Берков И.В.

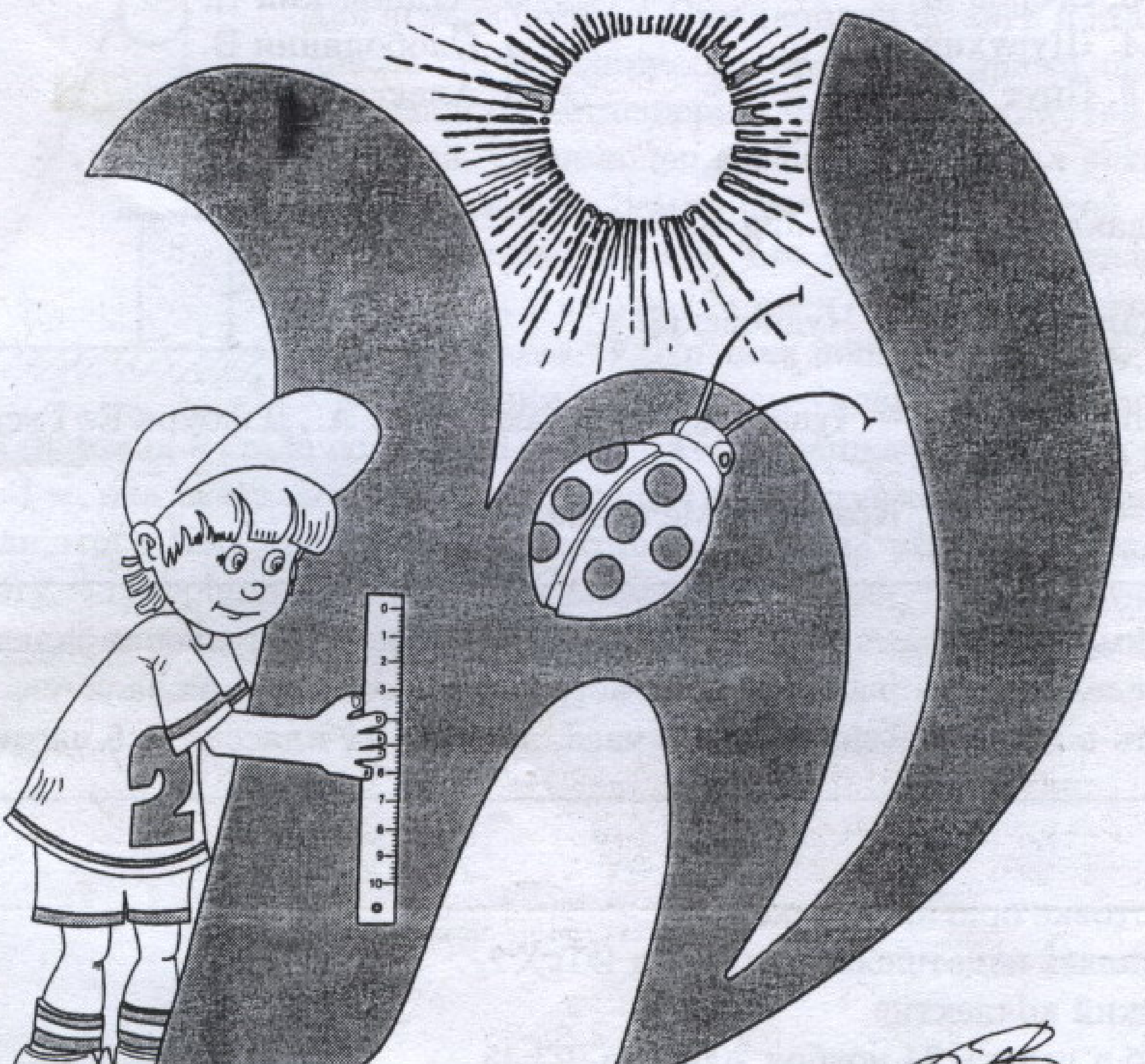
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XL Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2005/2006 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

8 класс
1. Фольклор
2. Слободянин В.
3. Подлесный Д.
4. Сеитов А.

9 класс
1. Фольклор
2. Кармазин С.
3. Кармазин С.
4. Александров Д.

10 класс
1. Милютин Е.
2. Фольклор
3. Егоров М.
4. Шурухин В.
5. Прут Э.

11 класс
1. Слободянин В.
2. Шведов О.
3. Чудновский А.
4. Слободянин В.
5. Александров Д.

Общая редакция — Слободянин В.

Техническая редакция — Чудновский А.

Оформление и вёрстка — Чудновский А., Самокотин А., Дзябура Е., Гусихин П.

Рецензия — Дунин С., Ко́зел С., Мельниковский Л.

Максимальное время, которое даётся участникам на решение задач, определяется из расчёта «один астрономический час на задачу», то есть в 8 и 9 классах даётся 4 часа, а в 10 и 11 классах — 5 часов.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 24 ноября 2005 г. в 03:45.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

8 класс

Задача 1. Маугли и Каа

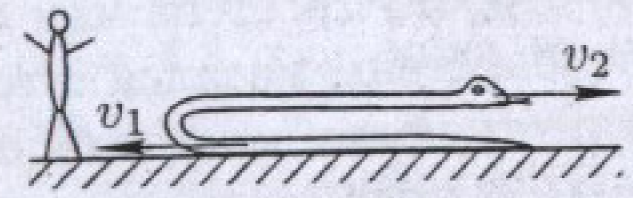


Рис. 1

Маугли принимал у удава Каа зачёт по развороту на 180^0. Техника разворота такова: Каа, вытянувшись в линию, ползёт к Маугли со скоростью v_1; как только голова удава касается ног мальчика, удав поворачивает её на $180°$ и начинает выполнять разворот; при этом голова Каа удаляется от Маугли со скоростью $v_2 > v_1$, а хвост продолжает движение в прежнем направлении и с прежней скоростью (рис. 1). За какое время t_0 удав выполнит разворот? На каком расстоянии x_0 от ног мальчика окажется хвост удава сразу же после выполнения разворота? Считайте, что длина L удава Каа во время разворота не меняется.

