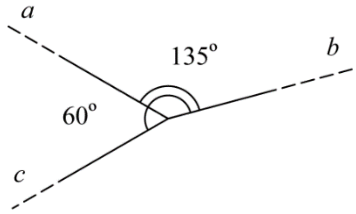


Рис. 1

Задача 10.2. Бильярд на льду. На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.



1) Определите, какая из трёх траекторий: – «*a*», «*b*» или «*c*» – может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите:

А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения;

Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

Боковые поверхности шайб гладкие.

Задача 10.3. Газировка. В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем (рис. 2). Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии. Определите:

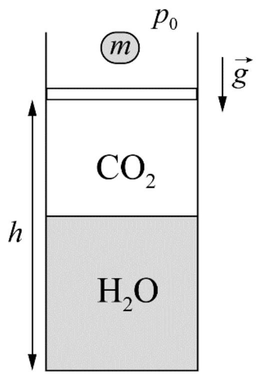


Рис. 2

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

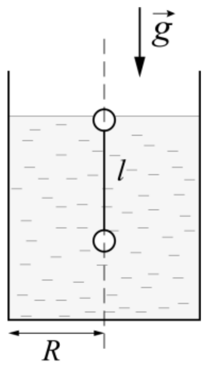
Считайте, что температура в сосуде постоянна, и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется.

Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

24 января *на портале* http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 10.4. Крутится, вертится. Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длинной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.



Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

Задача 10.5. Три элемента. Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трёх элементов: резистора с сопротивлением R = 3,5 Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 3) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что ВАХ неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе, сила тока, протекающего через него, не убывает).

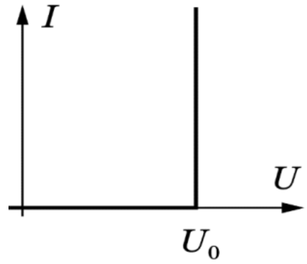


Рис. 3

Вольтамперная характеристика «черного ящика» показана на рис. 4.

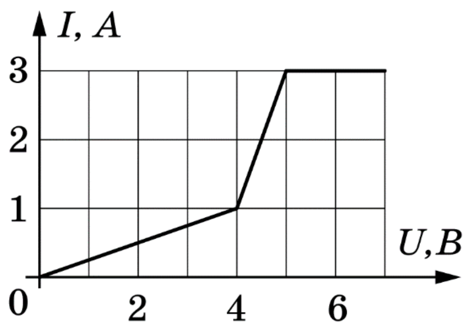


Рис. 4

Определите:

1) Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.

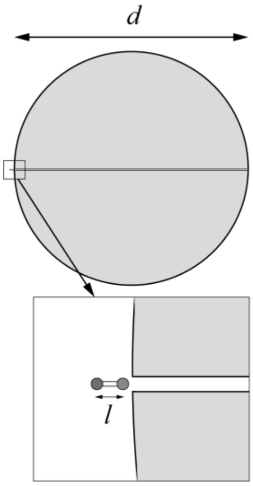
2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.

3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения U_{max} открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

__24 января__ на портале http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура**. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура**. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 11.1. Диполь в шаре. В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.



Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$.

Определите плечо диполя l, считая, что $l << d$.

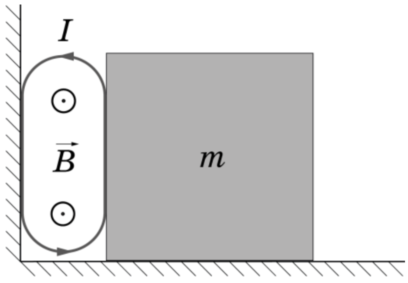
Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

Задача 11.2. Магнитная пружина. Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

1) До какой наибольшей скорости υ_m разгонится куб, если его отпустить?

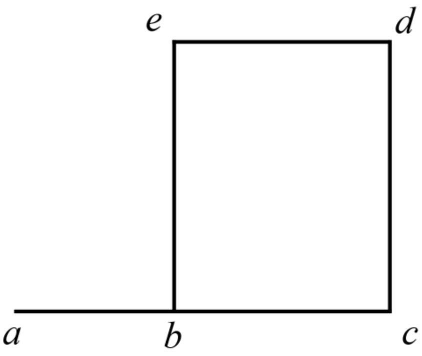
2) Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?



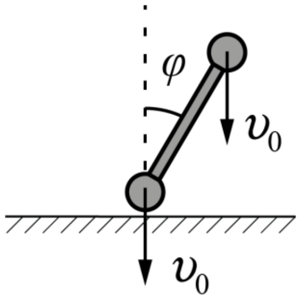
Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

__24 января__ на портале http://abitu.net/vseros ***будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура****. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура*. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 11.3. Обрывок из архива Кельвина. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (см. рис.) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – количество подведённой теплоты) и имела вид ломаной линии *abcdeb*. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок на рисунке параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте в работе диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.



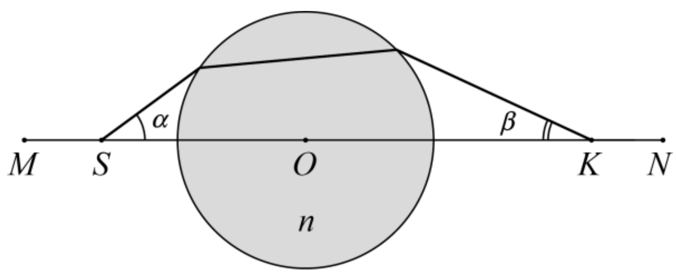
Задача 11.4. Падающая гантель. Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины L, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны υ_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.



1) Каковы величина скорости центра масс гантели υ_C и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

Задача 11.5. Прозрачный шарик. Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара, пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.

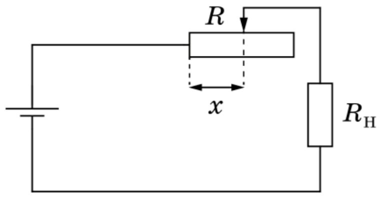


1) Определите расстояние SO от источника до центра шара и радиус R шара.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2, \alpha = 60^\circ C, \beta = 30^\circ C, l = 10$ см.

***24 января** на портале http://abitu.net/vseros **будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура**. Начало разбора (по московскому времени):*
7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.
***26 января состоится онлайн-разбор решений заданий экспериментального тура**. Начало разбора: 7 класс – 11.00; 8 класс – 10.00; 9 класс – 12.00; 10 класс – 13.30; 11 класс – 15.00.*

Задача 9.1. Термостат. В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_Н$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x - это доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды t_1 = 25ºС для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении x_1 = 0,65, при t_2 = 20ºС ползунок реостата стоит в положении x_2 = 0,35. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды t_3 = 13ºС? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

Возможное решение

Сопротивление реостата в зависимости от x равно xR.

Сила тока в цепи нагревателя

$$I = \frac{U}{R(x+0{,}25)}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на нагревательном элементе, составит

$$P_H = I^2 R_H = \frac{U^2}{R}\frac{0{,}25}{(x+0{,}25)^2}.$$

При установившейся температуре мощность нагревателя равна мощности тепловых потерь в окружающую среду:

$$P_H = P_{потерь} = \alpha(t_0 - t),$$

где α – постоянный коэффициент, t_0 – температура термостата, t – текущая температура среды.

Применительно к двум известным ситуациям это уравнение теплового баланса даст систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0,25}{0,81} = \alpha(t_0 - 25°\text{C}), \\ \dfrac{U^2}{R}\dfrac{0,25}{0,36} = \alpha(t_0 - 20°\text{C}). \end{cases}$$

Решая систему, находим t_0 = **29**ºС.

Для третьего случая уравнение баланса запишется в виде:

$$\frac{U^2}{R}\frac{0,25}{(x_3+0,25)^2} = \alpha(29°\text{C} - 13°\text{C}).$$

Решая это уравнение совместно с любым из уравнений системы, находим x_3 **= 0,2**.

Критерии оценивания

1. Получено правильное выражение для мощности нагрева		2 балла
a) Указана зависимость сопротивления резистора от x	0,5 балла	
b) Получена общая сила тока	0,5 балла	
c) Получено выражение для мощности нагревателя	1 балл	
2. Использовано условие установившейся температуры термостата		1 балл
3. Правильно применено условие баланса мощностей		2 балла
a) Для первого случая	1 балл	
b) Для второго случая	1 балл	
4. Правильно найдена температура термостата		2 балла
5. Правильно применено условие баланса мощностей в третьем случае		1 балл
6. Получено значение для x_3		2 балла
a) Получено правильное выражение	1 балл	
b) Получено правильное значение	1 балл	

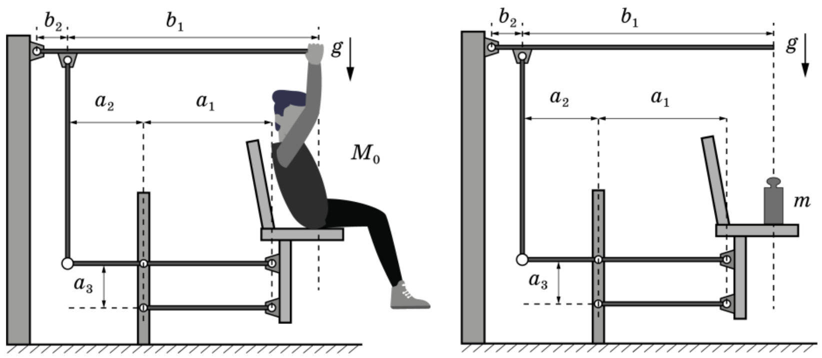
Задача 9.2. Силовой тренажёр. На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз m = 3,7 кг.

Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой M_0 = 86 кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

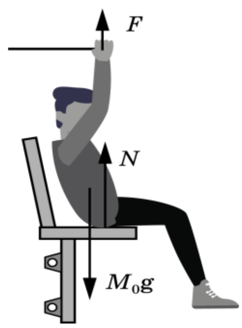
Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах:

a_1 = 27,5 см; a_2 = 13,0 см; a_3 = 17,5 см; b_1 = 73,5 см; b_2 = 8,5 см.

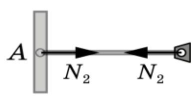
Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



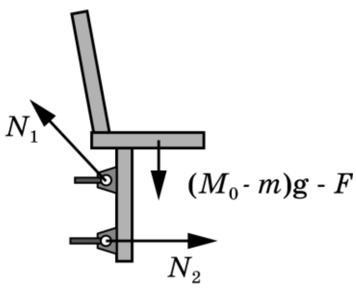
Возможное решение. Рычаги в системе обладают массой. Суммарный момент сил тяжести, связанных с этими массами, компенсируется моментом веса груза массы m. Значит, для их учёта достаточно вычесть массу m из массы человека M_0.



Сила давления человека на кресло меньше силы тяжести на величину силы F.

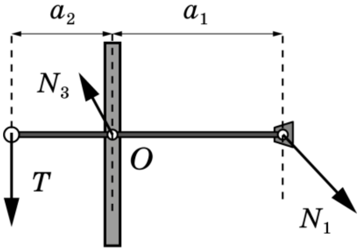


Рассмотрим силы, действующие на вертикальную и нижнюю горизонтальную штанги. Отметим, что их **силы тяжести мы скомпенсируем уменьшением массы человека**. Из рисунка видно, что сила N_2 может быть только горизонтальной, иначе момент сил относительно т. A будет отличен от нуля (на самом деле её вертикальную составляющую мы учли при уменьшении массы). Аналогично, сила T может быть только вертикальной, иначе момент сил относительно т. B будет отличен от нуля.



Расставим силы, действующие на кресло. Для равновесия необходимо равенство вертикальных компонент сил:

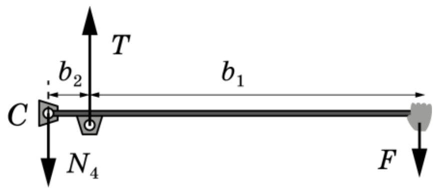
$$N_{1\text{верт}} = (M_0 - m)g - F \qquad (1)$$



Расставим силы, действующие на среднюю горизонтальную штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов N_1 и T относительно точки O:

$$Ta_2 = N_{1\text{верт}} a_1 \qquad (2)$$

Расставим силы, действующие на верхнюю штангу. Для равновесия необходимо равенство моментов F и T относительно точки C:



$$Tb_2 = F(b_1 + b_2) \qquad (3)$$

Решая совместно все уравнения, полученные из условий равновесия, получаем ответ:

$$F = \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1}(M_0 - m)g \qquad (4)$$

Подставляем численные данные и получаем окончательный ответ: F = 148 Н.

Критерии оценивания

1. Использована идея с исключением моментов сил тяжести внутри механизма путём уменьшения массы человека на m	1 балл
2. Учтено уменьшение силы взаимодействия человека со стулом на F	1 балл
3. Обоснована горизонтальность N_2	1 балл
4. Получено условие равновесия стула (1)	1 балл
5. Использовано условие равновесия средней штанги (2)	1 балл
6. Использовано условие равновесия вертикальной штанги	1 балл
7. Использовано условие равновесия верхней штанги (3)	1 балл
8. Получено выражение для F (4)	2 балла
9. Получен правильный численный ответ	1 балл

Примечание к критериям

1. Если в решении нет идеи из п.1, но моменты сил тяжести внутри механизма учтены в решении, то балл за п.1 выставляется в полной мере. Тогда нет необходимости показывать горизонтальность N_2.
2. Для выполнения п.4, п.5, п.7 может быть записан любой аналог уравнений (1-3).
3. Если в решении не выполнен п.2, то баллы могут быть выставлены только за пункты 1, 3, 5, 6, 7.

Задача 9.3. Торможение шайбы. Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ – на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение. На шайбу после начального толчка действуют 3 силы: сила тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения скольжения. В результате, до остановки шайба будет двигаться с ускорением

$$a = \mu g \to \mu = \frac{a}{g}.$$

Если к моменту 2τ шайба ещё не остановилась, то справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \upsilon(2\tau) - \dfrac{a(2\tau)^2}{2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где υ - начальная скорость шайбы.

Решая систему, получим:

$$a = \frac{2S_1 - S_2}{\tau^2} = 4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\mu = 0{,}4$$

Если шайба остановилась между τ и 2τ, то справедлива другая система уравнений:

$$\begin{cases} S_1 = \upsilon\tau - \dfrac{a\tau^2}{2}, \\ S_2 = \dfrac{\upsilon^2}{2a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Из данной системы получаем уравнение для a:

$$2aS_2 = \left(\frac{S_1}{\tau} + \frac{a\tau}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Решением данного уравнения будет соотношение: $a = 16\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

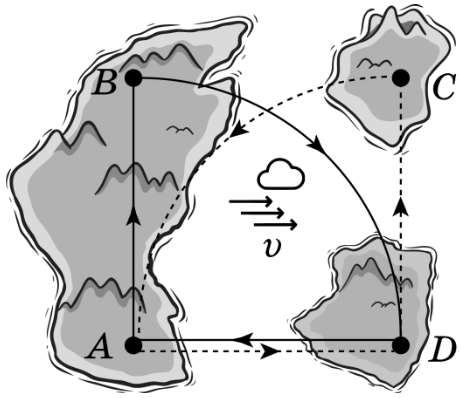
Корень с «+» при проверке даёт время остановки, меньшее, чем τ, что противоречит условию.

Корень с «–» даёт время остановки больше 2τ, поэтому этот корень тоже нужно отбросить.

Критерии оценивания

1. Коэффициент трения выражен через ускорение		1 балл
2. Записана система уравнений [1]		1 балл
3. Найдено первое значение $\mu = 0{,}4$		2 балла
a) Получено выражение для a	1 балл	
b) Получено выражение для μ или значение для a	0,5 балла	
c) Получено значение для μ	0,5 балла	
4. Указано, что возможен случай с остановкой до 2τ		1 балл
5. Записана система уравнений [2]		1 балл
6. Получено уравнение [3]		1,5 балла
7. Найдены корни уравнения [3]		1 балл
8. Отброшены оба корня уравнения (3).		1,5 балла

Задача 9.4. Четыре города. Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$ (см. рис). Параллельно направлению AD дует сильный ветер (из A в D) со скоростью υ. Два одинаковых самолёта вылетают из города A и движутся по разным маршрутам: первый по $ABDA$, второй по $ADCA$ (BD и CA – «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = ?$ Скорость самолёта при отсутствии ветра равна u.

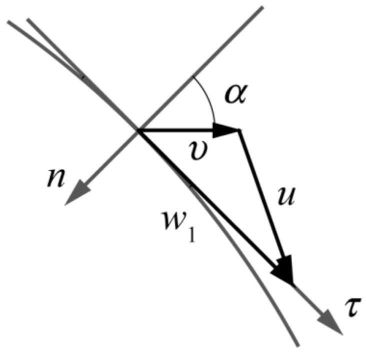


Возможное решение. Сравним времена движения по соответствующим участкам.

1) Так как скорости на участках AB и DC одинаковы, то и $t_{AB} = t_{DC}$.

2) Время движения на участке AD $t_{AD} = \frac{l}{u+\upsilon}$, время движения на участке DA $t_{DA} = \frac{l}{u-\upsilon}$, а выигрыш во времени $t_{DA} - t_{AD} = \Delta t_1 = \frac{l}{u-\upsilon} - \frac{l}{u+\upsilon} = \frac{2l\upsilon}{u^2-\upsilon^2}$

3) Сравним времена движения на BD и CA. Рассмотрим **маленький** участок Δl на траектории BD.

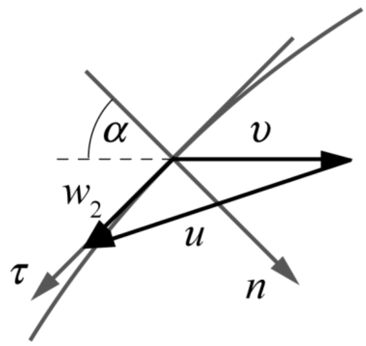


Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ и собственной скорости самолёта u. Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_1 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau + \upsilon_\tau = w_1 \end{cases} \Rightarrow w_1 = u_\tau + \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{BD1} = \frac{\Delta l}{w_1} = \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon \sin(\alpha)}$.

Аналогично рассмотрим **симметричный первому маленький участок** длиной Δl на траектории CA.



Скорость самолёта относительно земли w_1 равна векторной сумме скорости ветра υ (не изменилась) и собственной скорости самолёта u (изменилась по направлению). Введём систему координат с осями, направленными вдоль и нормально к траектории в данной точке. Чтобы вектор w_2 был направлен по касательной к траектории, должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} u_n = -\upsilon_n \\ u_\tau - \upsilon_\tau = w_2 \end{cases} \Rightarrow w_2 = u_\tau - \upsilon_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon\sin(\alpha).$$

Участок малой длины Δl самолёт пролетит за время $\Delta t_{CA1} = \dfrac{\Delta l}{w_2} = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon\sin(\alpha)}$.