Задача 2. Футболисты

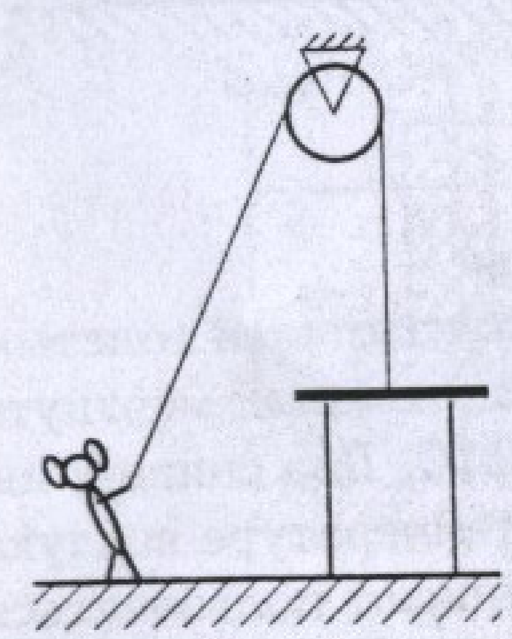


Рис. 2

Крокодил Гена и Чебурашка решили поставить ворота для игры в футбол. Они вкопали штанги и стали устанавливать перекладину. Для этого Гена прямо над штангами прикрепил к ветке дерева блок с перекинутой через него верёвкой. Один конец верёвки он обвязал вокруг середины лежащей на земле перекладины массой $m = 5$ кг, потянул за другой так, что верёвка натянулась, а её конец оказался на уровне плеч Чебурашки, стоящего точно под блоком. Чебурашка пошёл от дерева, удерживая конец верёвки на прежнем уровне. Перекладина оторвалась от земли и стала подниматься. Когда Чебурашка удалился на расстояние $L = 3$ м, она оказалась на одном уровне с верхними концами штанг (рис. 2). Какова высота h штанг? Какую работу A совершил Чебурашка, перемещаясь с натянутой верёвкой? Блок находился на высоте $H = 4$ м от уровня плеч Чебурашки, стоящего на земле. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ Н/кг.

Задача 3. Гидравлический пресс

Гидравлический пресс закреплён на полозьях, которые могут скользить по полу цеха. Шток поршня большего диаметра прижат к стене. Минимальная сила, которую нужно приложить к штоку поршня меньшего диаметра, чтобы пресс сдвинулся с места, равна F_1 (рис. 3). В какую сторону (к стене или от неё) сдвинется пресс? Если пресс установить так, чтобы стены касался шток поршня меньшего диаметра, то для того, чтобы сдвинуть пресс, к противоположному штоку придётся приложить силу F_2 (рис. 4). Какую минимальную горизонтальную силу F_3 необходимо приложить к отдельно стоящему прессу на полозьях (рис. 5), чтобы сдвинуть его с места? Учитывайте трение только между полозьями и полом.

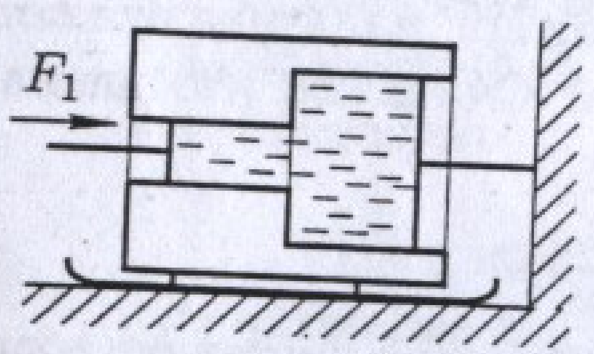


Рис. 3

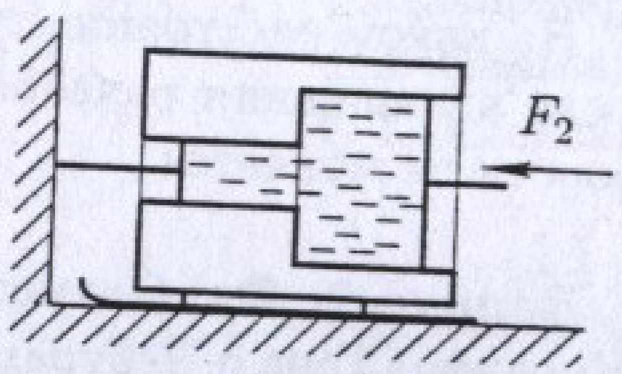


Рис. 4

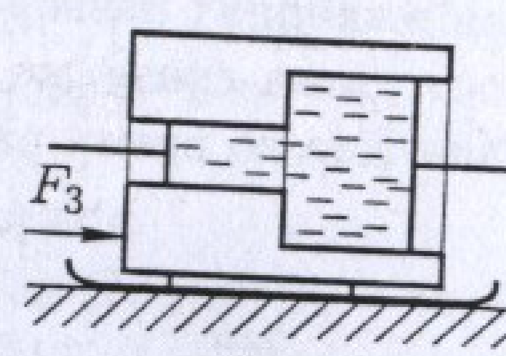


Рис. 5

Задача 4. Теплолюбивые индейцы

В палатке, покрытой сверху шерстяными одеялами, пол застелен толстым теплонепроницаемым войлоком. Одинокий спящий индеец начинает мёрзнуть в такой палатке при уличной температуре воздуха $t_1 = 10°C$. Два спящих индейца начинают мёрзнуть в такой палатке при уличной температуре воздуха $t_2 = 4°C$. При какой температуре t_0 воздуха индейцы начинают пользоваться палатками? При какой температуре t_3 в той же палатке будет холодно трём индейцам? Считайте, что количество теплоты, теряемое палаткой в единицу времени, пропорционально разности температур воздуха внутри и снаружи.

9 класс

Задача 1. Скорость снаряда

Снаряд вылетел из катапульты со скоростью $v_1 = 39$ м/с. Через время $\tau = 4{,}2$ с он упал на землю со скоростью $v_2 = 45$ м/с. Определите минимальную $v_{\min}$ и максимальную $v_{\max}$ скорости снаряда за время его полёта. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха можно не учитывать. Выводить общую формулу для $v_{\min}$ и $v_{\max}$ не требуется.

Задача 2. Кирпичи в аквариуме

Два одинаковых шершавых кирпича положили на дно аквариума (рис. 6). После этого в аквариум стали наливать воду. Зависимость силы F давления кирпичей на дно аквариума от высоты h слоя налитой воды изображена на графике (рис. 7). Определите длины a, b и c рёбер кирпичей и плотность ρ материала, из которого они изготовлены.

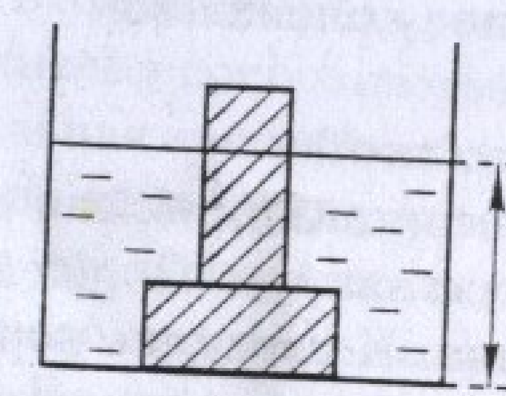


Рис. 6

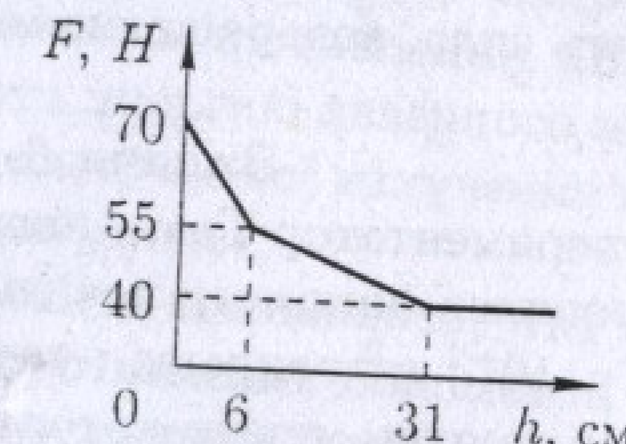


Рис. 7

Задача 3. Измерение теплоёмкости алюминия

Теплоизолированный сосуд до краёв наполнили водой при температуре $t_0 = 20°C$. В него опустили алюминиевую деталь, нагретую до температуры $t = 100°C$. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде стала $t_1 = 30{,}3°C$. Затем такой же эксперимент провели с двумя деталями. В этом случае после установления в сосуде теплового равновесия температура воды стала $t_2 = 42{,}6°C$. Чему равна удельная теплоёмкость c алюминия? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, её удельная теплоёмкость $c_0 = 4200$ Дж/(кг°C). Плотность алюминия $\rho = 2700$ кг/м^3.