Разность времён прохождения малых участков:

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon\sin(\alpha)} - \frac{\Delta l}{\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon\sin(\alpha)} =$$

$$\Delta l \frac{(\sqrt{u^2 - u_n^2} - \upsilon\sin(\alpha)) - (\sqrt{u^2 - u_n^2} + \upsilon\sin(\alpha))}{u^2 - u_n^2 - \upsilon^2\sin^2(\alpha)}.$$

Учтём, что ${u_n}^2 = {\upsilon_n}^2$, $\upsilon^2\sin^2(\alpha) = \upsilon_\tau^2$, а $\upsilon_\tau^2 + \upsilon_n^2 = \upsilon^2$, следовательно,

$$\Delta t_{BD1} - \Delta t_{CA1} = \frac{-2\upsilon\Delta l\sin(\alpha)}{u^2 - \upsilon^2}. \qquad (1)$$

Отметим, что $\Delta l\sin(\alpha)$ – это смещение вдоль ветра, а остальные величины в выражении постоянные. Поэтому, просуммировав значения (1) для всех участков траекторий *CA* и *BD*, получим задержку $\Delta t_2 = \dfrac{-2\upsilon l}{u^2 - \upsilon^2}$, которая совпадает с задержкой Δt_1, но имеет противоположный знак.

Значит, время движения по этим двум маршрутам одинаковое!

$$\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = 1.$$

Критерии оценивания

1. Указано, что $t_{AB} = t_{DC}$.	0,5 балла
2. Правильно выражено время движения на участке *AD*	1 балл
3. Правильно выражено время движения на участке *DA*	1 балл
4. Правильно найден выигрыш во времени Δt_1	1 балл
5. Найдено время движения на малых симметричных участках	4 балла
Для каждого участка:	
a) Идея векторного сложения скоростей	0,5 балла
b) Идея с проецированием на нормальную и тангенциальную оси	0,5 балла
c) Выражение для скорости самолёта через компоненты	0,5 балла
d) Выражение для времени движения	0,5 балла
6. Получено выражение [1] или аналог	1 балл
7. Правильно найдена задержка Δt_2	1 балл
8. Сделан вывод о равенстве времён движения по двум траекториям	0,5 балла

Примечание к критериям

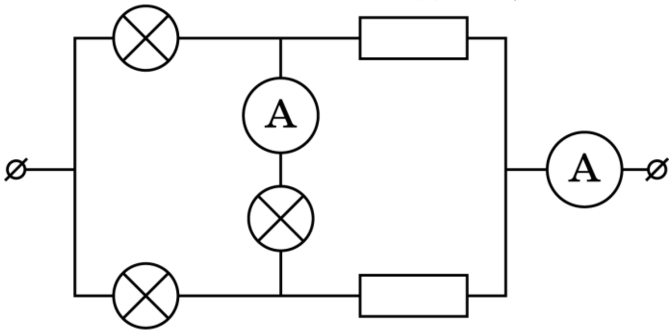
1. При неправильном решении можно поставить 1 балл по **п.5.a**, если в решении используется идея векторной суммы скоростей.

2. Если в п.7 неправильно указан знак, то балл всё равно засчитывается, ошибка будет в последнем пункте.

Нелинейный мост. Цепь изображённая на схеме состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём.

$$I = a\sqrt{U}$$

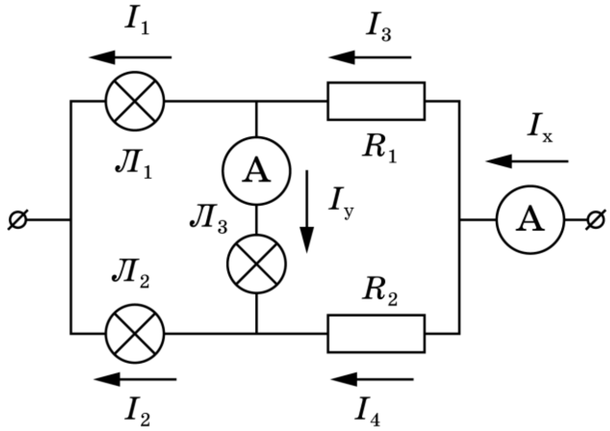
Известно, что один из амперметров показывает ток I_x, а другой I_y, причём $I_x > I_y$.



Определите силу тока в каждом из элементов схемы.

Возможное решение

Из двух заданных токов наибольший (I_x) является общим током цепи, так как это наибольший из возможных токов в данной схеме, а I_y - током в нелинейном элементе. Расставим токи в цепи.



Из ВАХ нелинейного элемента следует, что $U = \dfrac{I^2}{a^2}$

Напряжение на $Л_1$ равно $U_{Л1} = \dfrac{I_1^2}{a^2}$. С другой стороны, это напряжение равно сумме напряжений на $Л_2$ и $Л_3$: $U_{Л1} = U_{Л2} + U_{Л3} = \dfrac{I_2^2}{a^2} + \dfrac{I_y^2}{a^2}$. Дополним систему условием на сумму токов I_1 и I_2:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1^2}{a^2} = \dfrac{I_2^2}{a^2} + \dfrac{I_y^2}{a^2} \\ I_1 + I_2 = I_x \end{cases}$$

Решаю систему получаем выражения для I_1 и I_2:

$$I_1 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{2I_x}$$

$$I_2 = \frac{I_x^2 - I_y^2}{2I_x}$$

Токи I_3 и I_4 найдём из условия разветвления токов в узлах:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_y \\ I_2 = I_4 + I_y \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{(I_x + I_y)^2}{2I_x}$$

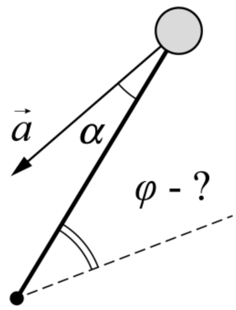
$$I_4 = \frac{I_x^2 - 2I_x I_y - I_y^2}{2I_x}$$

Критерии оценивания

1. Обосновано, что I_x это сила общего тока цепи, а I_y - сила тока через *Л*$_3$	1 балл
2. Получено правильное выражение для напряжения на нелинейном элементе	1 балл
3. Указано равенство падений напряжений в контуре с *Л*$_1$, *Л*$_2$ и *Л*$_3$	2 балла
4. Использовано условие разветвления токов I_1 и I_2	1 балл
5. Получено правильное выражение для I_1	1 балл
6. Получено правильное выражение для I_2	1 балл
7. Использованы условия разветвления токов I_3 и I_4	1 балл
8. Получено правильное выражение для I_3	1 балл
9. Получено правильное выражение для I_4	1 балл

Примечание к критериям

1. Правильное решение неавторским методом оценивается в 10 баллов.
2. В п.1 критериев балл ставится за объяснение какая сила тока проходит через каждый амперметр. Если токи расставлены правильно, но нет объяснения, то этот балл не ставится, но задача проверяется дальше.
3. В п.3 могут быть использованы правила Кирхгофа для контура с нелинейными элементами, рассмотрено распределение потенциалов в этом контуре или аналогичные им уравнения.
4. Для нахождения токов I_3 и I_4 может использоваться разветвление с участием I_y , так и разветвление I_x.



Задача 10.1 Шарик на нити. Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (см. рисунок). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?

Возможное решение. Шарик движется под действием двух сил: силы сопротивления воздуха, направленной против скорости и обеспечивающей тангенциальную составляющую ускорения, и силы натяжения нити, направленной вдоль нити и обеспечивающей центростремительную составляющую ускорения.

Тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = a\sin\alpha = k\upsilon / m$, где υ – скорость, k – коэффициент в формуле для силы сопротивления, а m – масса шарика.

Центростремительная составляющая ускорения $a_{\text{цс}} = a\cos\alpha = \upsilon^2 / R$, где R радиус окружности.

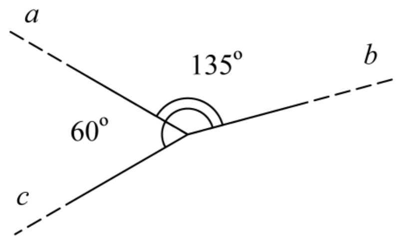
Отношение этих составляющих даёт $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{k\upsilon R}{m\upsilon^2} = \dfrac{kR}{m\upsilon}$.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление движения для произвольного i - го момента времени: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\upsilon_i = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$, где S - пройденный путь. Сократив на dt_i получим: $md\upsilon_i = -kdS_i$. Последнее выражение справедливо для любого малого момента времени. Запишем такое выражение для каждого момента времени и просуммируем их по всем временным отрезкам, тогда получим: $m\Delta\upsilon = -k\Delta S$. Отсюда: $m(0-\upsilon) = -k(S-0)$, или

$S = \dfrac{m\upsilon}{k} = \dfrac{R}{\mathrm{tg}\alpha} = R\varphi$. Окончательно получаем $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$.

Критерии оценивания

1	Из второго закона Ньютона получено выражение для тангенциальной составляющей ускорения $a_\tau = k\upsilon / m$	1 балл
2	Получено выражение для угла α: $\mathrm{tg}\alpha = kR/(m\upsilon)$	2 балла
3	Записан второй закон Ньютона в дифференциальной форме (для малого момента времени) в проекции на направление движения: $m\dfrac{d\upsilon_i}{dt_i} = -k\dfrac{dS_i}{dt_i}$	2 балла
4	Корректно осуществлен переход к конечным приращениям: либо через суммирование, либо через интегрирование. (*Если потеряны знаки, то снимается 2 балла*.)	3 балла
5	Получен итоговый ответ: $\varphi = \mathrm{ctg}\alpha$	2 балла



Задача 10.2. Бильярд на льду. На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.

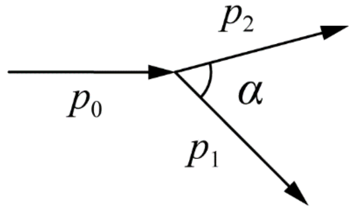
1) Определите, какая из трёх траекторий - «*a*», «*b*» или «*c*» - может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.

2) Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите:

А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения;

Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

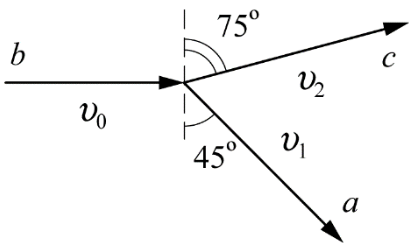
Боковые поверхности шайб гладкие.



Возможное решение. Из закона сохранения импульса $\left(\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)$ получим $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha$, где α – угол разлёта (см. рис.).

При частично упругом столкновении кинетическая энергия налетающей шайбы больше суммы кинетических энергий шайб после столкновения. Здесь и далее кинетическую энергию удобно выразить через импульс: $E_{\text{кин}} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$.

$\dfrac{p_0^2}{2m} = \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m} + Q$; где Q – энергия, перешедшая в тепло в результате столкновения шайб.



Тогда $\dfrac{p_0^2}{2m} > \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m}$. Подставляя p_0^2, получим: $p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha > p_1^2 + p_2^2$, откуда $\cos\alpha > 0$, $0 < \alpha < 90^\circ$.

Следовательно, в результате частично упругого столкновения шайбы разлетаются под острым углом, и траектория «*b*» принадлежит налетающей шайбе перед столкновением. Геометрия столкновения теперь выглядит так:

направив одну координатную ось вдоль траектории налетающей шайбы, а вторую – перпендикулярно, для проекций импульса на эти оси получим:

$$p_1\cos 45^\circ = p_2\cos 75^\circ,$$

$$p_1\sin 45^\circ + p_2\sin 75^\circ = p_0.$$

Отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки, равно отношению их кинетических энергий сразу после столкновения:

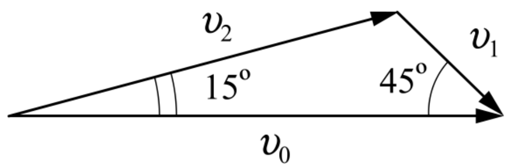
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \left(\frac{\cos 75^\circ}{\cos 45^\circ}\right)^2 \approx 0{,}13 \text{ или } \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\cos 45^\circ}{\cos 75^\circ}\right)^2 \approx 7{,}46.$$

Найдём долю кинетической энергии, переходящую в тепло.

$$Q = E_0 - E_1 - E_2 = \frac{1}{2m}\left(p_0^2 - p_1^2 - p_2^2\right) = \frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{m}$$

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos\alpha}{p_0^2}.$$

Рассмотрим треугольник скоростей:



Из теоремы синусов:

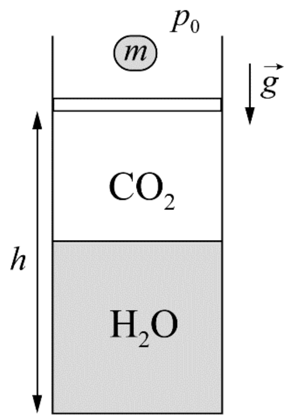
$$p_1 = p_0\frac{\sin 15^\circ}{\sin 120^\circ};\;\; p_2 = p_0\frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{Q}{E_0} = 2\frac{p_1 p_2 \cos 60^\circ}{p_0^2} = 2\frac{\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\left(\sin 120^\circ\right)^2} \approx 0{,}24.$$

Критерии оценивания

1	Записан закон сохранения импульса	1 балл
2	Записан закон сохранения энергии с учетом потерь	1 балл
3	Аргументированно указано, какая из траекторий принадлежит налетающей шайбе. *(Если аргументация отсутствует или не является обоснованной, то баллы за этот пункт не ставятся, но за дальнейшее решение баллы следует ставить согласно критериям*	3 балла
4	Указано, что отношение пройденных до остановки путей равно отношению квадратов импульсов (скоростей) шайб	1 балл
5	Получено верное выражение для отношения путей: S_1 / S_2 или S_2 / S_1	1 балл
6	Получено верное численное значение для отношения путей	1 балл
7	Получено верное выражение для Q / E_0	1 балл
8	Получено верное численное значение для Q / E_0	1 балл



Задача 10.3. Газировка. В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем. Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии.

Определите:

1) массу m_0 одной гири;

2) массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.

Считайте, что температура в сосуде постоянна, и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется. Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

Возможное решение. Пусть в жидкости объёма V_0 при давлении p растворяется газ, занимающий в виде газовой фазы объём V при том же давлении p. В соответствии с законом Генри $V = kV_0$, и можно считать, что жидкость объёма V_0 представляет собой «дополнительный» объём для газа над жидкостью, помимо объёма, который занимает сам газ. В нашем случае при записи уравнения состояния, будем считать, что объём углекислого газа складывается из «дополнительного» объёма $V_0 = kSh/2$ и объёма между поршнем и поверхностью воды при неизменной массе газа. Обозначим Δp – избыточное давление, которое создаёт гиря массы m. Тогда после установки на поршень одной гири:

$$\left(p_0 + \Delta p\right)\left(kS\frac{h}{2} + S\left(\frac{h}{2} - \Delta h\right)\right) = p_0\left(kS\frac{h}{2} + S\frac{h}{2}\right).$$

Поделив обе части уравнения на $p_0 S$, получаем:

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1\right) = \frac{h}{2}(k+1)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)\Delta h_1 = \frac{\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \qquad (1)$$

Для двух гирь:

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)\left(\frac{h}{2}(k+1) - \Delta h_1 - \Delta h_2\right) = \frac{h}{2}(k+1);$$

$$\left(1 + \frac{2\Delta p}{p_0}\right)(\Delta h_1 + \Delta h_2) = \frac{2\Delta p}{p_0}\frac{h}{2}(k+1). \qquad (2)$$

Поделив (2) на (1) получаем

$$\frac{1 + \frac{2\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{\Delta p}{p_0}} \cdot \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{\Delta h_1} = 2$$

Подставив Δh_1 и Δh_2, находим $\frac{\Delta p}{p_0} = 0{,}2$, $m = \frac{\Delta p S}{g} = 2$ кг.

Далее из (1) находим $k = 0{,}87$.

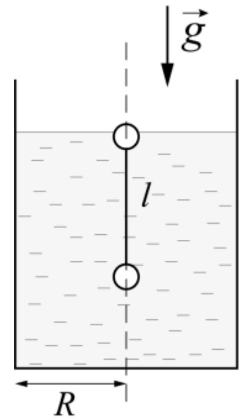
Пусть Δp_x – избыточное давление на поршень, при котором он опустится до поверхности жидкости. Тогда

$$(p_0 + \Delta p_\text{x})\frac{h}{2}kS = p_0\frac{h}{2}(k+1)S,$$

откуда $\Delta p_\text{x} \approx 1{,}15 p_0$, и общая масса груза на поршне при этом $m_x = \frac{\Delta p S}{g} = 11{,}5$ кг. Таким образом, дополнительно необходимо поставить на поршень груз $\Delta m = m_x - 2m \approx 7{,}5$ кг.

Критерии оценивания

1	Корректно записан закон Генри в форме, применимой для выбранного способа решения задачи: либо через объёмы, как в авторском решении, либо через количество вещества/массы растворённого газа в зависимости от внешнего давления.	1 балл
2	Записано уравнение состояния газа для первого опыта (с учётом растворённого газа)	2 балла
3	Записано уравнение состояния газа для второго опыта (с учётом растворённого газа)	1 балл
4	Получено правильное выражение для массы m_0 гири	1 балл
5	Получено правильное численное значение массы гири	1 балл
6	Записано уравнение состояния газа для случая растворения в воде всего газа	2 балла
7	Получено правильное выражение для общей массы всех гирь или массы m_2 дополнительной гири	1 балл
8	Получено верное численное значение массы дополнительной гири (*если ученик забыл вычесть 2m, то балл не ставится*)	1 балл



Задача 10.4. Крутится, вертится. Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длинной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.

Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

Возможное решение. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Архимеда и сила натяжения нити $\vec{T}$; в сумме они создают центростремительное ускорение, равное $\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = -\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику).

Для начала найдём, чему равна сила Архимеда в данной ситуации. Так как сила Архимеда – это сумма сил давления воды на всю поверхность шарика, то она не зависит от материала, из которого изготовлен шарик. Заменим исходный шарик на точно такой же, но сделанный из воды. Очевидно, что он будет неподвижен относительно основной массы воды, а значит, сумма действующих на него сил тяжести и Архимеда будет обеспечивать центростремительное ускорение.

$$\rho_{\text{в}}V\overrightarrow{a_{\text{цс}}} = \rho_{\text{в}}V\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}},$$

откуда

$$\overrightarrow{F_{\text{арх}}} = -\rho_{\text{в}}V(\vec{g} + \omega^2\vec{r}).$$

Второй закон Ньютона для каждого из шариков будет выглядеть следующим образом:

$$-m\omega^2\vec{r} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T}.$$

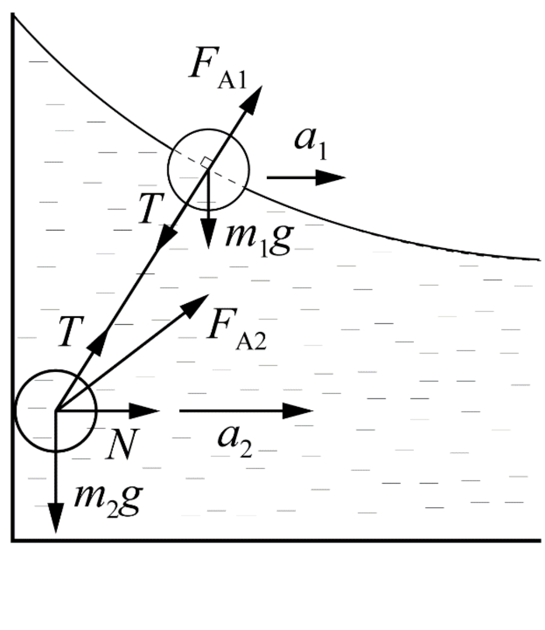
Для удобства, перенесём слагаемое $m\omega^2\vec{r}$ в правую часть равенства

$$\vec{0} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + \vec{T} + m\omega^2\vec{r}.$$

Заметим, что сумма $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$ направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находится по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма $m\vec{g} + \overrightarrow{F_{\text{арх}}} + m\omega^2\vec{r}$ будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно, только если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.

Расставим все силы на рисунке.



Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме $m\vec{g} + m\omega^2\vec{r}$, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити: $m_1g\ sin\alpha = m_1\omega^2 r_1\ cos\alpha$ где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\ sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}.$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж gV - T\,cos\alpha = 0$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж gV}{cos\alpha}$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать

$$m_2 g - \rho_ж gV - T_0 = 0.$$

Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

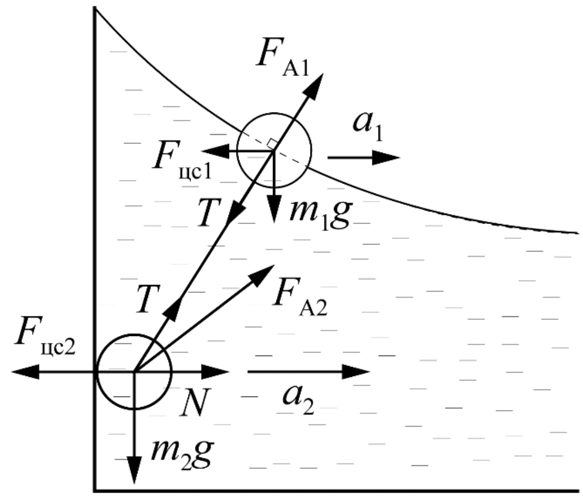
Критерии оценивания

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Альтернативное решение (Неинерциальная СО)

Перейдём в НИСО связанную с вращающимся сосудом. На каждый из шариков действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, центробежная сила $m\omega^2\vec{r}$ ($\vec{r}$ – горизонтальный вектор, проведённый от оси вращения к шарику), сила Архимеда $-\rho_в V(\vec{g} + \omega^2\vec{r})$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Заметим, что сумма силы тяжести и центробежной силы направлена строго против вектора силы Архимеда. Кроме того, из условия задачи следует, что плотность верхнего шарика меньше плотности воды, а нижнего – больше. Из этого следует, что если бы нити не было, то лёгкий шарик сдвигался бы к оси вращения, а тяжёлый – наоборот, от оси. Из этого можно сделать вывод, что связанные нитью шарики будут находиться по одну сторону от оси вращения.

Так как расстояние от шариков до оси вращения будет разным, то и сумма сил тяжести - центробежной и Архимеда - будет направлена для каждого шарика под своим углом к горизонту. Это означает, что шарики не могут быть уравновешены только лишь силой натяжения нити, и равновесие возможно только в случае, если тяжёлый шарик упирается в стенку сосуда.



Расставим все силы на рисунке.

Сила Архимеда, действующая на верхний шарик, коллинеарна сумме сил тяжести и инерции, тогда и сила натяжения нити должна быть ей коллинеарна.

Запишем второй закон Ньютона для лёгкого (верхнего) шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити:

$$m_1 g\, sin\alpha - m_1\omega^2 r_1\, cos\alpha = 0$$

где r_1- расстояние от оси вращения до лёгкого шарика. $r_1 = R - l\, sin\alpha$.

Из этих уравнений получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot tg(a)}{R - l\sin(a)}}\ .$$

Запишем второй закон Ньютона для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось:

$$m_2 g - \rho_ж gV - T\, cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{m_2 g - \rho_ж gV}{cos\alpha}\ .$$

Однако, из условия равновесия нижнего шарика до раскручивания можем записать.

Тогда

$$T = \frac{T_0}{cos\alpha}.$$

Критерии оценивания альтернативного решения

1	Условие равновесия тяжёлого шарика до раскручивания	2 балла
2	Обосновано, что в конечном состоянии тяжёлый шарик будет касаться стенки	2 балла
3	2ЗН для лёгкого шарика в проекции на ось, перпендикулярную нити (или в проекциях на две разные оси)	2 балла
4	Получен правильный ответ для угловой скорости	1 балл
5	2ЗН для тяжёлого шарика в проекции на вертикальную ось (*даже если он не касается стенки*)	2 балла
6	Получен правильный ответ для силы натяжения (*даже если шарик не касается стенки*)	1 балл

Задача 10.5. Три элемента. Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая их трёх элементов: резистора с сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 1) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что вольтамперная характеристика неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе сила тока, протекающего через него, не убывает).
Вольтамперная характеристика «черного ящика» показана на рисунке 2.

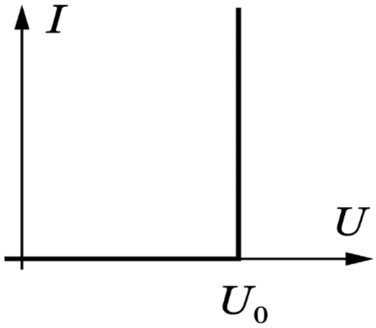


Рис. 1

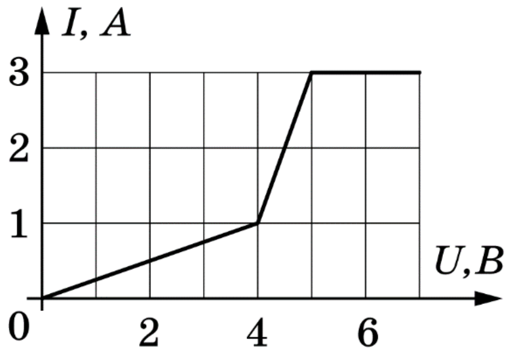


Рис. 2

Определите:

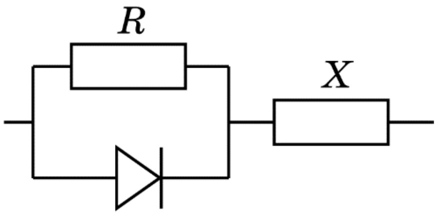
1) Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.

2) Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.

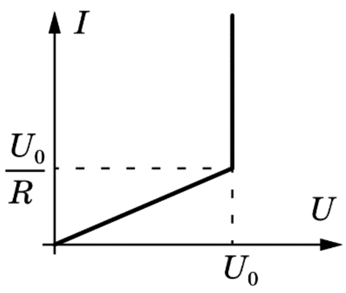
3) Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X.

Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения U_{max} открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

Возможное решение. Из ВАХ ЧЯ видно, что, начиная с некоторого значения внешнего напряжения, сила тока через ЧЯ перестает возрастать. Ни резистор, ни диод, ни их последовательное или параллельное соединение не могут так ограничивать силу тока. Значит, сила тока ограничивается неизвестным нелинейным элементом. Если бы параллельно элементу X располагался ещё какой-то участок цепи, то элемент X не смог бы ограничить общий ток через ЧЯ. Таким образом участок цепи, содержащий резистор и диод, должен быть подключён последовательно к элементу X. Оставшиеся два элемента могут быть соединены друг с другом последовательно или параллельно. Так как диод не пропускает ток при малых напряжениях, а на ВАХ ЧЯ ток при малых напряжения присутствует, то диод должен быть соединён с резистором параллельно.



Участок цепи с параллельно соединёнными диодом и резистором имеет вольтамперную характеристику, изображённую ниже.



ВАХ ЧЯ получается путём сложения вдоль оси напряжений ВАХ цепи резистор-диод и ВАХ нелинейного элемента. В самом деле, при последовательном соединении элементов через них протекает один и тот же ток, а напряжения складываются.

Понятно, что напряжение открытия диода не может превышать 5В, так как напряжение на нелинейном элементе не отрицательно, а ВАХ цепи резистор-диод не имеет горизонтального участка при силе тока 3А. ВАХ нелинейного элемента получается путём вычитания из ВАХ чёрного ящика ВАХ цепи резистор-диод. Пунктирной линией изображена ВАХ цепи диод-резистор, а точками ВАХ неизвестного нелинейного элемента.

Если открытие диода происходит при напряжении $U < 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 1 (для $U_0 = 2\text{ В}$). Если же открытие диода происходит при $U > 4\text{ В}$, то вид ВАХ элемента X окажется таким, как на рис. 2 (для $U_0 = 4\text{ В}$). В таком случае ВАХ элемента X имеет участок, на котором сила тока возрастает с уменьшением напряжения, что противоречит условию задачи.

При $U \le 4\text{ В}$ напряжение $U_0 = 7/8\,U$, поскольку $U_0 = IR$, а $U = I \cdot 4\text{ Ом}$, где I – сила тока в цепи в момент открытия диода. Значит, $\max U_0 = 3{,}5\text{ В}$. Соответствующая этому случаю ВАХ элемента X представлена на рис. 3.

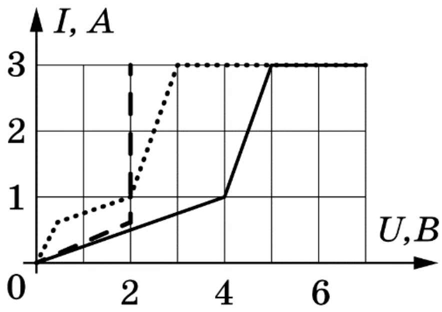


Рис. 1

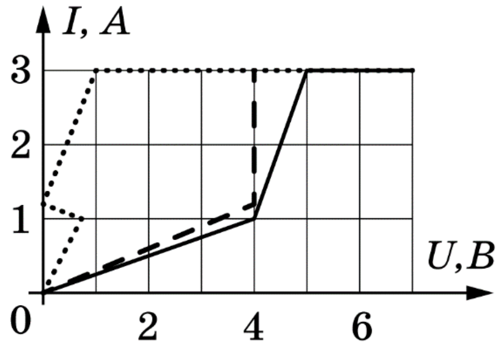


Рис. 2

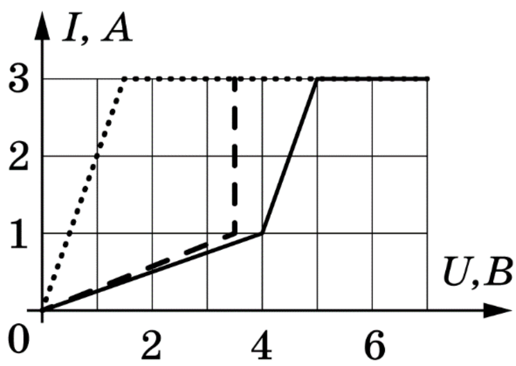


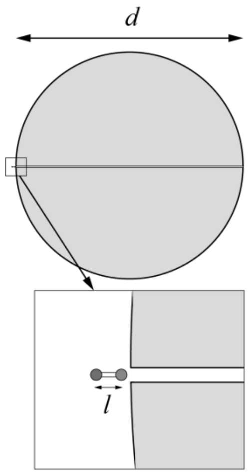
Рис. 3

Критерии оценивания

1	Указано, что нелинейный элемент подключён последовательно остальным	1 балл
2	Утверждение из п. 1 корректно обосновано	1 балл
3	Указано, что диод и резистор соединены параллельно	1 балл
4	Утверждение из п.3 корректно обосновано	1 балл
5	Приведена схема ЧЯ	1 балл
6	Указано, что напряжение открытия диода не более 5В	1 балл
7	Обосновано, что напряжение открытия не может быть более 3,5 В	1 балл
8	Найдено одно значение напряжения открытия в интервале 0-3,5 В и для него построена ВАХ нелинейного элемента	1 балл
9	Указано, что любое напряжение открытия в интервале 0-3,5 В подходит.	1 балл
10	Построены две ВАХ: для напряжения 3,5 В и одного из напряжений: 1, 2 или 3 В.	1 балл

Примечание: Если построена только одна ВАХ нелинейного элемента, для напряжения открытия от 0 до 3,5 В, то это оценивается в пункте 8, а за пункт 10 баллы не ставятся.

Задача 11.1. Диполь в шаре. В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.



Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$.

Определите плечо диполя l, считая, что $l << d$.

Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

Возможное решение. Напряжённость внутри однородно заряженного шара можно найти из теоремы Гаусса:

$$E(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}x\,,$$

где ρ – объёмная плотность заряда шара, x – расстояние до центра шара.

На диполь в электрическом поле действует равнодействующая двух кулоновских сил. Для втягивания диполя в шар нужно расположить его таким образом, чтобы ближний к центру шара заряд был положительным, так как поле ближе к центру слабее, а нам надо добиться превосходства силы притяжения над силой отталкивания.

$$F_Д = F_+ - F_- = q(E(x+l) - E(x)) = \frac{ql\rho}{3\varepsilon_0} = \mathrm{const}\,,$$

где q – заряд диполя (модуль заряда каждого из шариков).

Таким образом, диполь будет разгоняться с постоянным ускорением $a_д$ до вылета из шара.

$$\begin{cases} d = \dfrac{a_д t_д^2}{2}, \\ a_д = \dfrac{ql\rho}{6m\varepsilon_0}, \end{cases}$$

где m – масса одного из шариков диполя.

$$t_д = \sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}\sqrt{\frac{4d}{l}}\,.$$

Рассмотрим движение одного шарика. Если заряд шарика по знаку совпадает с зарядом большого шара, то в канал его не втянет, значит в условии речь идёт о шарике с противоположным (отрицательным) зарядом.

Второй закон Ньютона запишется в виде:

$$ma = qE(x),$$

$$m\ddot{x} = -\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x.$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}\,.$$

До противоположного конца канала шарик долетит за время

$$t_ш = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}\,.$$

Используя выражения для $t_ш$ и $t_д$, получаем ответ:

$$l = d\left(\frac{2}{\pi}\frac{t_ш}{t_д}\right)^2.$$

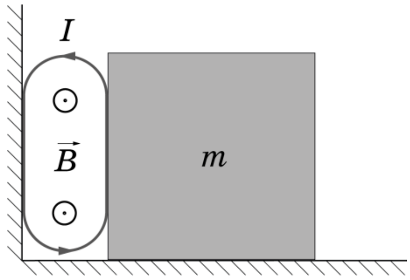
Критерии оценивания

1. Получено или использовано без вывода правильное выражение для напряжённости электрического поля $E(x)$ внутри шара	1,5 балла
2. Получено правильное выражение для силы, действующей на диполь в шаре	1,5 балла
3. Правильно указан знак заряда ближнего к центру шара шарика диполя в начальном положении	0,5 балла
4. Получено правильное уравнение движения диполя	1 балл
5. Получено правильное выражение для $t_д$	1 балл
6. Правильно указан заряд шарика, втягивающегося в шар	0,5 балла
7. Получено уравнение гармонических колебаний для движения шарика	2 балл
8. Получено правильное выражение для $t_ш$	1 балл
9. Получено правильное выражение для l	1 балл

Задача 11.2. Магнитная пружина. Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

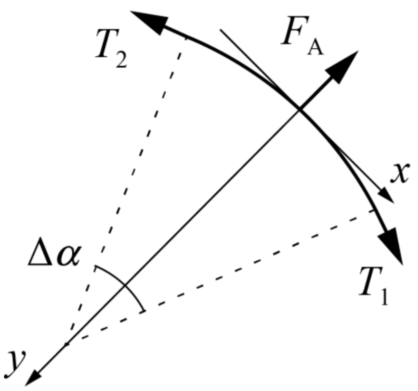
1) До какой наибольшей скорости υ_m разгонится куб, если его отпустить?

2) Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?



Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

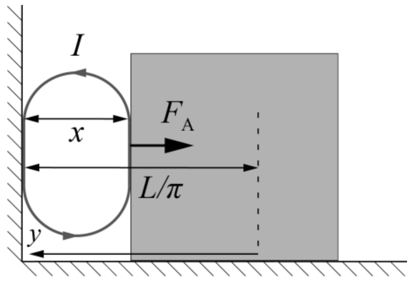
Возможное решение. Рассмотрим равновесие (бесконечно) малого участка провода, не контактирующего со стенкой или гранью куба, имеющего радиус кривизны R и угловой размер $\Delta\alpha$. Запишем условия равновесия в проекциях на оси x (проходит по касательной к проводу в середине участка) и y (проходит через центр кривизны участка). Учтём, что сила Ампера $F_A = IB\Delta l = IBR\Delta\alpha$:



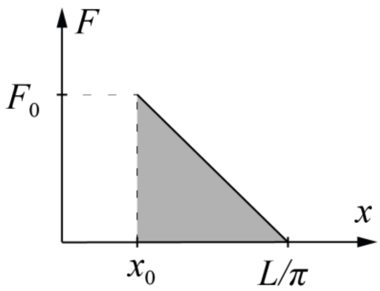
$$\begin{cases} T_1\cos(\Delta\alpha/2) = T_2\cos(\Delta\alpha/2); \\ T_1\sin(\Delta\alpha/2) + T_2\sin(\Delta\alpha/2) = IBR\Delta\alpha. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что натяжение провода постоянно: $T_1 = T_2 \equiv T$, из второго (с учётом малости $\Delta\alpha$) – что радиус кривизны постоянен на «свободных» участках провода: $R = T/(IB) = \text{const}$. Значит, эти участки – дуги окружностей. Одновременно мы замечаем, что сила натяжения – конечная величина, а остальные силы (сила Ампера, сила реакции стенки или грани куба) для любого элемента – бесконечно малые величины (порядка Δl), поэтому угол поворота провода на любом участке – тоже бесконечно малая величина порядка Δl. Это означает, что в состоянии равновесия провод не имеет изломов. Поэтому можно сделать вывод, что в каждый момент времени после отпускания системы невесомый провод, находящийся в «квазиравновесном» состоянии, состоит из двух одинаковых полуокружностей с диаметром, равным x, и двух одинаковых линейных участков, прижатых к стенке и грани куба. Следовательно, длина линейного участка провода, соприкасающегося с гранью куба, равна $l(x) = (L - \pi x)/2$. Куб разгоняется за счёт давления этого участка, которое возникает из-за силы Ампера $F_A = IBl(x) = IB(L - \pi x)/2$.