Задача 4. Солнечная постоянная

Солнечная постоянная $P = 1{,}37$ кВт/м^2 — это полное количество лучистой энергии Солнца, падающей за 1 с на площадку площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и удалённую от Солнца на расстояние, равное радиусу земной орбиты. Какое количество P_0 лучистой энергии излучается в космос с 1 м^2 поверхности Солнца за 1 с? При наблюдении с Земли угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0{,}5°$.

10 класс

Задача 1. Стробоскопическая фотография

На обрывке стробоскопической фотографии (рис. 8) запечатлены три последовательных положения (A, B и C) шарика, движущегося в поле тяжести Земли. Найдите построением с помощью циркуля и линейки без делений следующее положение (D) шарика. Поясните ход построения. Вспышки лампы происходят через равные промежутки времени. Ориентация фотографии относительно вертикали не известна.

Задача 2. Устойчивость стержня

Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O, а другой — прикреплён к лёгкой нити, перекинутой через блок (рис. 9). К свободному концу нити привязан груз массой m. Расстояние от стержня до блока равно l. При какой массе m груза вертикальное положение стержня будет устойчиво (то есть при его отклонении от вертикали на малый угол будет возникать сила, возвращающая стержень в исходное положение)?

Задача 3. Поршень с рукояткой

Экспериментатор Глюк нашёл в сарае старый цилиндр, вблизи дна которого крепился манометр показывающий, что внутри вакуум. Поршень площадью $S = 10^{-2}$ м^2 закрывал внутренность цилиндра. К середине поршня крепилась рукоятка, плечо которой было в $k = 4$ раза больше радиуса поршня (рис. 10). Несмотря на внешнее давление $p_0 = 10^5$ Па, поршень был неподвижным из-за трения. Чтобы его сдвинуть с места, Глюк начал давить на рукоятку с постоянной по модулю силой перпендикулярной оси цилиндра, и та вместе с поршнем стала медленно поворачиваться. С какой силой F Глюк давил на рукоятку, если при повороте поршня на один оборот она продвинулась вглубь цилиндра на $\Delta y = 40$ см. Считайте поршень лёгким.

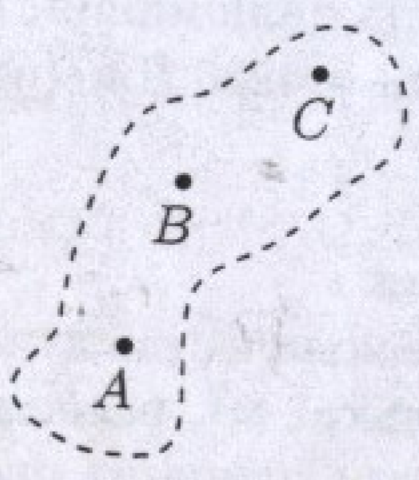


Рис. 8

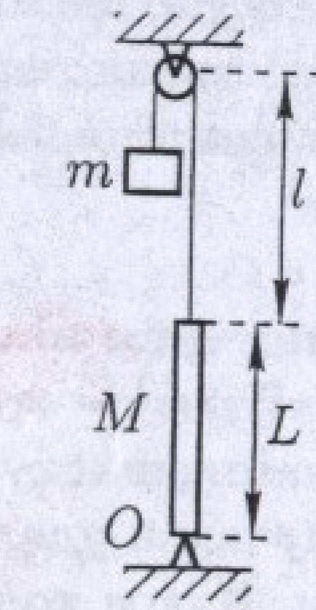


Рис. 9

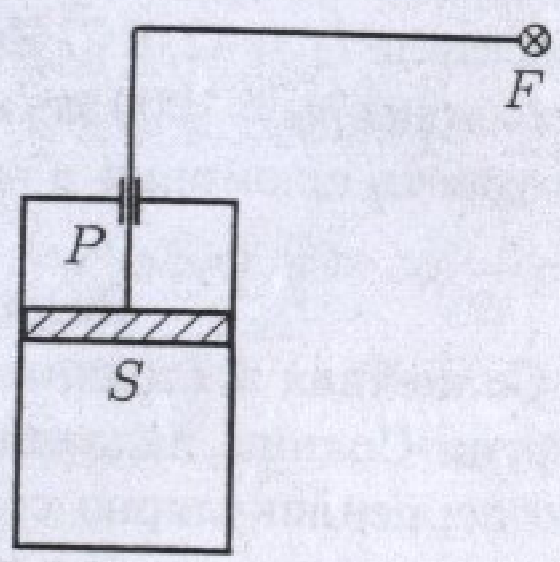


Рис. 10

Задача 4. КПД подъёмного устройства

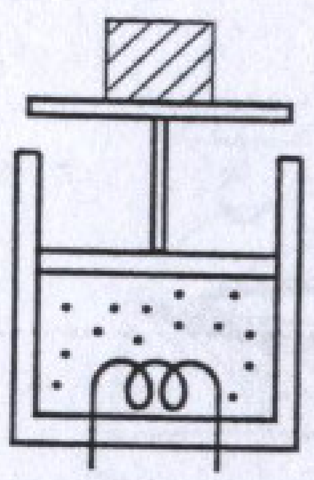


Рис. 11

Имеется два различных подъёмных устройства, каждое из которых представляет собой цилиндр, заполненный идеальным газом и закрытый поршнем (рис. 11). В первом устройстве в качестве идеального газа используется метан (CH_4), а во втором — азот (N_2). Для поднятия грузов газы подогревают нагревательными элементами. Найдите отношение η_1/η_2 КПД устройств.

Задача 5. Болометр

Болометр — это прибор для измерения энергии излучения (света). Болометр представляет собой тонкую зачернённую медную проволочку, заключенную в стеклянный вакуумированный сосуд. При её освещении одиночным лазерным импульсом проволочка нагревается столь быстро, что потери энергии на тепловое излучение и теплопроводность можно не учитывать. Нагрев проволочки, в свою очередь, вызывает увеличение её сопротивления. По величине изменения сопротивления можно вычислить энергию лазерного импульса. Правильная настройка болометра подразумевает, что всё излучения лазера попадает на проволочку (а не проходит частично мимо).

В ходе исследования лазера новой конструкции выяснилось, что возникающее после каждого импульса изменение сопротивления болометра слишком мало. Во сколько раз нужно изменить диаметр проволочки, чтобы при заданной энергии лазерного импульса изменение сопротивления возросло в $k = 10$ раз?

Примечание. Изменение сопротивления R проволоки, вызванное её нагревом на ΔT, можно определить по формуле: $\Delta R = R\alpha\Delta T$, где α — температурный коэффициент сопротивления (постоянная величина).

11 класс

Задача 1. Санки с моторчиком

Крокодил Гена с Чебурашкой решили покататься с горы. Гена установил на санки лебёдку с мотором, взял лыжи, и друзья отправились на гору. Там они встали на склон, составляющий с горизонтом угол α. Чебурашка включил мотор, а Гена, взявшись за трос, покатился с горы (рис. 12). С каким ускорением a поехал Гена, если санки с Чебурашкой остались в покое? Масса санок вместе с мотором, лебёдкой и Чебурашкой равна массе Гены вместе с лыжами. Коэффициенты трения между снегом и санками и между снегом и лыжами равны μ.

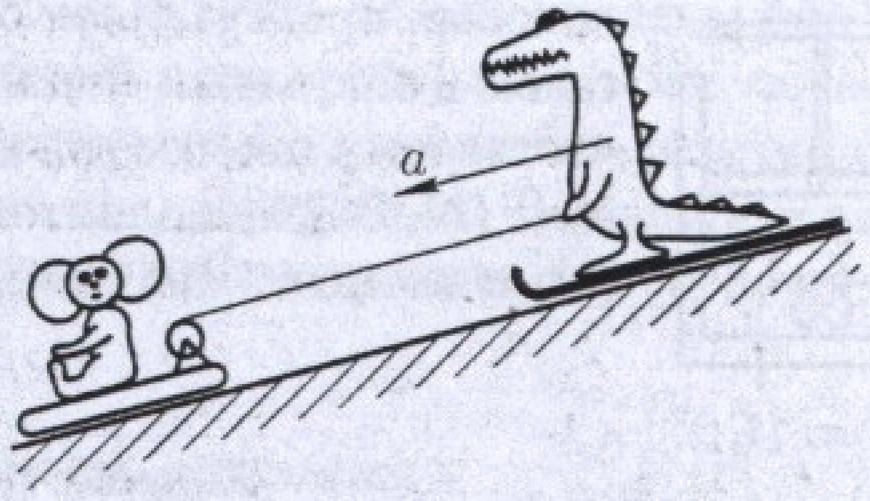


Рис. 12

Задача 2. Опыт Майера

В 1841 году Робертом Майером был предложен метод расчёта механического эквивалента теплоты — величины α, показывающей, сколько энергетических единиц (кг·м^2/с^2) содержится в единице количества теплоты (калории). Майер рассмотрел циклический процесс, совершаемый над идеальным газом (воздухом) и состоящий из:

1-2 — расширения воздуха в пустоту без совершения работы и изменения состояния других тел (к тому времени Джоуль уже установил, что при расширении идеального газа в пустоту его температура не меняется);

2-3 — сжатия газа при постоянном давлении;

3-1 — нагревания газа при постоянном объёме.

Майер нашел α, измерив работу, совершённую газом за цикл, и общее количество теплоты, подведённое к газу за цикл. С помощью приведённых ниже данных вычислите, какое значение α получил Майер в своём опыте.

В то время уже было известно уравнение состояния идеального газа:

$$\frac{pV}{m(t+t_0)} = B = \text{const}\,,$$

где m — масса газа, t — его температура (в °C), $t_0 \approx 270$°C. Удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме $c_V \approx 0{,}186$ кал/(г°C), а при постоянном давлении $c_p \approx 0{,}26$ кал/(г°C). При нормальных условиях ($t = 0$°C, $p_0 = p_0 = 10^5$ Па) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3.

Примечание. Внесистемная единица калория (кал) — это количество теплоты, которое требуется для нагрева 1 г воды на 1°C.

Задача 3. Старое ведро

Ведро объёмом $V = 10$ л и массой $m = 0{,}5$ кг наполняется вертикальной струёй воды из мощной колонки за $T = 5$ с (рис. 13). Площадь поперечного сечения струи $S = 4$ см^2. При очередном наполнении одно из креплений ручки, за которую ведро было подвешено к колонке, сломалось. К этому моменту ведро наполнилось лишь наполовину. При какой нагрузке F на повреждённое крепление оно сломалось? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

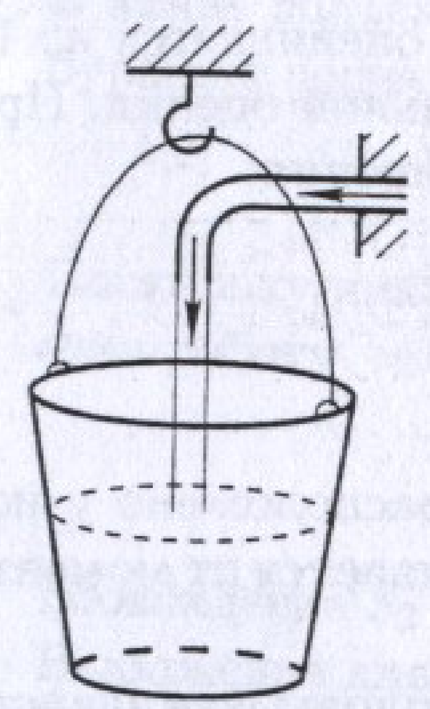


Рис. 13

Задача 4. Перезарядка конденсаторов

Электрическая цепь состоит из последовательно соединённых резистора, ключа и двух заряженных конденсаторов различной ёмкости (рис. 14). Вначале ключ разомкнут. Затем его замыкают. В итоге через резистор прошёл заряд $q_0 = 10$ мкКл. Какой заряд q прошёл через резистор к моменту, когда отношение силы тока в цепи к её максимальному значению равнялось $\alpha = 0{,}1$?

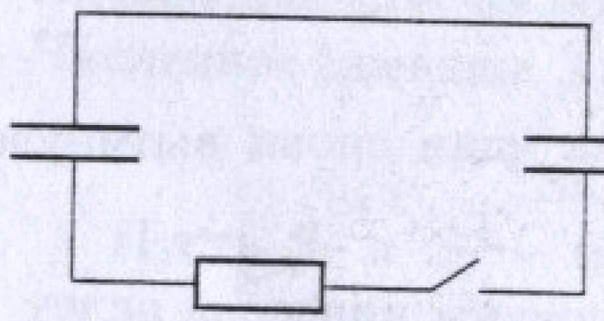


Рис. 14

Задача 5. Электромагнитная индукция

Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн, резистора сопротивлением $R = 1$ Ом, источника постоянного напряжения, ограничивающего резистора и ключа (рис. 15). Через значительное время после замыкания ключа сила тока через батарейку устанавливается постоянной и равной $I_0 = 0{,}1$ А. Определите с точностью не хуже 1%, на какую величину ΔI изменится ток через катушку за время $\tau = 10^{-2}$ с после размыкания ключа? Все элементы цепи можно считать идеальными.