Поэтому разгон, начинающийся при $x = x_0$, заканчивается при $x = L/\pi$, когда провод перестаёт соприкасаться с гранью куба.



Обратим внимание, что поведение разгоняющий силы в точности совпадает с поведением силы упругости пружины длиной L/π с коэффициентом жёсткости $k = \pi IB/2$. Поэтому движение в процессе разгона соответствуют четверти периода гармонических «колебаний» на пружине от начальной деформации $y_0 = \dfrac{L}{\pi} - x_0$ до «положения равновесия». Максимальная скорость разгона



$$\upsilon_m = \omega y_0 = y_0\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Другой способ вычисления максимальной скорости – это использование закона изменения кинетической энергии. Поскольку сила, действующая на куб, зависит линейным образом от его перемещения, то её работу можно вычислить как площадь под графиком $F(x) = IB(L - \pi x)/2$. Следовательно, изменение кинетической энергии куба в процессе разгона

$$\frac{m\upsilon_m^2}{2} = A_F = \frac{1}{2}F_0\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right) = \frac{\pi IB}{4}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)^2,$$

то есть

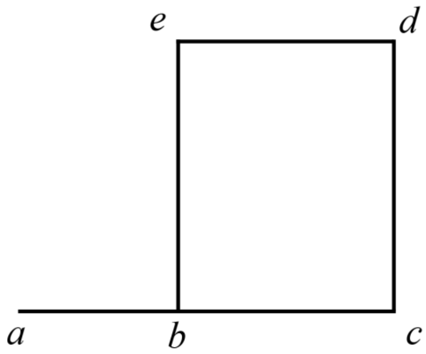
$$\upsilon_m = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right).$$

Время разгона равно четверти «периода колебаний»: $t_m = \dfrac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\dfrac{\pi m}{2IB}}$.

Критерии оценивания.

№	результат	максимальный балл
1.	Доказано (с использованием условия равновесия провода), что участки провода, не соприкасающиеся со стенкой или гранью куба, имеют форму полуокружностей: • постоянство радиуса кривизны на «свободных» участках – 1,5 балла; • отсутствие изломов – 0,5 балла.	2
2.	Правильно найдена длина участка провода, соприкасающегося с гранью куба: • указано (в том числе без доказательства), что в любой момент времени провод состоит из двух линейных участков и двух полуокружностей с диаметром, равным x – 0,5 балла; • получена формула $l(x)=\dfrac{L-\pi x}{2}$ – 0,5 балла.	1
3.	Указано (или используется в решении), что разгон куба прекращается при $x = L/\pi$	1
4.	Найдена величина силы, действующей на куб со стороны провода как функция расстояния x: • записано соотношение $F = IBl(x)$ – 0,5 балла; • получена правильная формула $F_A = IB(L-\pi x)/2$ – 1,5 балла	2
5.	Правильно найдена величина максимальной скорости куба $\upsilon_m=\sqrt{\dfrac{\pi IB}{2m}}\left(\dfrac{L}{\pi}-x_0\right)$ из закона изменения энергии: • правильно вычислена работа силы – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл. из кинематики гармонического движения: • указано на гармоничность движения и записана формула $\upsilon_m = \omega y_0$ – 1 балл; • получен правильный ответ для υ_m – 1 балл	2
6.	Правильно найдено время разгона $t_m=\sqrt{\dfrac{\pi m}{2IB}}$: • указано, что время разгона соответствует четверти «периода» гармонического движения – 1 балл; • получен правильный ответ для t – 1 балл	2
	ВСЕГО	10

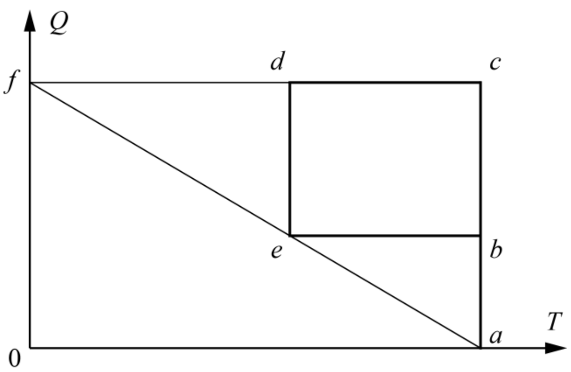
Задача 11.3. Обрывок из архива Кельвина. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли диаграмму (см. рис.) квазистатического циклического процесса тепловой машины, рабочим телом которой являлось неизвестное вещество. Диаграмма процесса была построена в непривычных координатах $T(Q)$ (T – температура, Q – количество подведённой теплоты) и имела вид ломаной линии $abcdeb$. От времени чернила выцвели и координатные оси исчезли, однако из пояснений к рисунку следовало, что каждый отрезок параллелен одной из осей координат. Восстановите построением положение осей Q и T и укажите их направления. Опишите ваш способ построения и нарисуйте в работе диаграмму с осями координат и вспомогательными линиями, использованными при построении.



Возможное решение. Поскольку все отрезки параллельны координатным осям Q и T, на рисунке представлен цикл Карно. Отрезки cd и eb не могут быть параллельны оси Q, иначе в точке b температура отличается от температуры точки a, а это невозможно в циклическом процессе. Поэтому abc и de параллельны оси Q, а cd и eb – оси T. Ось температур должна проходить через точку a, так как с неё начинается отсчёт подведённой теплоты.

Перейдём к построению осей. Здесь и далее подстрочный индекс «х» относится к холодильнику, индекс «н» – к «нагревателю». КПД цикла Карно $\eta = 1 - \frac{T_X}{T_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}$, откуда $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}$.

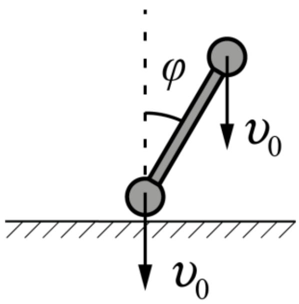
Проведём прямые через cd и ae. Они пересекаются в некоторой точке f. Так как длина ed соответствует $Q_х$, длина ac соответствует $Q_н$, ed – изотерма при $T_х$, а ac – изотерма при $T_н$, то из последнего соотношения следует, что прямые cd и ae пересекаются на оси Q над началом координат. Таким образом, точка f принадлежит оси Q и лежит над началом координат. Проведём прямую, параллельную cd через точку a и проведём перпендикуляр к ней из точки f. Точка пересечения даст нам начало координат, а сам перпендикуляр будет являться осью Q. В условии указано, что это цикл тепловой машины, следовательно, это прямой цикл, поэтому ось Q имеет направление, указанное на рисунке.



Критерии оценивания

1) Указано, что на рисунке цикл Карно	1 балл
2) Указано, что abc и de – изотермы	1 балл
3) Указано, что cd и eb – адиабаты	1 балл
4) Использовано соотношение $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}$ или эквивалентное ему	2 балла
5) Установлено, что ось температур проходит через точку a и верно указано её направление	1,0 балл
6) Показано, что точка пересечения прямых cd и ae принадлежит оси Q	3 балла
7) Восстановлена ось Q и верно указано её направление	1,0 балл

Задача 11.4. Падающая гантель. Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины L, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны v_0, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.



1) Каковы величина скорости центра масс гантели v_c и угловая скорость вращения стержня ω сразу после удара?

2) Под каким углом φ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

Возможное решение

Определение скорости центра масс и угловой скорости

Вариант 1. Рассмотрим момент времени сразу после удара. Из закона сохранения энергии следует

$$m{v_0}^2 = \frac{m({v_1}^2 + {v_2}^2)}{2}$$

$${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2,$$

где индексы 1 и 2 обозначают нижний и верхний шарики, соответственно.

Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и находится из выражения

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}}{2}$$

$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

Из закона сложения скоростей $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ имеем

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = v_0\sqrt{2}.$$

Угловая скорость вращения стержня равняется $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$.

Таким образом, ответы на первый вопрос:

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \text{ и } \omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Вариант 2. Найти скорость центра масс и угловую скорость стержня можно также, используя теорему Кёнига:

$$E_{\text{кин}} = 2m\frac{{v_c}^2}{2} + E_{\text{вр}} = m{v_0}^2.$$

Здесь $E_{\text{вр}} = 2m\frac{(\frac{\omega L}{2})^2}{2} = \frac{m\omega^2L^2}{4}$ представляет собой кинетическую энергию вращения системы относительно центра масс, v_c – скорость центра масс после удара. Поскольку поверхность гладкая, сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и определяется выражением $\vec{v}_\text{c} = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}$. С учётом перпендикулярности $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

$$v_c = \frac{\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}}{2}.$$

Из закона сохранения энергии ${v_1}^2 + {v_2}^2 = 2{v_0}^2$. Подставляя это в выражение для v_c, получаем

$$v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя выражения для $E_{\text{вр}}$ и v_c в уравнение для $E_{\text{кин}}$, получим для угловой скорости тот же ответ, что и первым способом:

$$\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}.$$

Примечание. Возможны другие варианты, комбинирующие закон сохранения энергии и условие перпендикулярности векторов. Все они оцениваются одинаково при корректном получении правильных ответов.

Определение угла φ

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика)

Ответ можно получить, используя тот факт, что для верхнего шарика выполняется закон сохранения импульса в проекции на ось, перпендикулярную стержню. Этот факт следует из того, что единственная сила, действие которой на верхний шарик за бесконечно малое время соударения существенно – это сила реакции стержня, направленная строго вдоль стержня. До удара проекция скорости шарика на эту ось равна

$$v_x = v_0 \sin\varphi.$$

После удара, воспользовавшись законом сложения скоростей, получим для проекции

$$v_x = \frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi.$$

Из этих двух уравнений, используя ранее полученные выше выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ:

$$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0 + v_c)} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°.$$

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

Внешняя сила, действующая на гантель во время удара – сила нормальной реакции гладкой поверхности – имеет нулевое плечо относительно точки удара нижнего шарика о поверхность. Поэтому момент импульса гантели относительно оси, проходящей через эту точку, сохраняется. При этом момент импульса гантели относительно этой оси равен моменту импульса верхнего шарика 2, а скорость которого после удара $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{вр2}$. Мы уже знаем, что сразу после удара скорость центра масс направлена вертикально вверх и равна по величине $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Скорость вращения $\vec{v}_{вр2}$ направлена перпендикулярно стержню, а её модуль $\left|\vec{v}_{вр2}\right| = \frac{\omega L}{2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Поэтому закон сохранения момента импульса имеет вид

$$mv_0 Lsin\varphi = -m\frac{v_0}{\sqrt{2}}Lsin\varphi + mL\frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Выражая из этого соотношения синус искомого угла, получим $sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Итак, $\varphi = arcsin\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx 24{,}5°$.

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

В случае непостоянства момента импульса относительно выбранной точки мы должны учесть изменение момента импульса из-за внешних сил. В рамках данной задачи момент импульса может меняться только под действием реакции поверхности. Из теоремы о движении центра масс найдём импульс, переданный поверхностью шарикам,

$$\Delta P_N = 2m(v_0 + v_c)$$

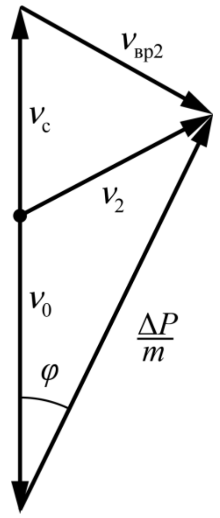
Запишем закон изменения момента импульса относительно центра масс:

$$2\frac{mL^2\omega}{4} = \frac{mL^2\omega}{2} = \frac{\Delta P_N L \sin\varphi}{2}.$$

Отсюда, используя ранее полученные выражения для v_c и ω, получаем ответ для φ.

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Вариант 4 (использование векторных диаграмм).



Поскольку стержень невесом, а время удара мало, изменение импульса верхнего шарика $\overrightarrow{\Delta P}$ направлено вдоль стержня. Представим скорость этого шарика двумя способами:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр2}}$$

Здесь $\vec{v}_{\text{вр2}}$ - скорость верхнего шарика в системе центра масс после удара. Поскольку стержень твёрдый, $\frac{\Delta\vec{P}}{m}$ и $\vec{v}_{\text{вр2}}$ перпендикулярны. Изобразим это геометрически.

Поскольку $v_{\text{вр2}} = \frac{\omega L}{2}$, из прямоугольного треугольника получим:

$\sin\varphi = \frac{\omega L}{2(v_0+v_c)} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow \varphi = arcsin(\sqrt{2}-1) \approx 24{,}5°$.

Критерии оценивания

Ответ на вопрос 1 (5 баллов)

Вариант 1 (кинематика)

1. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ — 1 балл
2. Записано выражение для скорости центра масс $\vec{v}_c = \frac{\vec{v}_1+\vec{v}_2}{2}$ — 0,5 балла
3. Получено верное выражение для скорости центра масс $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ — 1 балл
4. Выражение для угловой скорости вращения через относительную скорость шариков $\omega = \frac{v_{\text{отн}}}{L}$ — 1 балл
5. Выражение для относительной скорости движения шариков $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2{}^2}$ — 0,5 балла
6. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование теоремы Кёнига)

1. Использовано при решении выражение для кинетической энергии гантели после удара в виде $E_{\text{кин}} = 2m\frac{v_c{}^2}{2} + E_{\text{вр}} = mv_0{}^2$ — 1 балл
2. Из закона сохранения энергии получено $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$ — 0,5 балла
3. Из определения скорости центра масс $\overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}}{2}$ и закона сохранения энергии $v_1{}^2 + v_2{}^2 = 2v_0{}^2$, с учётом перпендикулярности $\overrightarrow{v_1}$ и $\overrightarrow{v_2}$, получено выражение для v_c, а именно $v_c = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ — 1,5 балла
4. Использовано для решения выражение для энергии вращения в системе центра масс $E_{\text{вр}} = \frac{m\omega^2 l^2}{4}$ — 1 балл
5. Получено верное выражение для угловой скорости $\omega = \frac{v_0\sqrt{2}}{L}$ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Ответ на вопрос 2 (5 баллов)

Вариант 1 (сохранение проекции импульса верхнего шарика) вдоль

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена стержня и проекция импульса на перпендикулярное направление сохраняется — 1 балл
2. Выражение для проекции импульса верхнего шарика на направление, перпендикулярное стержню до удара, $p_x = mv_0 \sin\varphi$ — 1 балл
3. Выражение для проекции импульса верхнего шарика после удара на направление, перпендикулярное стержню, с использованием полученных выражений для скорости центра масс и угловой скорости вращения $p_x = m(\frac{\omega L}{2} - v_c \sin\varphi_0)$ — 2 балла

4. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Вариант 2 (использование закона сохранения момента импульса)

1. Записан закон сохранения момента импульса относительно точки удара нижнего шарика о поверхность — 3 балла
2. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

Всего: 5 баллов

Вариант 3 (использование закона изменения момента импульса)

1. Выражение для импульса, полученного гантелей при столкновении с поверхностью $P_N = 2m(v_0 + v_c)$ — 1 балл
2. Записан закон изменения момента импульса относительно выбранной участником точки — 2 балла
3. С использованием ранее полученных результатов для v_c и ω получен верный ответ для φ — 2 балла

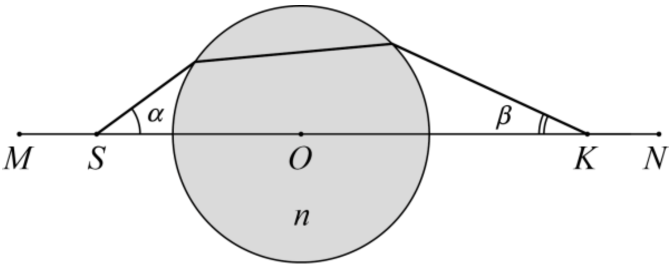
Всего: 5 баллов

Вариант 4 (использование векторных диаграмм)

1. Указано, что сила, действующая на верхний шарик, направлена вдоль стержня — 1 балл
2. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через изменение импульса для верхнего шарика $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta\vec{P}}{m}$ — 1 балл
3. Записано выражение для скорости верхнего шарика после удара в векторной форме через скорость центра масс и скорость второго шарика в системе центра масс $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_{\text{вр}2}$ — 1 балл
4. Использована векторная диаграмма и перпендикулярность $\vec{v}_2$ и $\Delta\vec{P}$ — 1 балл
5. Получен верный ответ для φ — 1 балл

Всего: 5 баллов

Задача 11.5. Прозрачный шарик. Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара, пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.



1) Выразите радиус R шара и расстояние SO от источника до центра шара через параметры l, α, β, n.

2) Вычислите SO и R для значений $n = 2,\ \alpha = 60°\text{C},\ \beta = 30°\text{C},\ l = 10$ см.

Возможное решение

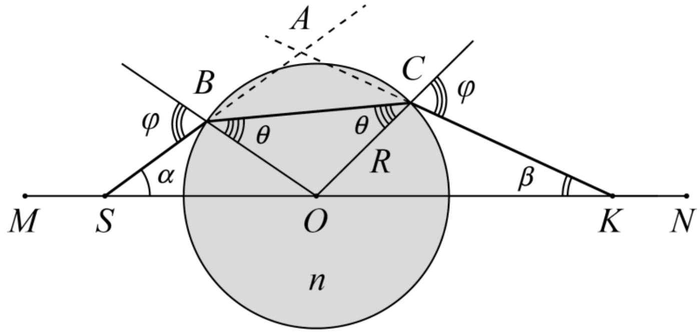


рис.1.

Пусть B – точка падения луча, о котором идёт речь в задаче, на поверхность шара (рис.1.), C – точка выхода луча из шара, φ и θ – углы падения и преломления, связанные законом Снелла: $\sin\varphi = n\sin\theta$, A – точка пересечения продолжений лучей SB и CK. Так как треугольник OBC – равнобедренный, то угол падения в точке C равен углу преломления θ в точке B. Согласно закону преломления угол преломления в точке C будет равен углу падения φ в точке B. С учётом этого, по теореме синусов, для треугольников SBO и OCK:

$$\frac{SO}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{OK}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Следовательно, $$\frac{SO}{OK} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Тогда ответ на первый вопрос: $$SO = l\frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Обратите внимание на то, что и в точке B, и в точке C угол отклонения луча при преломлении равен $\gamma = \varphi - \theta$. Поэтому полный угол отклонения луча равен 2γ. Следовательно, $\angle SAK = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - 2\gamma$, то есть $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Таким образом, справедливо соотношение $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \gamma)} = n$, из которого следует:

$$\sin\varphi = n\sin\varphi\cos\gamma - n\sin\gamma\cos\varphi.$$

Из последнего уравнения находим $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{n\cos\gamma - 1}$ и $\sin\varphi = \dfrac{n\sin\gamma}{\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}$.

Из теоремы синусов для треугольника SBO следует $\dfrac{SO}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

Запишем формулы для ответа на второй вопрос:

$$R = SO\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = l\frac{\sin\alpha\sin\beta\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}{(\sin\alpha + \sin\beta)n\sin\gamma}.$$

После подстановки заданных численных значений получаем: SO = 3,66 см, R = 3,30 см.

Критерии оценивания

1. Проведён анализ хода луча в шаре, то есть на рисунке отмечены углы падения и преломления для луча, падающего на шар, и луча, выходящего из шара — 0,5 балла
2. Записан закон Снелла для этих лучей $\sin\varphi = n\sin\theta$ — 0,5 балла
3. Указано (или используется в решении), что угол падения при входе луча в шар равен углу преломления при выходе из шара и угол преломления при входе в шар равен углу падения при выходе — 1 балл
4. Получено соотношение $\dfrac{SO}{OK} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ или эквивалентное — 1 балл
5. Получен верный ответ для SO — 1 балл
6. Получено верное выражение для связи угла поворота луча с углами α и β $\left(\varphi - \theta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ или эквивалентное — 1 балл
7. Получено верное выражение для угла падения или угла преломления через данные задачи — 1 балл

Примечание: *если это выражение получено другим корректным способом, без вычисления угла поворота луча, то балл за п.6 тоже ставится.*

8. Получен верный ответ для R — 2 балла
9. Получено численное значение SO — 1 балл
10. Получено численное значение R — 1 балл

LIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

25 января 2020 г.

Задание 9.1. Плотность провода (III). Вам выдан образец одножильного провода длиной L= 600 мм. На половине его длины изоляция срезана. Определите массу, объём и плотность ($m_м$, $V_м$, $\rho_м$) металла, а также массу, объем и плотность ($m_и$, $V_и$, $\rho_и$) изоляции провода.

В процессе решения поставленной задачи используйте провод в качестве рычага и исследуйте зависимость длины какой-либо части провода в положении равновесия от массы размещённого на нём груза. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной. Погрешность оценивать не требуется.

Примечание 1. Длина окружности $X = \pi D$, где D – диаметр этой окружности. Площадь круга $S = \pi D^2/4$; $\pi = 3,14$.

Примечание 2. Изгибать провод запрещено!

Примечание 3. Снимать изоляцию с проволоки категорически запрещено.

Оборудование: образец провода длиной L = 600 мм, линейка 40 см, 2 шприца объёмом 5 мл, и 1 мл; стакан с водой, гибкая трубка, нитка, салфетка, миллиметровая бумага для построения графика.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

LIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

25 января 2020 г.

Задание 9.2. Серый ящик – магазин. С помощью серого ящика, содержащего источник напряжения U_0 и «магазин» сопротивлений (набор пяти резисторов, включённых последовательно) (рис.1), определите величины внутренних сопротивлений R_{A1}, R_{A2} и R_{A3} мультиметра, используемого в качестве амперметра в диапазонах 200 мА, 20 мА, и 2000 мкА. Для выполнения задания исследуйте зависимость силы тока через амперметр от величины сопротивления в цепи его включения. Выведите формулу, связывающую измеренные вами физические величины между собой. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной.

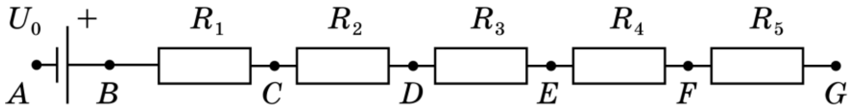


Рис.1

Оборудование: серый ящик; мультиметр; два провода штекер-крокодил, два провода крокодил-крокодил, миллиметровая бумага для построения графиков (3 листа формата А5).

Примечания:

1. Мультиметр в режиме **амперметра** разрешается подключать только (**строго!!**) к контактам *B* и *C* серого ящика.
2. Пользоваться другими режимами мультиметра **можно**.
3. Тщательно продумывайте последовательность своих действий и подробно описывайте их. В случае если вы «сожжёте» предохранителя, находящегося внутри мультиметра, его замена на исправный производиться не будет.
4. Источник напряжения считайте идеальным.
5. Если зависимость какой-либо физической величины *Y* от другой величины *X* представляет собой дробь, в числителе которой имеется только одно слагаемое, а в знаменателе несколько слагаемых, то анализ этой зависимости существенно упрощается, если перейти к равенству обратных величин левой и правой части уравнения.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

LIV Всероссийская олимпиада школьников по физике
Региональный этап
25 января 2020 г.

Задание 10.1. Газировка.

Часть 1. (8 баллов). С помощью выданного вам оборудования определите давление воды внутри бутылки газировки. Считайте, что внутри бутылки находится углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. Согласно закону Генри количество газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорционально давлению этого газа $\nu = \alpha VP$, где V – объём жидкости, P – давление газа, $\alpha = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ моль/$\left(\text{Па} \cdot \text{м}^3\right)$ для углекислого газа, растворяемого в воде.

Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, комнатную температуру считайте равной $T = 300\ K$, малярная масса углекислого газа $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль.

В первой части работы оценивать погрешность не нужно.

Часть 2. (7 баллов). С помощью выданного вам оборудования проверьте справедливость закона Генри, получив три точки для зависимости количества растворённого газа от давления: одну - при атмосферном давлении, вторую - при давлении больше атмосферного и третью - при давлении меньше атмосферного. Подробно опишите Ваши действия и вычислите значение коэффициента α, сравнив его с данным в условии.

Оборудование: две бутылки с газированной водой, стаканчик, шприц объёмом 20 мл, затычка для шприца, салфетки для поддержания чистоты рабочего места.

Примечания:

1) Рекомендуем одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итогового. Не рекомендуем трясти бутылку перед тем, как её открывать.
2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в равновесное состояние за относительно длительное время, но если воду перемешивать или взбалтывать, то равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

LIV Всероссийская олимпиада школьников по физике
Региональный этап
25 января 2020 г.

Задание 10.2. Сосчитай шарики. В прямоугольном непрозрачном запечатанном пакете из-под сока находится некоторое количество шариков (зёрен пшена). Определите их число.

Толщиной стенок пакета и его массой можно пренебречь. Считайте, что все шарики одинаковые как внутри прозрачной, так и внутри непрозрачной коробочек. Прозрачная коробочка выдана вам для качественного понимания процессов, происходящих внутри непрозрачной коробочки, её нельзя использовать в качестве оборудования, но вы можете ссылаться на качественные результаты экспериментов с прозрачной коробочкой. Также вы можете извлекать из прозрачной коробочки шарики и проводить с ними необходимые опыты.

ВАЖНО!!! Вскрывать непрозрачную коробочку и получать доступ к её содержимому запрещается! Также предложенный вами метод должен работать и для коробочек с жёсткими стенками, иначе он будет оценён в 0 баллов.

При написании отчёта уделите особое внимание описанию ваших действий, особенно тех, которые направлены на увеличение точности измерений и пояснениям как именно эти действия позволяют увеличить точность измерений.

Примечание: Объём шара равен $V_{\text{Ш}} = \pi D^3 / 6$, где D – диаметр шарика.

Оборудование: прямоугольный непрозрачный запечатанный пакет из под сока, две линейки, канцелярская скрепка, прозрачная коробочка с шариками, лист миллиметровки формата А5.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

Задание 11.1. «Газировка (II)». Некоторые газы хорошо растворяются в жидкостях. Например, углекислый газ прекрасно растворяется в воде, что используется при приготовлении всем хорошо знакомой газировки. При постоянной температуре и не слишком больших давлениях количество газа, растворённого в жидкости, прямо пропорционально парциальному давлению этого газа над жидкостью (закон Генри)

$$\nu = \alpha V p.$$

Здесь V – объём жидкости, p – парциальное давление газа, α – коэффициент, зависящий от температуры и измеряемый в $\text{моль}/\left(\text{Па} \cdot \text{м}^3\right)$.

1. Убедитесь, что силы трения поршня о стенки корпуса шприца мала по сравнению с силой атмосферного давления на поршень. Опишите, как вы это сделали.
2. Определите давление газа в бутылке газированной воды
3. Определите величину α для углекислого газа и воды при комнатной температуре.

Считайте, что внутри бутылки находятся углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. При аккуратном открытии бутылки (не трясите её и не взбалтывайте перед этим!) за малый промежуток времени изменение концентрации газа в растворе незначительно.

Оборудование: 1) две бутылки минеральной газированной воды; 2) шприц 20 мл; 3) заглушка на шприц; 4) одноразовый стакан 200 мл; 5) одноразовая пластиковая тарелка и салфетки для поддержания рабочего места в чистоте.

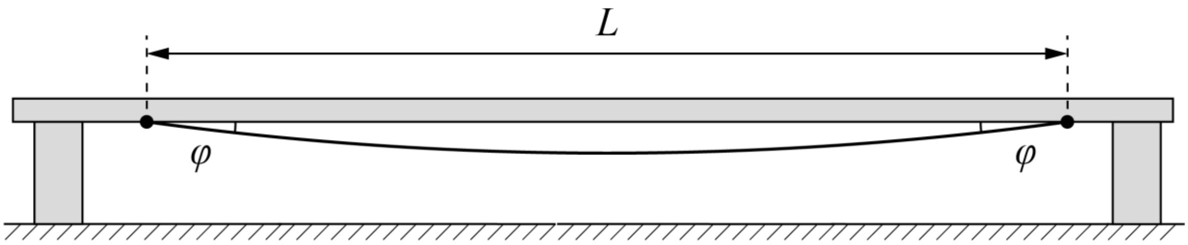
Примечания:

1) Рекомендуется одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итоговых. Не рекомендуется трясти бутылку перед тем, как её открывать.
2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в равновесное состояние за относительно длительное время, но, если воду перемешивать или взбалтывать (в закрытой бутылке), равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее (несколько минут).

Постарайтесь работать аккуратно, чтобы не облить себя и соседей, не залить водой рабочее место! Одноразовая посуда и салфетки выданы Вам для поддержания рабочего места в порядке.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

Задание 11.2. Упругая лента. Изгиб подвешенной за концы резиновой ленты определяется равновесием упругих сил и сил тяжести. Для однородно растянутой ленты её натяжение $T = ES\Delta L/L$, где E модуль Юнга, S и L площадь сечения и длина ленты в нерастянутом виде, ΔL её удлинение. Закрепим концы ленты на одной горизонтали на расстоянии, равном её длине L в нерастянутом виде (рис.1). Провисшая под собственным весом лента образует с горизонталью некоторый угол φ, а середина ленты ниже этой горизонтали на некоторое расстояние h, называемое стрелой прогиба.



1. При помощи предложенного оборудования, измерьте стрелы прогиба h не менее чем для 10 значений длины ленты в **ненатянутом виде** L в диапазоне от 30 до 120 см. Результаты представьте в виде таблицы и графика $h(L)$
2. Используя полученные вами в п.1 экспериментальные результаты, считая, что $h = AL^n$, при использовании графической обработки определите значение n (n – не обязательно целое число). Сравните полученный результат с теоретической моделью в п.1. Оцените погрешность определения n.
3. При φ <<1 или h << L ленту можно считать почти однородно растянутой по дуге окружности. Выведите в этом приближении теоретическое выражение для зависимости h от L, считая заданными: плотность резины ρ**,** модуль Юнга E, ускорение свободного падения g. В пределе малых углов можно использовать следующие приближения:
$$\sin\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6; \ \cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2\ ; \mathrm{tg}\varphi \cong \varphi + \varphi^3/3.$$
Сравните полученную формулу с результатом, полученным в п.2
4. Используя теоретическую зависимость, выведенную Вами в п.3 и результаты, полученные в п.1, определите значение модуля Юнга E. Плотность резины ρ = 1,25 г/см^3, ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. Оцените погрешность определения E.

Оборудование: дюралевый уголок длиной 150 см; два бруска 15х10х3см как опоры; тонкая резиновая лента длиной 140 см и шириной 2-3 см (отрезать от резинового медицинского бинта); два зажима для фиксации ленты на уголке (из гвоздя и кольцевой «денежной» резинки, или короткая деревянная линейка и канцелярская клипса); мерная лента; миллиметровая бумага для построения графиков; скотч.

Время выполнения задания 2 часа 20 минут

Задание 9.1. Плотность провода III

Вам выдан образец одножильного провода длиной L= 600 мм. На половине его длины изоляция удалена. Определите массу, объём и плотность ($m_м$, $V_м$, $\rho_м$) металла, а также массу, объём и плотность ($m_и$, $V_и$, $\rho_и$) изоляции провода.

В процессе решения поставленной задачи используйте провод в качестве рычага и исследуйте зависимость какой-либо длины на рычаге в положении равновесия от массы размещённого на нём груза. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной. Погрешность оценивать не требуется.

Примечание 1. Длина окружности $X = \pi D$, где D – диаметр этой окружности. Площадь круга $S = \pi D^2/4$; $\pi = 3{,}14$.

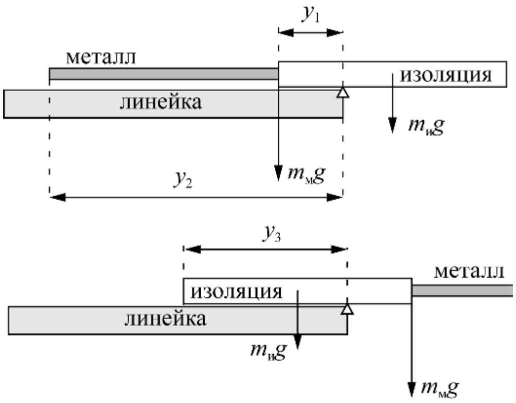
Примечание 2. Изгибать провод запрещено!

Примечание 3. Снимать изоляцию с проволоки категорически запрещено.

Оборудование: образец провода длиной L = 600 мм, линейка 40 см, 2 шприца объёмом 5 мл, и 1 мл; стакан с водой, гибкая трубка, нитка, салфетка, миллиметровая бумага для построения графика.

Указание организаторам: Лучше всего подойдёт медный одножильный провод сечением 2,5 мм^2 в изоляции. Каждому участнику необходимо выдать один **прямой** отрезок провода длиной 600 мм, с половины которого снята изоляция. Длина нитки 20 – 25 см. Провод в изоляции должен вставляться в прозрачную трубку, а трубка надеваться на подыгольный конус шприца. Длина трубки на несколько сантиметров больше половины длины провода, т.е. 33 – 35 см.

Решение. В данном решении использовался медный провод сечением 2,5 мм^2.



1. Определим отношение α = $m_м/m_и$. Для повышения точности сделаем это трижды. Расположим центр тяжести системы провод - изоляция на краю линейки при двух положениях провода и измерим три различных расстояния y_1, y_2, y_3 (рис.1).

Ниже записано правило моментов для каждого измерения, приведены экспериментальные значения y_1, y_2, и y_3, вычислены значения α_1, α_2, α_3 и среднее значение $\alpha = 5{,}83$.

$$m_м y_1 = m_и\left(\frac{L}{4} - y_1\right); \quad \alpha_1 = \frac{m_м}{m_и} = \frac{L}{4y_1} - 1; \quad y_1 = 22\text{мм}; \quad \alpha_1 = 5{,}82$$

$$m_м\left(y_2 - \frac{L}{2}\right) = m_и\left(\frac{3L}{4} - y_2\right); \quad \alpha_2 = \frac{m_м}{m_и} = \frac{\frac{3}{4}L - y_2}{y_2 - \frac{L}{2}}; \quad y_2 = 323\text{мм}; \quad \alpha_2 = 5{,}52$$

$$m_м\left(\frac{L}{2} - y_3\right) = m_и\left(y_3 - \frac{L}{4}\right); \quad \alpha_2 = \frac{m_м}{m_и} = \frac{\left(y_3 - \frac{L}{4}\right)}{\left(\frac{L}{2} - y_3\right)}; \quad y_3 = 279\text{ мм}; \quad \alpha_3 = 6{,}14$$

$$\alpha_{ср} = 5{,}83 \qquad (1)$$

2. На край изоляции провода повесим шприц (рис.2). Массу пустого шприца обозначим m_0. Установим зависимость длины изоляции *X,* расположенной левее центра тяжести системы, от массы воды $m_в$ в шприце. Данные запишем в таблицу.

Табл.1

№	$m_в$, г	*X*, мм	*Z*
1	0	80	0,68
2	1	92	0,72
3	2	100	0,75
4	3	110	0,79
5	4	119	0,83
6	5	127	0,87

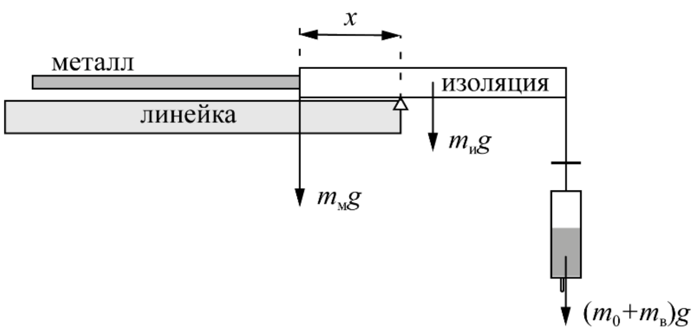


Рис.2

Уравнение моментов для системы провод-шприц

$$m_м X = m_и\left(\frac{L}{4} - X\right) + m_0\left(\frac{L}{2} - X\right) + m_в\left(\frac{L}{2} - X\right) \quad \text{или} \quad \frac{4X}{L} = \frac{m_и + 2m_0 + 2m_в}{m_м + m_и + m_0 + m_в}. \qquad (2)$$

Как видно, зависимость $X(m_в)$ нелинейная. Линеаризуем её. Вычтем 2 из обеих частей уравнения (2), приведём правую часть к общему знаменателю, поменяем знак и приравняем обратные величины получившихся выражений:

$$\frac{1}{2-\frac{4X}{L}} = \frac{m_м+m_и+m_0}{2m_м+m_и} + \frac{1}{2m_м+m_и} m_в \qquad (3)$$

Левая часть равенства (3) является линейной функцией $m_в$. Введём обозначение

$Z = \frac{1}{2-\frac{4X}{L}}$ и занесём значения Z в таблицу. График зависимости $Z(m_в)$ представлен на рис.3.