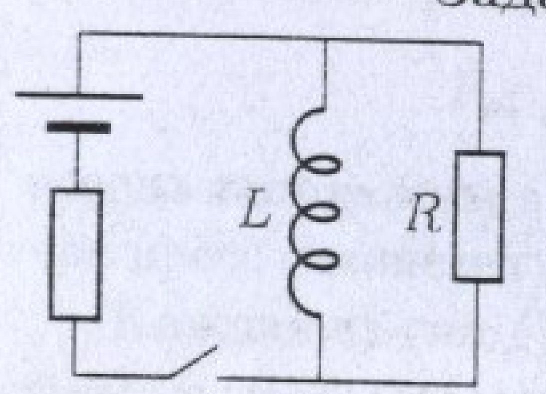


Рис. 15

Возможные решения

К решениям прилагаются примерные критерии оценивания. При необходимости проверяющие могут их изменить. Каждая задача оценивается из 10 баллов. Любое правильное решение заслуживает максимальной оценки. При отсутствии правильного ответа оцениваются фрагменты решения.

8 класс

Задача 1. Маугли и Каа

Введём систему координат, в которой начало отсчёта расположено у ног Маугли, ось x сонаправлена с вектором $\vec{v}_2$, а время t отсчитывается от момента начала поворота.

Пока поворот не закончился, координата x_1 хвоста и x_2 головы Каа зависят от времени следующим образом:

$$x_1 = L - v_1 t, \qquad x_2 = v_2 t.$$

Конец поворота — это момент времени t_0, когда удав снова вытянулся вдоль оси x, то есть

$$x_2(t_0) - x_1(t_0) = L,$$

откуда после подстановки x_1 и x_2 найдём

$$t_0 = \frac{2L}{v_1 + v_2}.$$

Координата хвоста в этот момент:

$$x_0 = x_1(t_0) = L - v_1 t_0 = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} L.$$

Критерии оценивания

Нахождение t_0 5
Нахождение x_0 5

Задача 2. Футболисты

В начале подъёма длина куска верёвки от блока до Чебурашки была $S_1 = H$. В конце подъёма она достигла величины $S_2 = \sqrt{H^2 + L^2}$. Следовательно, Чебурашка поднял перекладину на высоту

$$h = S_2 - S_1 = \sqrt{H^2 + L^2} - H = 1 \text{ м}.$$

Поскольку никакой механизм не даёт выигрыша в работе, Чебурашка совершил работу

$$A = mgh = mg\left(\sqrt{H^2 + L^2} - H\right) = 50 \text{ Дж}.$$

Критерии оценивания

Нахождение S_2 3
Выражение для h в общем виде 1
Численное значение h 1
Применение золотого правила механики или закона сохранения энергии 3
Выражение для A в общем виде 1
Численное значение A 1

Задача 3. Гидравлический пресс

Пусть S_1 и S_2 — площади малого и большого поршней соответственно, тогда давления жидкости в первом и во втором случаях:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}, \qquad p_2 = \frac{F_2}{S_2}.$$

Суммарные силы давления, действующие со стороны жидкости на внутренние стенки пресса,

$$F_{p1} = p_1(S_2 - S_1) \quad \text{и} \quad F_{p2} = p_2(S_2 - S_1)$$

всегда направлены в сторону меньшего поршня, следовательно, в первом случае пресс сдвинется от стены.

Каждая из сил F_{p1} и F_{p2} равна силе трения F_0, откуда $p_1 = p_2$,

$$F_0 = F_{p1} = p_1(S_2 - S_1) = p_2 S_2 - p_1 S_1 = F_2 - F_1.$$

Чтобы сдвинуть с места отдельно стоящий пресс, нужно приложить к нему не меньшую силу, чем сила трения, то есть

$$F_3 = F_0 = F_2 - F_1.$$

Критерии оценивания

Указания направления сдвига пресса 2
Нахождение F_{p1} 1
Нахождение F_{p2} 1
Утверждения, что $F_{p1} = F_0$, $F_{p2} = F_0$, $F_3 = F_0$ 3
Нахождение F_3 3

Задача 4. Теплолюбивые индейцы

Индейцы начинают пользоваться палатками, когда начинают мёрзнуть на улице, то есть t_0 — температура воздуха, окружающего индейца, при которой он начинает мёрзнуть. Индейцы начинают мёрзнуть в палатке, когда температура воздуха внутри неё опускается до t_0.

Пусть N — тепловая «мощность» одного индейца, t_i — температура уличного воздуха, при которой в палатке начинают мёрзнуть i индейцев, тогда уравнение теплового баланса для палатки имеет вид:

$$iN = k(t_0 - t_i), \qquad (1)$$

где k — коэффициент, зависящий только от свойств палатки. Слева в уравнении стоит суммарная тепловая мощность, выделяющаяся в палатке, а справа — мощность теплоотдачи в окружающую среду. Запишем общее уравнение (1) конкретно для каждого из случаев (1, 2 или 3 индейца в палатке):

$$\begin{cases} N = k(t_0 - t_1), \\ 2N = k(t_0 - t_2), \\ 3N = k(t_0 - t_3). \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$t_0 = 2t_1 - t_2 = 16°\text{C}, \qquad t_3 = 2t_2 - t_1 = -2°\text{C}.$$

Примечание. Найти N и k по отдельности невозможно из-за нехватки уравнений, но можно найти $N/k = t_1 - t_2 = 6°$C.

Критерии оценивания

Пояснение смысла t_0 1
Идея применения уравнения теплового баланса 2
Запись системы уравнений 3
Выражение для t_0 1
Значение t_0 1
Выражение для t_3 1
Значение t_3 1

9 класс

Задача 1. Скорость снаряда

Предположим, что снаряд вылетел из катапульты под углом α к горизонту (рис. 16). Проекции на оси Ox и Oy начальной и конечной скоростей связаны между собой следующим образом:

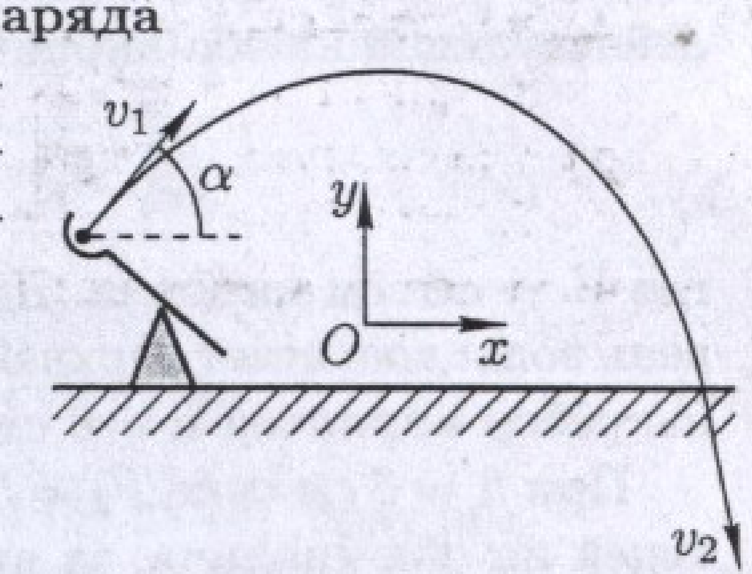


Рис. 16

$$v_{2x} = v_{1x} = v_1 \cos\alpha,$$

$$v_{2y} = v_{1y} - g\tau = v_1 \sin\alpha - g\tau.$$

Используя теорему Пифагора $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$, находим

$$\sin\alpha = \frac{v_1^2 - v_2^2 + g^2\tau^2}{2v_1 g\tau} = \frac{5}{13}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{12}{13}.$$

Скорость минимальна в наивысшей точке траектории, а максимальная скорость достигается на концах траектории, в данном случае в момент падения на землю, следовательно,

$$v_{\min} = v_1 \cos\alpha = 36 \text{ м/с}, \qquad v_{\max} = v_2 = 45 \text{ м/с}.$$

Критерии оценивания

Связь горизонтальных проекций скоростей 2
Связь вертикальных проекций скоростей 2
Применение теоремы Пифагора 2
Значение $v_{\min}$ 2
Значение $v_{\max}$ 2

Задача 2. Кирпичи в аквариуме

При $h = 0$ (воды нет) сила $F_1 = 70$ Н давления на дно равна силе тяжести, действующей на оба кирпича:

$$F_1 = 2\rho V g, \tag{2}$$

где V — объём кирпича. Два излома на графике $F(h)$ возникают, когда уровень воды достигает верхней грани каждого из кирпичей. Следовательно, длины рёбер кирпичей $a = 6$ см и $b = (31 - 6)$ см $= 25$ см.

При $h = 6$ см сила $F_2 = 55$ Н давления на дно равна силе тяжести, действующей на оба кирпича, за вычетом силы Архимеда, действующей на нижний (погружённый в воду) кирпич:

$$F_2 = 2\rho V g - \rho_w V g, \tag{3}$$

где $\rho_w = 1000$ кг/м^3 — плотность воды. Вычитая (3) из (2), получаем

$$F_1 - F_2 = \rho_w V g, \qquad \text{откуда} \qquad V = \frac{F_1 - F_2}{\rho_w g} = 0{,}0015 \text{ м}^3 = 1{,}5 \text{ л}.$$

Длина третьего ребра кирпича $c = V/ab = 10$ см. Из (2) находим плотность

$$\rho = \frac{F_1}{2Vg} = \frac{F_1}{2(F_1 - F_2)}\rho_w \approx 2{,}3 \text{ г/см}^3.$$

Критерии оценивания

Объяснение изломов на графике 2
Значение a 1
Значение b 1
Выражение или значение V 2
Значение c 2
Значение ρ 2

Задача 3. Измерение теплоёмкости алюминия

Пусть m — масса детали, V — объём сосуда, тогда уравнения теплового баланса при опускании одной и двух деталей соответственно имеют вид:

$$cm(t - t_1) = c_0\rho_0\left(V - \frac{m}{\rho}\right)(t_1 - t_0), \tag{4}$$

$$2cm(t - t_2) = c_0\rho_0\left(V - 2\frac{m}{\rho}\right)(t_2 - t_0). \tag{5}$$

Поделив (4) на $t_1 - t_0$, а (5) — на $t_2 - t_0$ и вычтя (5) из (4), получим

$$cm\frac{t - t_1}{t_1 - t_0} - 2cm\frac{t - t_2}{t_2 - t_0} = c_0\rho_0\frac{m}{\rho},$$

откуда

$$c = \frac{c_0\rho_0/\rho}{\dfrac{t - t_1}{t_1 - t_0} - 2\dfrac{t - t_2}{t_2 - t_0}} \approx 922 \text{ Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)}.$$

Критерии оценивания

Идея применения уравнения теплового баланса 1
Уравнение теплового баланса в первом случае 2
Уравнение теплового баланса во втором случае 2
Окончательное выражение для c 3
Численный ответ 2

Задача 4. Солнечная постоянная

Пусть r — радиус Солнца, R — расстояние от Солнца до Земли, тогда в радианах $\alpha \approx 2r/R$, так как $\alpha \ll 1$.

Площадь S сферы радиусом R относится к площади s поверхности Солнца как $(R/r)^2$ (в силу подобия сфер). Вся излучаемая Солнцем энергия полностью проходит через любую охватывающую его сферу, поэтому $sP_0 = SP$, откуда

$$P_0 = P\frac{S}{s} = P\left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{4P}{\alpha^2} \approx 72 \text{ МВт/м}^2.$$

Критерии оценивания

Соотношение между углом α и радиусами Солнца и Земли 2
Закон сохранения лучистой энергии 3
Окончательное выражение для P_0 3
Численный ответ 2

10 класс

Задача 1. Стробоскопическая фотография

Пусть t — время между вспышками лампы, $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ — скорости шарика в положениях A и B, тогда

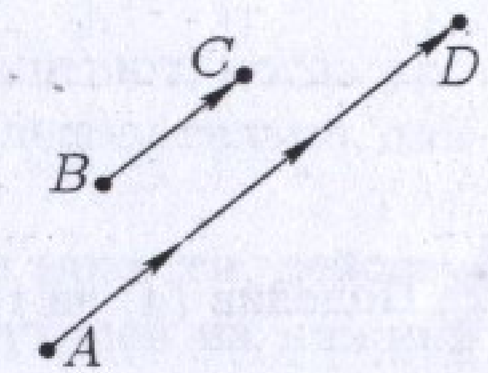


Рис. 17

$$\overrightarrow{AD} = \vec{v}_A \cdot 3t + \frac{\vec{g}(3t)^2}{2} = 3\left(\vec{v}_A t + \frac{3\vec{g}t^2}{2}\right) =$$

$$= 3\left((\vec{v}_A + \vec{g}t)\,t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right) = 3\left(\vec{v}_B t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right) = 3\overrightarrow{BC}.$$

Таким образом, если через точку A провести прямую параллельно вектору $\overrightarrow{BC}$ и отложить на ней отрезок $AD = 3BC$, то точка D и будет искомой точкой (рис. 17). Методика построения прямой параллельной данной и отрезка кратного данному известна из курса геометрии.

Критерии оценивания

Выражение $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{v}_A$ и $\vec{g}$ 3
Выражение $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{v}_B$ и $\vec{g}$ 4
Формулировка ответа 3