С учётом (1) и (3) по наклону прямой находим $m_и = 2{,}14$ г, $m_м = 12{,}44$г.

Непосредственное взвешивание разделённых частей провода даёт значения

$m_и = 2{,}09$ г, $m_м = 12{,}57$г.

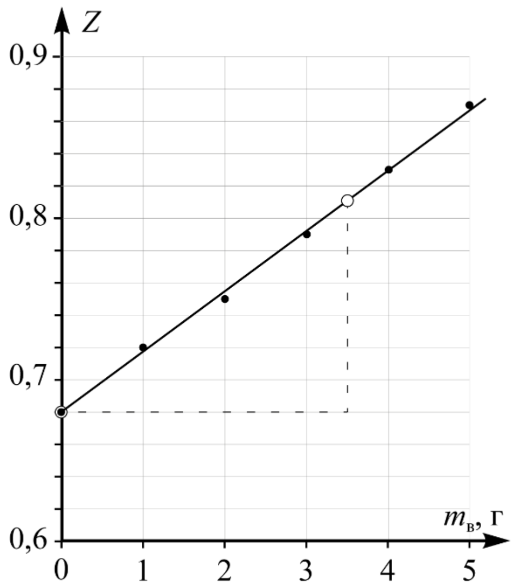


Рис.3

3. Одним из возможных способов измерения диаметра металлической части провода и внешнего диаметра изоляции является прокатывание по линейке. Однако, учитывая длину провода и наличие только одной линейки, реализовать прокатывание с достаточным количеством оборотов (не менее 10) без проскальзывания весьма затруднительно. Тем не менее, использование этого способа при тщательном проведении эксперимента может дать приемлемые результаты, и его тоже следует засчитывать при оценивании работы.

Предлагается измерять объём провода без изоляции и в изоляции путём измерения (при помощи шприца) объёма воды, которая заполняет гибкую трубку с проводом и без провода. В этом случае вычисления диаметров металлической части и изоляции не требуется. Для повышения точности измерений следует использовать инсулиновый шприц объёмом 1 мл.

В табл.2 приведены результаты соответствующих измерений с использованием следующих обозначений:

$V_т$ – объём воды в пустой трубке

$V_{тм}$ – объём воды в трубке с металлической частью провода длиной $L/2$

$V_м$ – объём металла в проводе длиной L

$V_{ти}$ – объём воды в трубке с проводом в изоляции длиной $L/2$

$V_{и\ вн}$ – внешний объём изоляции

$V_и$ – объём изоляции (внешний объём минус объём металла внутри).

Табл.2

$V_т$,см^3	$V_{тм}$,см^3	$V_м$,см^3	$V_{ти}$, см^3	$V_{и\ вн}$, см^3	$V_и$, см^3
2,65	1,92	1,46	0,37	2,28	1,55

Вычисляем плотности:

$\rho_м = \frac{m_м}{V_м} = \frac{12,44}{1,46} = 8,52$ г/см^3, что на 4% отличается от табличной плотности меди, $\rho_и = \frac{m_и}{V_и} = \frac{2,14}{1,55} = 1,38$ г/см^3. Непосредственное измерение плотности изоляции с помощью гидростатического взвешивания даёт результат $\rho_и = 1,33$ г/см^3.

Критерии оценивания:

1. Определено отношение α массы металла к массе изоляции в проводе с точностью не хуже 10% посредством измерения плеч в двух различных положениях равновесия — 1 балл

если отношение определено по результатам однократного измерения, то — 0,5 балла

2. Идея исследования зависимости длины плеч в положении равновесия от массы воды в шприце и описание введённых обозначений — 1 балл

3. Таблица результатов измерения зависимости длины плеч в положении равновесия от массы воды в шприце (указаны физические величины и единицы их измерения). Если нанесено не менее 5 точек, то — 2 балла

если нанесены 2 или 3 точки, то — 1 балл

4. Записана формула исследованной зависимости — 1 балл
5. Выполнена линеаризации исследованной зависимости (введены новые переменные) — 1 балл
6. Построен график линейной зависимости — 2 балла
   - подписаны оси (величины и единицы измерения) — 0,5 балла
   - оформлен масштаб на осях — 0,5 балла
   - правильно нанесены экспериментальные точки — 0,5 балла
   - проведена **прямая** линия — 0,5 балла
7. Из графика определена масса металла (с точностью не хуже 10%) — 1 балл
8. Из графика определена масса изоляции (с точностью не хуже 10%) — 1 балл

   При вычислении масс металла и изоляции путём решения системы необходимого количества уравнений **пункты 5 и 6 не оцениваются**.

9. Измерение объёма металла с помощью гибкой трубки, шприца и воды с точностью не хуже 10% — 1 балл
10. Измерение объёма изоляции с помощью гибкой трубки, шприца и воды с точностью не хуже 10% — 2 балла

Если объёмы определены с указанной точностью методом прокатывания, то пункты 9 и 10 засчитываются полным баллом.

11. Вычисление плотности металла с точностью не хуже 15 % — 1 балл
12. Вычисление плотности изоляции с точностью не хуже 15 % — 1 балл

Задание 9.2. Серый ящик – магазин. С помощью серого ящика, содержащего источник напряжения U_0 и «магазин» сопротивлений (набор пяти резисторов, включённых последовательно) (рис.1), определите величины внутренних сопротивлений R_{A1}, R_{A2} и R_{A3} мультиметра, используемого в качестве амперметра в диапазонах 200 мА, 20 мА, и 2000 мкА. Для выполнения задания исследуйте зависимость силы тока через амперметр от величины сопротивления в цепи его включения. Выведите формулу, связывающую измеренные вами физические величины между собой. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной.

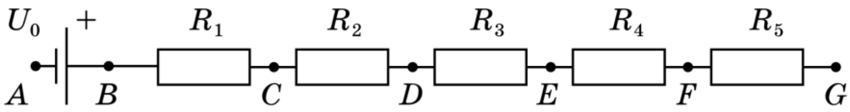


Рис.1

Оборудование: серый ящик; мультиметр; два провода штекер-крокодил, два провода крокодил-крокодил, миллиметровая бумага для построения графиков (3 листа формата А5).

Примечания:

1. Мультиметр в режиме амперметра разрешается подключать только (**строго!!**) к контактам B и C серого ящика.
2. Пользоваться другими режимами мультиметра **можно**.
3. Тщательно продумывайте последовательность своих действий и подробно описывайте их. В случае сжигания предохранителя, находящегося внутри мультиметра, его замена на исправный производиться не будет.
4. Источник напряжения считайте идеальным.
5. Если зависимость какой-либо физической величины Y от другой величины X представляет собой дробь, в числителе которой имеется только одно слагаемое, а в знаменателе несколько слагаемых, то анализ этой зависимости существенно упрощается, если перейти к равенству обратных величин левой и правой части уравнения.

Указание для организаторов. Серый ящик можно собрать в любой коробочке (например, в футляре для зубной щетки). На внешнюю сторону коробочки должно быть выведено 7 контактов (например, винты М3 с гайкой), с обратной стороны к которым через контактный лепесток припаяны резисторы и выводы от держателя обычной пальчиковой батарейки типа АА. Величины сопротивлений примерно следующие: R_1= 5 Ом, R_2= 10 Ом, R_3= 20 Ом, R_4= 40 Ом, R_5= 80 Ом. Контакты на поверхности коробочки должны быть подписаны A, B, C, D, E, F и G – в соответствии со схемой на рис.1.

Приведённые значения резисторов позволяют выполнить задание на мультиметре типа 830B. При наличии мультиметров другого типа может потребоваться корректировка указанных значений. Каждому участнику олимпиады необходимо выдать два провода штекер-крокодил и два провода крокодил-крокодил.

Возможное решение. С помощью мультиметра в режиме омметра определим величины резисторов в сером ящике: R_1= 5 Ом, R_2= 10 Ом, R_3= 20 Ом, R_4= 40 Ом, R_5= 80 Ом.

1. С помощью мультиметра в режиме вольтметра определим напряжение источника: U_0 = 1,55 В.
2. Подключим амперметр к контактам B и C серого ящика, а контакт A соединим с одним из контактов D-G (замкнём цепь). Таким образом, амперметр оказывается подключённым к делителю напряжения по схеме, приведённой на рис.2.

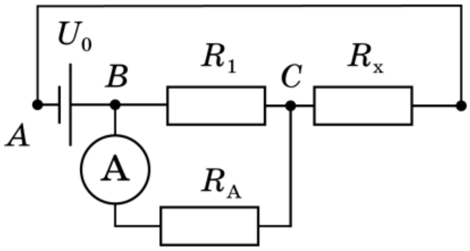


Рис.2

3. Обозначим внутреннее сопротивление амперметра R_A и вычислим, как зависит сила тока I через амперметр от величины сопротивления R_x:

$$I = \frac{U_0}{R_x + \frac{R_1\ R_A}{R_1 + R_A}}\ \frac{R_1}{R_1 + R_A} = \frac{U_0 R_1}{R_x R_1 + R_x R_A + R_1 R_A} \text{ или}$$

$$\frac{1}{I} = \left(\frac{R_1 + R_A}{U_0 R_1}\right) R_x + \frac{R_A}{U_0}. \qquad (1)$$

Видно, что I^{-1} является линейной функцией R_x.

4. Установим на амперметре предел измерения 20 мА. Замыкая проводом контакты серого ящика в различных комбинациях, снимем зависимость I от R_x и вычислим значения I^{-1}. Результаты заносим в таблицу 1.

(табл.1).

R_x, Ом	I, мА	$1/I$, 1/А
150	3,35	299
130	3,88	258
110	4,60	217
90	5,52	181
80	6,18	162
70	7,11	141
50	9,77	102

5. Построим график полученной зависимости. (Рис.3). Из графика находим

$$\left(\frac{R_1+R_A}{U_0R_1}\right)=\frac{\Delta(1/I)}{\Delta R_X}=1{,}94\ \text{В}^{-1}.$$

И, соответственно, $R_A = 10{,}0$ Ом.

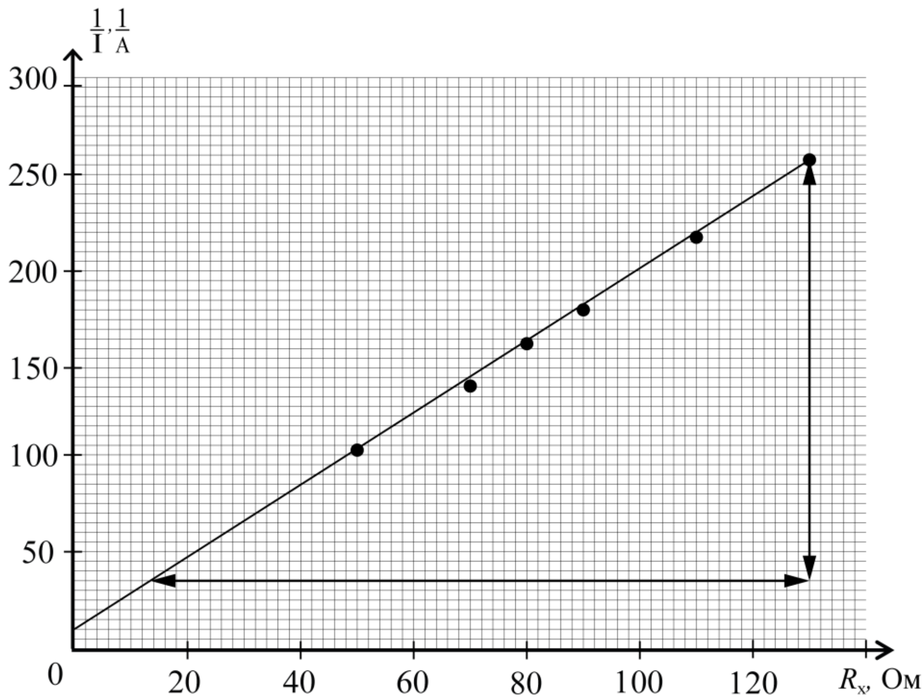


Рис.3

Аналогичным методом на диапазоне 2 мА получаем $R_A = 98$ Ом, а на диапазоне 200 мА получаем $R_A = 1{,}4$ Ом**.** В последнем случае сопротивление амперметра сравнимо с внутренним сопротивлением источника напряжения, которое для щелочной батарейки типа АА составляет величину порядка 0,5 Ом и, следовательно, для более точного определения R_A в диапазоне 200 мА батарейку нельзя считать идеальной.

Находить величину R_A следует именно по наклону прямой, описываемой уравнением (1). Определять эту величину по точке пересечения прямой с вертикальной осью не следует, так как при оптимальном для построения графика масштабе эта точка находится слишком близко к нулю.

Следует также заметить, что особенностью предложенного метода определения R_A является возможность использования одного делителя напряжения для трёх пределов измерения амперметра. Это обусловлено тем, что текущий по делителю минимальный ток порядка 0,01 А на разных диапазонах по-разному распределяется между R_1 и амперметром.

В диапазоне 2 мА через амперметр течёт 4,8% общего тока ($R_A = 98$ Ом), в диапазоне 20 мА – 33% и в диапазоне 200 мА порядка 75-80%. Таким образом удаётся исследовать зависимость I от R_x во всех диапазонах без каких- либо изменений в схеме включения амперметра.

Включение амперметра последовательно с делителем напряжения не даёт возможности определить R_A в диапазоне 2 мА , так как минимальная сила тока в этом случае будет порядка 6 мА, что в 3 раза превышает предел измерения прибора. В диапазонах 20 мА и 200 мА исследование в таком режиме возможно, и оно должно подтверждать полученные результаты.

Критерии оценивания.

1. Измерены величины резисторов в сером ящике (по 0,3 за каждый) — 1,5 балла
2. Измерено напряжение источника U_0 — 0,5 балла
3. Выведена формула зависимости силы тока I от изменяемого сопротивления R_x. — 2 балла
4. Выполнена линеаризация полученной зависимости — 2 балла
5. Исследованы зависимости $I(R_x)$ для 3 режимов (таблицы), по 1 баллу за каждый режим — 3 балла
   если нанесено менее 7 точек в одном режиме – по 0,5 за режим.
6. Построение графиков — 3 балла
   по 1 баллу за каждый график; каждый график оценивается по 4 параметрам:
   - подписаны оси (величины и единицы измерения) — 0,25 балла
   - оформлен масштаб на осях — 0,25 балла
   - правильно нанесены экспериментальные точки — 0,25 балла
   - проведена **прямая** линия — 0,25 балла
7. По угловым коэффициентам прямых на графиках вычислены значения внутренних сопротивлений мультиметра — 3 балла
   R_{A1}, R_{A2} и R_{A3} (за каждый диапазон по 1 баллу).

Примечание. Если линеаризация измеренной зависимости не проведена и графики не построены, но величины R_{A1}, R_{A2} и R_{A3} определены по 2 измерениям с точностью не хуже 10% путём решения систем уравнений, то не оцениваются пункты 4 и 6, а за пункт 5 может быть получено не более 1,5 баллов.

Задание 10.1. Газировка.

Часть 1. (8 баллов). С помощью выданного вам оборудования определите давление воды внутри бутылки газировки. Считайте, что внутри бутылки находится углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. Согласно закону Генри количество газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорционально давлению этого газа $\nu = \alpha VP$, где V – объём жидкости, P – давление газа, $\alpha = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ моль/$\left(\text{Па} \cdot \text{м}^3\right)$ для углекислого газа, растворяемого в воде.

Атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па, комнатную температуру считайте равной $T = 300\ K$, малярная масса углекислого газа $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль.

В первой части работы оценивать погрешность не нужно.

Часть 2. (7 баллов). С помощью выданного Вам оборудования проверьте справедливость закона Генри, получив три точки для зависимости количества растворённого газа от давления: одну - при атмосферном давлении, вторую - при давлении больше атмосферного и третью - при давлении меньше атмосферного. Подробно опишите Ваши действия и вычислите значение коэффициента α, сравнив его с данным в условии.

Оборудование: две бутылки с газированной водой, стаканчик, шприц объёмом 20 мл, затычка для шприца, салфетки для поддержания чистоты рабочего места.

Примечания:

1) Рекомендуем одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итогового. Не рекомендуем трясти бутылку перед тем, как её открывать.

2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в равновесное состояние за относительно длительное время, но если воду перемешивать или взбалтывать, то равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее.

Возможное решение

Часть 1. Откроем бутылку и аккуратно наберём из неё некоторое количество газировки в пустой шприц (около 5 мл). Сразу же заткнём кончик шприца затычкой. Поскольку бутылка была только что открыта, концентрация растворённого в ней углекислого газа соответствует давлению внутри бутылки (так как концентрация изменяется медленно).

Теперь будем трясти шприц, помогая растворённому газу перейти в газообразное состояние, при этом поршень шприца должен иметь возможность свободно перемещаться, обеспечивая равенство давления внутри шприца атмосферному.

Спустя некоторое время (около 10 минут) концентрация растворённого углекислого газа придёт в соответствие атмосферному давлению, а его газообразные излишки соберутся над водой.

Для воды в бутылке: $\nu_0 = \alpha V_в P_{бут}$, где $V_в$ – объём воды, набранной в шприц, $P_{бут}$ – давление газа в бутылке, ν_0 – количества газа, растворённого в воде внутри бутылки.

Для воды в шприце после достижения равновесия: $\nu_0 - \nu_г = \alpha V_в P_0$, где $\nu_г$ – количество нерастворённого углекислого газа в шприце.

Запишем уравнение состояния идеального газа: $P_0 V_г = \nu_г RT$, где $V_г$ – объём нерастворённого газа в шприце.

Из записанных выше уравнений получим: $\alpha V_в P_{бут} - \frac{P_0 V_г}{RT} = \ \alpha V_в P_0$, откуда

$$P_{бут} = P_0 (1 + \frac{V_г}{\alpha V_в RT}).$$

Измерения:

$V_в = 4$ мл, $V_г = 6$ мл

$$P_{бут} = P_0 \left(1 + \frac{V_г}{\alpha V_в RT}\right) = 10^5 \left(1 + \frac{6}{3{,}5 \bullet 10^{-4} \bullet 4 \bullet 8{,}31 \bullet 300}\right) = 2{,}7 \bullet 10^5 \text{ Па}.$$

Часть 2. Для получения дополнительных точек зависимости количества растворённого газа от давления будем внутри шприца создавать другие давления. (Содержимое шприца осталось от первого эксперимента). Придерживая наконечник шприца, надавим на поршень с заметным усилием, и будем потряхивать шприц около 10 минут, добиваясь равновесной концентрации растворённого газа. Затем определим объём, занимаемый газом, продолжая также давить на поршень. Обозначим его $V_г'$. Теперь аккуратно отпустим поршень и измерим объём газа под поршнем сразу же после этого; обозначим его $V_г$.