Задача 2. Устойчивость стержня

Пусть стержень отклонился от вертикали на малый угол α, тогда нить отклонится от вертикали на угол $\beta \approx \alpha L/l$ (рис. 18). Чтобы он вернулся в исходное положение, момент силы натяжения нити $T = mg$, имеющей плечо $l_1 \approx \beta(l + L)$ относительно полюса O, должен превысить момент силы тяжести стержня $F = Mg$, имеющей плечо $l_2 \approx \alpha L/2$ относительно того же полюса:

$$mg \cdot \beta(l + L) > Mg \cdot \alpha\frac{L}{2},$$

откуда

$$m > \frac{M/2}{1 + L/l}.$$

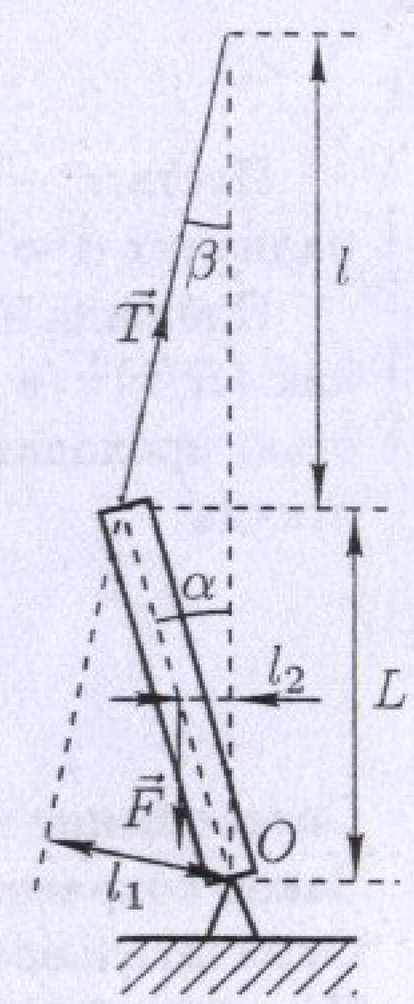


Рис. 18

Критерии оценивания

Правило моментов (в виде неравенства) 4
Корректное использование малости углов 3
Получение ответа 3

Задача 3. Поршень с рукояткой

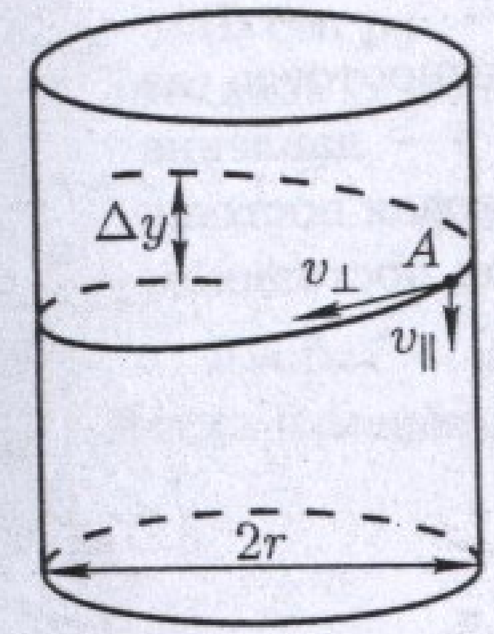


Рис. 19

Траектория произвольной точки A боковой поверхности поршня — это винтовая линия (рис. 19).

Пусть $v_\parallel$ — составляющая скорости точки A вдоль оси цилиндра, а $v_\perp$ — составляющая в перпендикулярной к оси плоскости. Поскольку сила трения T противонаправлена скорости, то её составляющие по абсолютной величине

$$\frac{T_\parallel}{T_\perp} = \frac{v_\parallel}{v_\perp} = \frac{\Delta y}{2\pi r}, \tag{6}$$

где $r = \sqrt{S/\pi}$ — радиус цилиндра.

Поршень движется с постоянной скоростью, поэтому можно применить правило моментов и равенство сил вдоль оси цилиндра:

$$F \cdot kr = T_\perp \cdot r, \qquad p_0 S = T_\parallel. \tag{7}$$

Решая уравнения (7)с использованием (6), находим

$$F = \frac{2\pi r}{k\Delta y} p_0 S = \frac{2\sqrt{\pi S}}{k\Delta y} p_0 S \approx 220 \text{ Н}.$$

Критерии оценивания

Формула $M = 4Fr$ 1
Формула $M = 2\pi r^2 F_\perp$ 2
Формула $p_0 S = F_\parallel$ 1
Формула для $\operatorname{tg}\alpha$ 2
Формула связывающая радиус поршня и его площадь 1
Окончательное выражение для F 2
Численное значение F 1

Задача 4. КПД подъёмного устройства

Будем считать, что процесс поднятия груза происходит медленно, тогда газ расширяется изобарически. Введём стандартные обозначения: p — давление газа, ΔV и ΔT — изменения его объёма и температуры, R — газовая постоянная, ν — количество газа, C_p — его молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

Полезная работа по поднятию груза

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T,$$

а подведённое к газу количество теплоты

$$Q = \nu C_p \Delta T,$$

следовательно, КПД устройства

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{R}{C_p}.$$

Поскольку метан — многоатомный газ, а азот — двухатомный, то

$$C_{V1} = 3R, \quad C_{p1} = C_{V1} + R = 4R, \qquad C_{V2} = \frac{5}{2}R, \quad C_{p2} = C_{V2} + R = \frac{7}{2}R.$$

Таким образом, отношение КПД устройств

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{R/C_{p1}}{R/C_{p2}} = \frac{C_{p2}}{C_{p1}} = \frac{7}{8}.$$

Результат не зависит ни от размеров цилиндров, ни от количества газа в них.

Критерии оценивания

Общее определение КПД $\eta = A/Q$ 1
Выражение для A 2
Выражение для Q 2
Нахождение C_{p1} 2
Нахождение C_{p2} 2
Численный ответ 1

Задача 5. Болометр

Пусть ρ_0 — плотность меди, L — длина проволоки, d — её диаметр, тогда площадь S поперечного сечения, объём V и масса m проволоки:

$$S = \frac{\pi}{4}d^2, \qquad V = SL = \frac{\pi}{4}d^2 L, \qquad m = \rho_0 V = \frac{\pi}{4}\rho_0 L d^2.$$

Пусть c — удельная теплоёмкость меди, E — энергия лазерного импульса, тогда изменение температуры проволоки:

$$\Delta T = \frac{E}{cm} = \frac{4E}{\pi c \rho_0 L d^2}.$$

Пусть ρ — удельное сопротивление меди, тогда сопротивление проволоки

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{4\rho L}{\pi d^2},$$

а изменение этого сопротивления из-за нагрева:

$$\Delta R = R\alpha\Delta T = \frac{16\alpha\rho E}{\pi^2 c\rho_0 d^4} \sim d^{-4}.$$

Таким образом, чтобы увеличить ΔR в k раз, нужно уменьшить d в n раз:

$$n = \sqrt[4]{k} \approx 1{,}8.$$

Критерии оценивания

Использование соотношения $E = cm\Delta T$ 1
Выражение для ΔT после подстановки m 1
Использование соотношения $R = \rho L/S$ 1
Выражение для R после подстановки S 1
Выражение для ΔR после всех подстановок 1
Указание на пропорциональность: $\Delta R \sim d^{-4}$ 1
Конечная формула для n 2
Численный ответ 2

11 класс

Задача 1. Санки с моторчиком

Пусть m — масса Гены вместе с лыжами, N — сила нормальной реакции склона, действующая на него, T — сила натяжения троса, F_1 и F_2 — силы трения, действующие на Чебурашку (рис. 20) и Гену (рис. 21) соответственно, тогда второй закон Ньютона для них в проекциях на оси Ox и Oy имеет вид:

$$\begin{aligned} &Oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha, && Oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha, \\ &Ox: \quad 0 = mg\sin\alpha - T + F_1, && Ox: \quad ma = T + mg\sin\alpha - F_2. \end{aligned} \tag{8}$$