Так как между замерами $V_г'$ и $V_г$ прошло мало времени, то концентрация растворённого в воде газа не успела измениться. Давление газа под сжатым поршнем можем получить из уравнения состояния идеального газа. $P = P_0 \frac{V_г}{V_г'}$.

Согласно закона Генри $\nu = \alpha V_в P$, тогда $\Delta \nu = \alpha V_в \Delta P$.

Для нашего опыта $\Delta P = P - P_0 = P_0 (\frac{V_г}{V_г'} - 1)$, а $\Delta \nu = -\Delta \nu_г = -P_0 \frac{(V_г - V_{г_0})}{RT}$, где $V_{г_0}$ – объём газа под поршнем при атмосферном давлении и при концентрации растворённого газа, соответствующей атмосферному давлению.

Подставив в закон Генри получим: $-P_0\frac{(V_г - V_{г0})}{RT} = \alpha V_в P_0(\frac{V_г}{V_г'} - 1)$

$$\frac{V_г}{V_в} = \alpha RT\left(1 - \frac{V_г}{V_г'}\right) + V_{г0}$$

$$V_г = -\alpha RTV_в\frac{V_г}{V_г'} + const$$

Проведём аналогичный опыт, только теперь будем вытягивать поршень шприца, создавая под ним давление меньше атмосферного.

Построим график зависимости $V_г$ от $\frac{V_г}{V_г'}$ для трёх точек (атмосферному давлению соответствует точка $(V_{г0}; 0)$)

$V_г$, мл	$V_г'$, мл	$\frac{V_г}{V_г'}$	$\Delta V_г$, мл	$\Delta\frac{V_г}{V_г'}$
3,5	2,0	-0,75	0,5	0,69
6,0		0,00	0,5	0,10
8,0	16,0	0,50	0,5	0,05

Убедимся, что три точки лежат на прямой и определим угловой коэффициент этой прямой k = – 3,58 мл.

Из полученной теоретической зависимости

$\alpha = -\frac{k}{V_в RT} = \frac{3{,}58}{4 \bullet 8{,}31 \bullet 300} = 3{,}6 \bullet 10^{-4}\,\frac{моль}{Па \bullet м^3}$

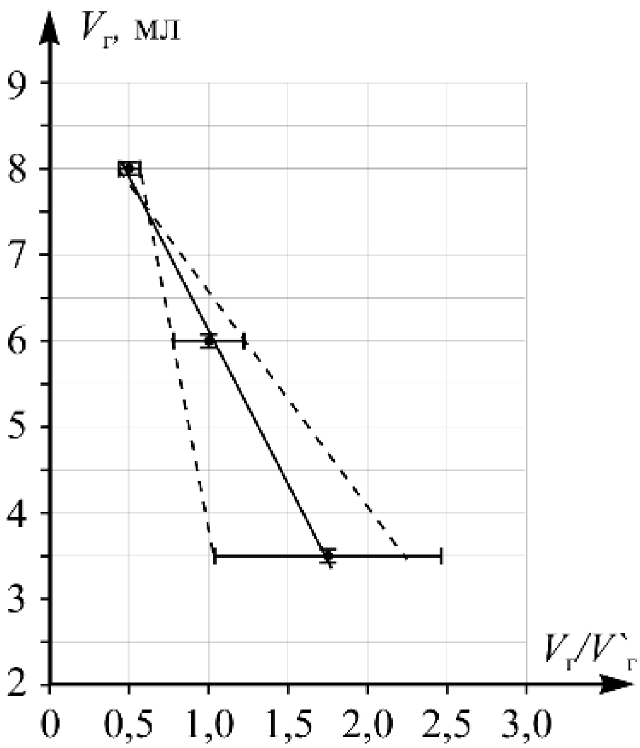
Оценим погрешность.

$$\Delta\frac{V_г}{V_г'} = \frac{V_г}{V_г'}\left(\frac{\Delta V_г}{V_г} + \frac{\Delta V_г'}{V_г'}\right)$$

Погрешность коэффициента k определим из графика по разнице между минимальным и максимальным угловыми коэффициентами.

$$\Delta k = \frac{8{,}2 - 2{,}7}{2} = 2{,}7\text{ мл}$$

$$\varepsilon\alpha = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta V_в}{V_в} = 87\%$$



Учитывая теоретическую погрешность α, можно утверждать, что теоретическое значение соответствует экспериментальному.

Критерии оценивания

1	Предложена идея, позволяющая определить изменение количества растворённого газа при изменении давления. *(Если в предложенном методе часть воды из шприца удаляется, и невозможно проконтролировать сколько углекислого газа уходит вместе с водой, то за метод ставится максимум 1 балл)*	3 балла
2	Выполнены необходимые измерения, и они соответствуют реальности	1 балл
3	Контроль достижения равновесной концентрации. В работе явно указано, каким образом учащийся контролировал, что концентрация растворённого газа достигла равновесного состояния.	1 балл
4	Выведена теоретическая формула для определения давления внутри бутылки	1 балл
5	Для контрольного эксперимента была открыта новая бутылка воды и это явно указано в работе	1 балл
6	Получен корректный результат для давления внутри бутылки. *(Правильное значение и допустимы разброс зависят от оборудования на местах)*	1 балл
7	Предложена рабочая идея, позволяющая измерять количество растворённого газа при давлении большем, чем атмосферное	1,5 балла
8	Предложена рабочая идея, позволяющая измерять количество растворённого газа при давлении ниже атмосферного	1,5 балла
9	Выполнены необходимые измерения	1 балл
10	Построен график для проверки линейности зависимости (на графике подписаны оси, нанесена шкала, присутствуют экспериментальные точки и сглаживающая кривая)	1 балл
11	Получено значение α	1 балл
12	Оценена погрешность α и сделан вывод о соответствии теоретическому значению. *(Если нет оценки погрешности, то вывод не засчитывается.)*	1 балл

Требования к оборудованию:

1) Бутылки с газированной водой: две бутылки с минеральной **газированной** водой, объёмом 0,5-0,6 литра, невскрытые. Выдаются участникам при комнатной температуре. Также важно обеспечить минимальное взбалтывание воды. В идеале следует расставить её на рабочие места с вечера и дать отстояться до начала тура. Хорошие результаты получаются с «Аква минерале», но подойдет и другая (лучше без вкусовых добавок). **Каждому участнику выдаются новые бутылки!!!**

2) Шприц 20 мл с ценой деления 1 мл, **обязательно с резиновым поршнем**. Поршень внутри шприца должен перемещаться с небольшим трением. Для проверки наберите в шприц воздух примерно на половину объёма шприца, заткните отверстие и надавите на

поршень. После прекращения давления поршень должен возвращаться в исходное состояние. Также поршень не должен пропускать воздух, если давление внутри шприца больше или меньше атмосферного примерно в 2 раза. Шприц выдается без иглы. **Допускается повторное использование шприца, но лучше иметь запас на случай порчи оборудования предыдущим участником.**

3) Затычка на шприц. Затычка должна надежно надеваться на носик шприца и обеспечивать его герметичность при давлении внутри шприца отличающемся в 2 раза от атмосферного (как в большую, так и в меньшую сторону). Можно изготовить затычку из иглы, идущей в комплекте. Для этого нужно отломать металлическую иголку от пластмассового основания и загерметизировать отверстие иглы. (Например, залить внутрь пластмассового наконечника небольшое количество влагостойкого клея). При этом наконечник должен иметь возможность плотно надеваться на носик шприца. ВАЖНО!!! Проверьте герметичность ваших наконечников при давлениях внутри шприца от $2P_{\text{атм}}$ до $0{,}5P_{\text{атм}}$, так как герметичность наконечника очень важна в этой задаче. **Допускается повторное использование затычки, но лучше иметь запас на случай порчи оборудования предыдущим участником.**

4) Стакан. Любой стакан, например, пластиковый на 200 г. **Допускается повторное использование стакана.**

5) Салфетки. 2-3 бумажные салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Задание 10.2. Сосчитай шарики.

В прямоугольной запечатанной непрозрачной коробочке находится некоторое количество шариков. Определите их количество.

Толщиной стенок непрозрачной коробочки и её массой можно пренебречь. Считайте, что все шарики одинаковые как внутри прозрачной, так и внутри непрозрачной коробочек. Прозрачная коробочка выдана вам для качественного понимания процессов, происходящих внутри непрозрачной коробочки, её нельзя использовать в качестве оборудования, но вы можете ссылаться на качественные результаты экспериментов с прозрачной коробочкой. Также вы можете извлекать из прозрачной коробочки шарики и проводить с ними необходимые опыты.

ВАЖНО!!! Вскрывать непрозрачную коробочку и получать доступ к её содержимому запрещается! Также предложенный вами метод должен работать и для коробочек с жёсткими стенками, иначе он будет оценён в 0 баллов.

При написании отчёта уделите особое внимание описанию ваших действий, особенно тех, которые направлены на увеличение точности измерений и пояснениям как именно эти действия позволяют увеличить точность измерений.

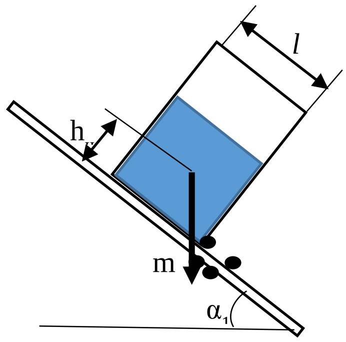
Примечание. Объём шара равен $V_{\text{Ш}} = \pi D^3 / 6$, где D – диаметр шара.

Оборудование: непрозрачная коробочка, две линейки, канцелярская скрепка, прозрачная коробочка, лист миллиметровки формата А5.

Возможное решение.

1. Проведём опыты с прозрачной коробочкой. Так как находящееся внутри неё пшено является сыпучим веществом, то можем заметить, что при наклоне коробочки до некоторого угла пшено сохраняет занимаемую им форму, а после превышения предельного угла пшено лавинообразно пересыпается. Заметим, что, если коробочку установить под некоторым углом и интенсивно постучать по боковым стенкам, создав вибрацию, то поверхность пшена оказывается параллельна горизонту.

Также заметим, что если стучать по коробочке вертикально, то поверхность пшена не всегда оказывается параллельна горизонту.



2. Расположим непрозрачную коробочку вертикально и постучим по её боковым стенкам, тогда пшено расположится так, что примет форму параллелепипеда. Установим коробочку на линейку и начнём плавно увеличивать угол наклона линейки к горизонту. Нам нужен угол, при котором коробочка начнёт переворачиваться. Мы сталкиваемся с проблемой, что коробочка начинает соскальзывать с линейки раньше, чем переворачивается, так как трения о линейку недостаточно. Для решения проблемы прицепим к линейке скрепку так, чтобы она образовала небольшой упор (на рисунке скрепка схематично обозначена четырьмя чёрными кружочками). Так как скрепка тонкая, то созданный ею упор не повлияет на моменты сил, но позволит коробочке не соскальзывать.

3. Повторим опыт с наклоном плоскости и убедимся, что коробочка начинает переворачиваться до того, как пшено внутри неё начинает пересыпаться. Это можно понять двумя способами:

1) по звуку (когда пшено пересыпается, это слышно);

2) использовать прозрачную коробочку и наклонить её на такой же угол.

Для угла, при котором начинается переворот коробочки, из уравнения моментов сил относительно правого нижнего угла коробочки получим: $h_{\text{цм}} = \frac{l}{2} \cdot \text{ctg}\alpha_1$.

Тогда уровень пшена в коробочке составляет $h = 2h_{\text{цм}} = l \cdot \text{ctg}\alpha_1$.

Измерим ширину l и глубину b коробочки. $l = 47$ мм, $b = 39$ мм.

Угол α_1 определим через высоту конца линейки над столом H и длину линейки L.

Для повышения точности проведём опыты несколько раз. Очень важно увеличивать угол наклона плавно и медленно, не создавая вибрации и толчков, из-за которых коробка может начать раньше опрокидываться. $L = 25$ см.

№	H, см	$\sin\alpha_1$	$\text{ctg}\alpha_1$
1	11,1	0,430	2,10
2	10,6	0,411	2,22
3	10,8	0,419	2,17

$$\text{ctg}\alpha_{1_{\text{ср}}} = 2,16$$

$$h = l \bullet \text{ctg}\alpha_{1_{\text{ср}}} = 10,2 \text{ см}$$

4. Теперь мы знаем объём, занимаемый пшеном в коробке:

$$V = lbh = 4{,}7 \cdot 3{,}9 \cdot 10{,}2 = 187\ \text{см}^3.$$

5. Для того, чтобы узнать сколько шариков входит в этот объём, есть два варианта:

   1) измерить объём, занимаемый пшеном в прозрачной коробочке, и посчитать количество шариков (крупинок) в ней;

   2) определить диаметр шарика и рассчитать плотность упаковки.

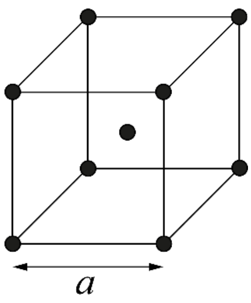
6. Выберем второй путь. Для измерения диаметра шарика выложим 50 шариков в ряд и измерим длину ряда. Для формирования ряда можно согнуть миллиметровку и затем насыпать шарики в место сгиба.

Длина ряда $L_\text{р} = 10{,}9$ см, количество шариков $N = 50$ шт, тогда диаметр шарика:

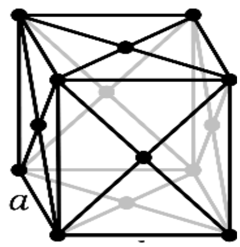
$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{L_p}}{N} = 2{,}18\ \text{мм}.$$

Объём одного шарика $V_\text{ш} = V_\text{ш} = \frac{\pi}{6}D^3 = 0{,}54\ \text{мм}^3$.

7. Можно рассмотреть разные варианты плотной упаковки.



1) Объёмно-центрированная кубическая решётка: элементарной ячейкой является куб, в каждой из вершин которого находится центр зерна, и ещё у одного центр совпадает с центром куба. Найдём плотность упаковки такой решётки: $k = \frac{V_0}{V_\text{я}}$, где $V_0 = NV_\text{з}$ – объём, занимаемый зёрнами, N – число зёрен, приходящихся на одну ячейку, $V_\text{я} = a^3$ - объём ячейки. Ребро куба a можно связать с диаметром зерна: $a\sqrt{3} = 2D$ (на большой диагонали куба укладывается два диаметра зерна). N подсчитаем таким образом: каждое из 8 зёрен, центры которых находятся в вершинах куба, принадлежит 8 соседним ячейкам, поэтому на каждую ячейку приходится по 1/8 зерна, и ещё одно зерно находится в центре куба: $N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$.



После подстановки $k = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}68$.

2) Гранецентрированная решётка. Атомы находятся в вершинах куба и на серединах всех граней. В этом случае:

$a\sqrt{2} = 2D$, $N = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$, $k = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0{,}74$.

3) Стандартная кубическая решётка. $a = D$, $N = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$, $k = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$.

При решении задачи можно было взять любой из вариантов. Опыт, проведённый с заполнением пустот между зёрнами водой, показывает, что в реальности $k = 0{,}62$.

8. Примем $k = 0{,}6$. Объём занимаемый одним зёрнышком, равен $V'_\text{ш} = \frac{V_\text{ш}}{k} = 0{,}90\ \text{мм}^3$.

9. Тогда количество шариков равно $\mathrm{N_ш} = \frac{V}{V'_\text{ш}} = 2 \cdot 10^5$.

10. Оценим погрешность: $\Delta \mathrm{ctg}\alpha_{1\,\text{ср}} = \frac{\sum |ctg\alpha_i - ctg\alpha_\text{ср}|}{3} = 0{,}04$; $\Delta D = \frac{2\text{мм}}{N} = 0{,}04$ мм; $\Delta k = 0{,}1$

у$\varepsilon N_\text{ш} = 3\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} = 0{,}27$; $y\Delta N_\text{ш} = N_\text{ш} \bullet \varepsilon N_\text{ш} = 0{,}5 \cdot 10^5$.

Окончательно: $\mathrm{N_ш} = (2{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^5$

Критерии оценивания:

1	Идея определения количества зёрен через центр масс коробочки	2 балла
2	Выбран и описан правильный способ обеспечения формы, занимаемой пшеном внутри коробочки	1 балл
3	Решена проблема соскальзывания коробочки с линейки	1 балл
4	Указано, что при угле опрокидывания коробочки зерно не пересыпается	1 балл
5	Выполнены измерения угла опрокидывания коробочки. 3 и более измерений – 3 балла, если одно измерение, то 1 балл	3 балла
6	Определён диаметр шарика с точностью не хуже 0,1 мм – 2 балла, если точность не хуже 0,4 мм, то 1 балл; иначе – 0 баллов	2 балла
7	Рассчитана плотность упаковки (разумное значение в интервале от 0,5 до 0,75)	2 балла
8	Получено количество шариков	2 балла
9	Оценка погрешности	1 балл

Примечание: Если вместо расчёта плотности упаковки подсчитывается количество шариков в некотором объёме, то за пункты 6 и 7 баллы ставятся следующим образом: если число посчитанных зёрен более 150, то полный балл, если равно или более 50, то по 1 баллу за каждый пункт, если менее 50, то 0 баллов.

Требования к оборудованию.

1) Непрозрачная коробочка с зерном – изготавливается из пакета сока. Высота пакета: 11-13 см, размеры основания пакета: 4-5 см, форма пакета – параллелепипед. Пакет аккуратно вскрывается сверху по шву, содержимое выливается, пакет промывается и высушивается. После этого внутрь засыпается пшено. Объём пшена должен составлять примерно ¾ от объёма пакета, и **количества зерна во всех пакетах должно быть одинаковым**. Затем пакет запечатывается и заклеивается с помощью скотча так, чтобы участники не могли получить доступ к его содержимому.

2) Две деревянные линейки – длиной 25 см, в сечении – прямоугольные. Толщина линейки должна быть около 2 мм, чтобы, с одной стороны, она мало прогибалась под весом пакета, с другой стороны - на неё можно было надеть канцелярскую скрепку.

3) Канцелярская скрепка – обычная, без пластикового покрытия, среднего размера. Скрепка должна надеваться на линейку и держаться на ней.

4) Прозрачная коробочка с зерном – изготавливается из прозрачной коробочки из-под драже «тик-так» или аналогичной. Содержимое коробочки удаляется и внутрь неё насыпается то же самое пшено. примерно на половину объёма. У детей должна быть возможность доступа к пшену, насыпанному в коробочку (крышку заклеивать не нужно).

5) Лист миллиметровки формата А5.

ВАЖНО!!! Если поставить упаковку из-под сока с пшеном на линейку (пшено должно занимать форму параллелепипеда) и начать её наклонять, то коробочка должна начать соскальзывать с линейки до того, как начнёт переворачиваться. При этом, если коробочку пытаться перевернуть на горизонтальной поверхности, то она должна начинать переворачиваться до того, как зерно внутри начнёт пересыпаться.

Задание 11.1. «Газировка (II)». Некоторые газы хорошо растворяются в жидкостях. Например, углекислый газ прекрасно растворяется в воде, что используется при приготовлении всем хорошо знакомой газировки. При постоянной температуре и не слишком больших давлениях количество газа, растворённого в жидкости, прямо пропорционально парциальному давлению этого газа над жидкостью (закон Генри)

$$\nu = \alpha V p.$$

Здесь V – объём жидкости, p – парциальное давление газа, α – коэффициент, зависящий от температуры и измеряемый в $\text{моль}/\left(\text{Па}\cdot\text{м}^3\right)$.

1. Убедитесь, что сила трения поршня о стенки корпуса шприца мала по сравнению с силой атмосферного давления на поршень. Опишите, как вы это сделали.
2. Определите давление газа в бутылке газированной воды.
3. Определите величину α для углекислого газа и воды при комнатной температуре.

Считайте, что внутри бутылки находятся углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. При аккуратном открытии бутылки (не трясите её и не взбалтывайте перед этим!) за малый промежуток времени изменение концентрации газа в растворе незначительно.

Оборудование: 1) две бутылки минеральной газированной воды; 2) шприц 20 мл; 3) заглушка на шприц; 4) одноразовый стакан 200 мл; 5) одноразовая пластиковая тарелка и салфетки для поддержания рабочего места в чистоте.

Примечания:

1) Рекомендуется одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итоговых. Не рекомендуется трясти бутылку перед тем, как её открывать.
2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в равновесное состояние за относительно длительное время, но, если воду перемешивать или взбалтывать (в закрытой бутылке), равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее (несколько минут).

Постарайтесь работать аккуратно, чтобы не облить себя и соседей, не залить водой рабочее место! Одноразовая посуда и салфетки выданы Вам для поддержания рабочего места в порядке.

Возможное решение. Силу трения поршня о стенки можно считать несущественной по сравнению с силой давления газа на поршень. В этом можно убедиться, сжимая воздух в пустом шприце, закрытом заглушкой.

Откроем бутылку и аккуратно наберём из неё некоторое количество газировки в пустой шприц (около 5 мл). Сразу же заткнём кончик шприца заглушкой. Поскольку бутылка была только что открыта, то концентрация растворённого в ней углекислого газа соответствует давлению внутри бутылки.

Будем встряхивать шприц, чтобы ускорить переход системы в равновесное состояние. При этом поршень шприца должен иметь возможность свободно перемещаться, обеспечивая равенство давления внутри шприца атмосферному давлению p_0. Газ, растворённый в воде, выделяется в газовую фазу при давлении, равном p_0, и объём под поршнем увеличивается на величину объёма газа $V_г$ (рис.1).

Спустя некоторое время (5 – 10 минут) установится равновесное состояние, при котором количество растворённого углекислого газа будет соответствовать p_0, а давление углекислого газа под поршнем равно p_0.

Для порции воды, набранной в шприц из бутылки, $\nu_0 = \alpha V_В p$, где $V_В$ – объём воды, набранной в шприц, ν_0 – количество растворённого в ней газа, p_0 – давление газа в бутылке. После установления равновесия в воде в растворённом виде находится $\nu_в = \alpha V_В p_0$ моль газа, в газовой фазе $\nu_Г = \dfrac{V_Г p_0}{RT}$. Приравнивая $\nu_0 = \nu_В + \nu_Г$, получаем:

$$\alpha V_В p = \alpha V_В p_0 + \frac{V_Г p_0}{RT},$$

откуда

$$\alpha = \frac{V_Г p_0}{RTV_В\left(p - p_0\right)}.$$

Повторим измерения несколько раз, в каждом случае аккуратно открывая и тут же закрывая бутылку.

Теперь определим давление углекислого газа в бутылке. Эту процедуру лучше проделывать после предыдущих измерений с набором воды в шприц, чтобы минимизировать потери газа. Для этого выдвинем поршень шприца в положение 20 мл, установим заглушку и аккуратно поместим шприц внутрь бутылки с водой, сразу закрыв пробку бутылки. Встряхивая бутылку, периодически наблюдаем за положением поршня в шприце. Через некоторое время (5 – 10 минут) в бутылке установится равновесное давление p, а объём воздуха в шприце уменьшится от первоначального значения $V_1 = 20$ мл, до некоторого значения $V_2 = V_1 p / p_0$ (рис.2).

Отсюда $p = p_0 V_1 / V_2$.

Отметим, что при выполнении части работы, связанной с помещением шприца в бутылку, потери газа становятся заметными (по нашим данным давление при повторных измерениях уменьшается примерно на 5% при каждом последующем измерении), поэтому это измерение есть смысл с учётом ограниченного количества бутылок выполнять однократно.

Приведём результаты, полученные нами при использовании бутылки (0,5 л) минеральной воды «Aqua minerale»: $V_1 = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ мл, $V_2 = (7{,}0 \pm 0{,}5)$ мл, $p = (2{,}85 \pm 0{,}25)$ атм.

Измерения объёма газа под поршнем с целью определения α: T = 298K,

№	$V_в$, мл	$V_г$, мл	α, *моль* / (*Па* · *м*^{3})
1	6	10,5	$3{,}8 \cdot 10^{-4}$
2	6	10,5	$3{,}8 \cdot 10^{-4}$
3	7	11,0	$3{,}4 \cdot 10^{-4}$
4	5	8,5	$3{,}7 \cdot 10^{-4}$
5	7,5	12,5	$3{,}7 \cdot 10^{-4}$

Оценка систематической погрешности определения α:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta V_Г}{V_Г}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_В}{V_В}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(p-p_0)}{(p-p_0)}\right)^2} \approx 0{,}15.$$

Случайная погрешность для α по данным таблицы: $\Delta\alpha \approx 0{,}15 \cdot 10^{-4}$ моль/(Па · м^3)

Окончательно $\alpha = (3{,}7 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-4}$ моль/(Па · м^3).

Критерии оценивания

1. Предложен и реализован метод проверки малости силы трения поршня о стенки шприца — 1 балл
2. Предложена идея метода определения давления газа в бутылке — 2 балла

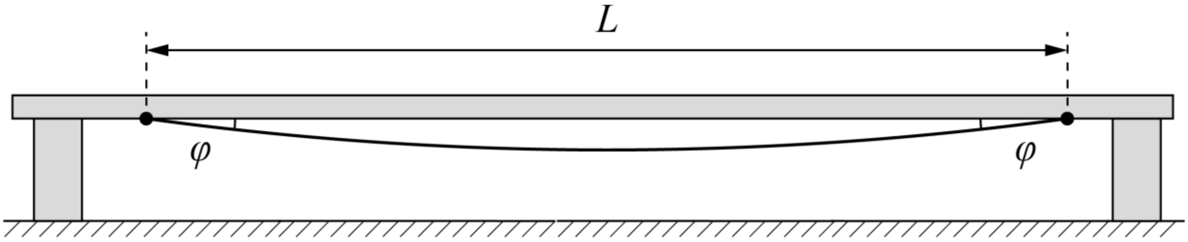
***Примечание**: кроме авторского, возможны иные способы определения давления, связанные с анализом формул, линеаризацией зависимостей и т.д. Большинство таких методов не позволяют получить хорошую точность, и идея такого метода оценивается в 1 балл.*

3. Проведены эксперименты по определению давления газа по предложенному методу и получены численные результаты — 1 балл
4. Результат определения давления в бутылке отличается от результатов контрольных экспериментов, проведённых членами жюри, не более, чем
   а) на 15% — 2 балла
   б) на 15-30% — 1 балл
5. Проведена разумная оценка систематической погрешности определения давления — 0,5 балла
6. Предложен и доведён до формул осуществимый метод определения коэффициента α — 2 балла
7. Проведено достаточное количество измерений для реализации п.6
   а) не менее пяти — 3 балла
   б) не менее трёх — 2 балла
   в) одно измерение — 1 балл
8. При обработке экспериментальных данных по п.7 получено значение α в пределах
   а) $(3{,}5 \pm 0{,}5)\cdot 10^{-4}$ моль/$(\text{Па}\cdot\text{м}^3)$ — 3 балла
   б) $(3{,}5 \pm 1{,}0)\cdot 10^{-4}$ моль/$(\text{Па}\cdot\text{м}^3)$ — 2 балла
   в) $(3{,}5 \pm 2{,}0)\cdot 10^{-4}$ моль/$(\text{Па}\cdot\text{м}^3)$ — 1 балл
9. Проведена разумная оценка погрешности определения α — 0,5 балла

Требования к оборудованию:

1) Бутылки с газированной водой: две бутылки с минеральной **газированной** водой, объёмом 0,5 литра, невскрытые. Выдаются участникам при комнатной температуре. Также важно обеспечить минимальное взбалтывание воды. В идеале надо расставить её на рабочих местах с вечера и дать отстояться до начала тура. Хорошие результаты получаются с «Аква минерале», но подойдёт и любая другая вода без сахара. Необходимо проверить, что размеры пустой бутылки позволяют поместить внутрь шприц с полностью выдвинутым поршнем. **Этикетки с бутылок необходимо удалить!**!! **Каждому участнику выдаются новые бутылки!!!**
2) Шприц 20 мл с ценой деления 1 мл, **обязательно с резиновым поршнем**. Поршень внутри шприца должен перемещаться с небольшим трением. Для проверки наберите в шприц воздух примерно на половину объёма шприца, заткните отверстие и надавите на поршень. После прекращения давления поршень должен возвращаться в исходное состояние. Также поршень не должен пропускать воздух, если давление внутри шприца больше или меньше атмосферного примерно в 3 раза. Шприц выдаётся без иглы. На корпусе шприца должны быть нанесены хорошо читающиеся деления. **ВАЖНО!!!** Упоры для пальцев на корпусе шприца необходимо аккуратно обрезать острым ножом так, чтобы шприц с выдвинутым поршнем (без иглы!) полностью помещался внутрь пустой бутылки. **Допускается повторное использование шприца, но лучше иметь запас на случай порчи оборудования предыдущим участником.**
3) Заглушка на шприц. Изготавливается из иглы, идущей в комплекте. Нужно отломить металлическую иголку от пластмассового основания (канюли) и загерметизировать канюлю. Для герметизации можно затолкать и уплотнить с помощью зубочистки или спички небольшое количество пластилина или жевательной резинки. Подготовленная таким образом канюля должна плотно надеваться на носик шприца. **ВАЖНО!!!** Проверьте герметичность заглушки при давлениях внутри шприца от $3P_{\text{атм}}$, так как герметичность принципиальна в этой задаче. **Допускается повторное использование затычки, но лучше иметь запас на случай порчи оборудования предыдущим участником.**
4) Одноразовые стакан, нож и тарелка. Подойдут любые из наборов пластмассовой посуды, продающихся в магазинах. Однако, тарелки лучше выбрать большого размера. Стакан и тарелка используются для поддержания рабочего места в чистоте, нож – для удаления этикетки с бутылок.
5) Салфетки. Лучше использовать бумажные салфетки в рулоне. Каждому участнику выдаётся 3-4 салфетки для поддержания рабочего места в чистоте. Необходимо иметь достаточный запас салфеток у дежурных по аудитории (примерно, рулон на 10 человек).

Задание 11.2. Упругая лента. Изгиб подвешенной за концы резиновой ленты определяется при равновесии упругих сил и силы тяжести. Для растянутой ленты, линейную плотность которой можно считать постоянной, её натяжение $T = ES\Delta L/L$, , где E модуль Юнга, S и L площадь сечения и длина ленты в нерастянутом виде, ΔL её удлинение. Закрепим концы ленты на одной горизонтали на расстоянии, равном её длине L в нерастянутом виде (рис.1). Провисшая под собственным весом лента образует с горизонталью некоторый угол φ, а середина ленты ниже этой горизонтали на некоторое расстояние h, называемое стрелой прогиба.



ЗАДАНИЕ

1. При помощи предложенного оборудования, измерьте стрелы прогиба h не менее чем для 10 значений длины ленты в **ненатянутом виде** L в диапазоне от 30 до 120 см. Результаты представьте в виде таблицы и графика $h(L)$.
2. Используя полученные вами в п.1 экспериментальные результаты, считая, что $h = A \cdot L^n$, при использовании графической обработки, определите значение n (n – не обязательно целое число). Сравните полученный результат с теоретической моделью по п.1. Оцените погрешность определения n.
3. При φ <<1 или h << L можно считать, что лента имеет постоянную линейную плотность и растянута по дуге окружности. Выведите в этом приближении теоретическое выражение для зависимости h от L, считая заданными: плотность резины ρ**,** модуль Юнга E, ускорение свободного падения g. В пределе малых углов можно использовать следующие приближения:

$$\sin\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6;\ \cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2\ ;\ \mathrm{tg}\varphi \cong \varphi + \varphi^3/3.$$

Сравните полученную формулу с результатом, полученным в п.2

4. Используя теоретическую зависимость, выведенную Вами в п.3 и результаты, полученные в п.1, определите значение модуля Юнга. Плотность резины ρ = 1,25 г/см^3, ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2. Оцените погрешность определения E.

Оборудование: дюралевый уголок длиной 120 см; два бруска 15х10х3 см как опоры; тонкая резиновая лента длиной 120 см и шириной 2-3 см (отрезать от резинового медицинского бинта); два зажима для фиксации ленты на уголке (из гвоздя и кольцевой «денежной» резинки, или короткая деревянная линейка и канцелярская клипса); мерная лента; миллиметровая бумага для построения графиков; скотч.

Возможное решение. Под длиной резиновой ленты понимается длина её участка между фиксирующими зажимами. С помощью мерной ленты размечается уголок и резиновая лента, положенная сверху на горизонтальную или даже наклонную поверхность уголка. После фиксации зажимами уголок поворачивают так, чтобы резиновая лента могла свободно провисать от горизонтальной поверхности. К другой стороне уголка (вертикальной) прикрепляем скотчем миллиметровую бумагу, и для указанных значений L измеряем стрелу прогиба.

Результаты измерений вносим в таблицу, с дополнительными столбцами для дальнейшей обработки.

2. Строим график зависимости $\ln h(\ln L)$. По угловому коэффициенту определяем величину n. С учётом разброса экспериментальных данных с помощью этого же графика оцениваем погрешность определения n.

3. При $\varphi \ll 1$ или $h \ll L$ можно считать, что лента имеет постоянную линейную плотность и растянута по дуге окружности некоторого радиуса R. Раз горизонтальная проекция натяжения неизменна, то $T\cos\varphi = T_o$, где T_o натяжение в нижней точке, а T натяжение вблизи точки подвеса. Отсюда для малого φ имеем $T \cong T_o$.

Из равновесия по вертикали $2T\sin\varphi = \rho gLS$, а тогда $T \cong \rho gLS/2\varphi$.

Относительное удлинение $\Delta L/L = 2R(\varphi - \sin\varphi)/2R\sin\varphi \cong \varphi^2/6$.

После подстановок из $T = ES\Delta L/L$ находим для модуля Юнга $E = 3\rho gL/\varphi^3$.

Так как $h = R(1 - \cos\varphi)$, а $L = 2R\sin\varphi$, то $\varphi = 4h/L$, а $E = 3\rho gL^4/64h^3$.

Использованы приближения: $\sin\varphi \cong \varphi - \varphi^3/6$; $\cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2$; $\mathrm{tg}\varphi \cong \varphi + \varphi^3/3$.

4. Для определения модуля Юнга можно построить график зависимости $h\left(L^{4/3}\right)$ и по наклону графика определить E. Другая возможность решения – расчёт по полученной формуле зависимости $h(L)$ значений E для разных L с последующим усреднением.

Критерии оценивания

1. Наличие таблицы экспериментальных результатов по п.1 (количество точек не менее 10) – (по 0,4 балла за точку. Точки, отличающиеся друг от друга по L менее, чем на 5 см, считаются за одну!) 4 балла.

Примечание. Экспериментальные результаты, значимо (более чем на 15%) отличающиеся от контрольных значений, полученных жюри при тестировании оборудования, не учитываются!

Максимальная оценка за пункт – 4 балла.

2. Построен график $h(L)$. При этом график хорошо читается, подписаны координатные оси, выбран удобный масштаб и т.д. При выполнении указанных требований 1 балл.

При недостатках в построении графика оценка за график может быть снижена на 0,5 балла.

Максимальная оценка за пункт – 1 балл

3. Определено значение n (п.2) при ***обязательном*** построении графика в логарифмическом масштабе. Если полученное значение n попадает в диапазон значений от 1,15 до 1,5, ставится 2,5 балла.

В диапазоне от 1,05 до 1,6 ставится 1,5 балла. За результат в диапазоне от 0,9 до 1, 75 ставится 0,5 балла.

Проведена оценка погрешности определения n с помощью графика в логарифмических координатах – 0,5 балла.

Максимальная оценка за пункт – 3 балла

4. При выводе теоретической зависимости $h(L)$ обоснованно получено выражение

$$h = \left(\frac{3\rho g L^4}{64E}\right)^{1/3}.$$ 3 балла.

Максимальная оценка за пункт – 3 балла.

5. При обработке экспериментальных результатов (п.1) с использованием теоретической зависимости $h = \left(\frac{3\rho g L^4}{64E}\right)^{1/3}$ определены значения модуля Юнга резины E.

5.1 - использован график в координатах $h\left(L^{4/3}\right)$ или рассчитаны значения модуля Юнга по полученной в п.3 формуле $h\left(L\right)$, при этом определено среднее значение для различных L – 1,5 балла

5.2 Полученное значение модуля Юнга попадает в диапазон

3,0 - 4,0 МПа	2 балла
2,5 - 4,5 МПа	1,5 балла
2,0 - 5,0 МПа	1 балл
1,0 - 6,0 МПа	0,5 балла

Примечание. модули Юнга резиновой ленты могут отличаться в зависимости от региона и т.д. В этом случае жюри вправе скорректировать диапазоны оценивания модуля Юнга по своим данным, полученным при тестировании оборудования.

5.3 – оценка погрешности определения модуля Юнга – 0,5 балла.

Максимальная оценка за пункт – 4 балла