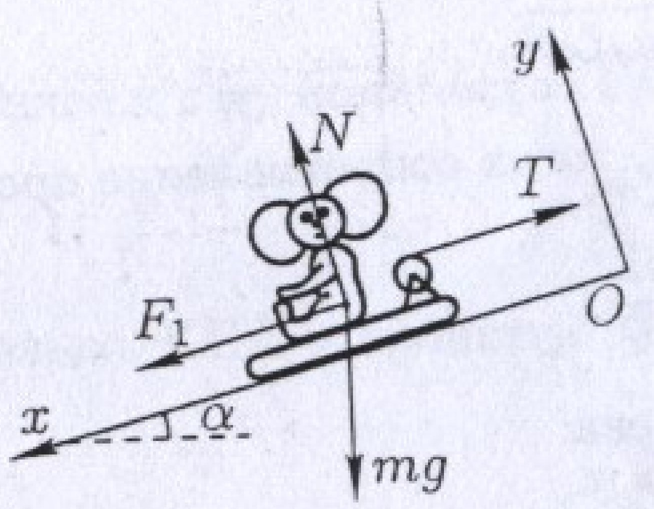


Рис. 20

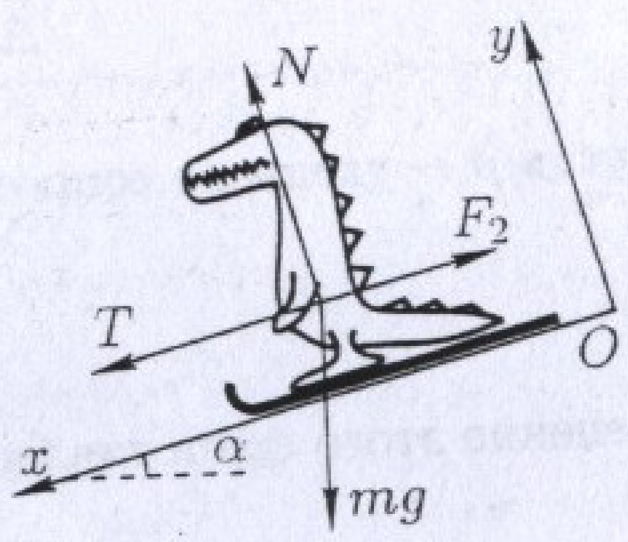


Рис. 21

Поскольку Гена скользит вниз, то сила трения для него определяется однозначно: $F_2 = \mu N$. Чебурашка покоится, поэтому сила трения F_1 может принимать значения в диапазоне от $-\mu N$ (при малых T) до μN (при больших T). Выразим a из системы (8):

$$a = g\left(2\sin\alpha - \mu\cos\alpha + \frac{F_1}{mg}\right).$$

Подставляя $F_1 = F_{1\,\min} = -\mu mg\cos\alpha$ и $F_1 = F_{1\,\max} = \mu mg\cos\alpha$, найдём диапазон возможных значений a:

$$a_{\min} = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad a_{\max} = 2g\sin\alpha.$$

Если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то $a_{\min} < 0$, то есть Гена скользит вверх. Это противоречие возникло из-за того, что в ходе решения мы использовали фиксированное направление силы F_2 (предположив, что Гена скользит вниз). Для устранения противоречия нужно добавить к ответу условие: если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, то $a_{\min} = 0$.

Критерии оценивания

Второй закон Ньютона для Чебурашки в проекции на ось x 1
Второй закон Ньютона для Чебурашки в проекции на ось y 1
Второй закон Ньютона для Гены в проекции на ось x 1
Второй закон Ньютона для Гены в проекции на ось y 1
Выражение для F_2 1
Диапазон для F_1 2
Диапазон для a 2
Рассмотрение случая $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ 1

Задача 2. Опыт Майера

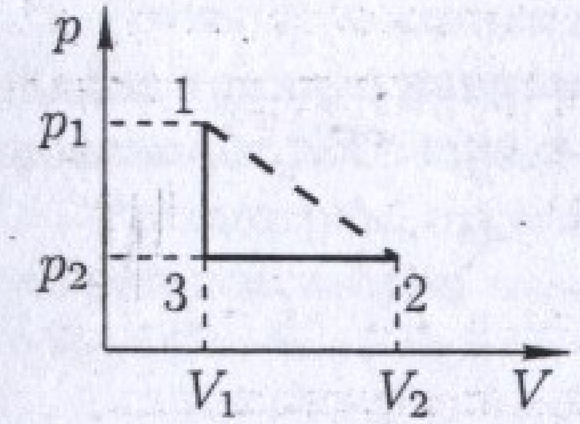


Рис. 22

Работа A, совершённая газом за цикл, равна общему количеству теплоты Q, полученной газом:

$$A = \alpha Q, \tag{9}$$

где α служит для перевода единиц измерения. Пусть p_1, V_1 и t_1 — давление, объём и температура в первом состоянии, p_2, V_2 и t_2 — во втором (рис. 22), t_3 — температура в третьем состоянии, тогда

$$A = p_2(V_1 - V_2), \qquad Q = mc_p(t_3 - t_2) + mc_V(t_1 - t_3). \tag{10}$$

Процесс 1-2 изображён на графике пунктиром, так как расширение в вакуум не является квазистационарным процессом. Температура в этом процессе не изменяется, то есть $t_1 = t_2$.

Применяя уравнение состояния идеального газа к состояниям 2 и 3:

$$\frac{p_2V_2}{m(t_2+t_0)} = \frac{p_2V_1}{m(t_3+t_0)}, \quad \text{получаем} \quad t_3 + t_0 = (t_2+t_0)\frac{V_1}{V_2}. \tag{11}$$

Преобразуем выражение (10) для Q с использованием (11):

$$Q = mc_p((t_3+t_0) - (t_2+t_0)) + mc_V((t_2+t_0) - (t_3+t_0)) =$$
$$= m(c_p - c_V)\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)(t_2+t_0).$$

Выразим α из (9):

$$\alpha = \frac{A}{Q} = \frac{p_2(V_1-V_2)}{m(c_p-c_V)(V_1/V_2-1)(t_2+t_0)} = \frac{p_2V_2}{m(t_2+t_0)(c_p-c_V)} = \frac{B}{c_p-c_V}.$$

При $t = 0°$C и $p = p_0 = 10^5$ Па получаем $B = p_0/(\rho_0 t_0)$. Таким образом,

$$\alpha = \frac{p_0}{\rho_0 t_0(c_p - c_V)} \approx 3{,}85\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{кал}}.$$

Критерии оценивания

Соотношение $A = \alpha Q$ 2
Выражение для A 1
Первичное выражение для Q 2
Использование постоянства температуры в процессе 1-2 1
Применение уравнения состояния 2
Окончательное выражение для α 1
Численный ответ 1

Задача 3. Старое ведро

Когда одно из креплений ручки сломалось, их суммарная реакция складывалась из веса самого ведра, веса воды объёмом $V/2$ и силы F_0, тормозящей струю воды в ведре:

$$2F = mg + \rho\frac{V}{2}g + F_0,$$

где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды.

Силу F_0 определим из рассмотрения процесса наполнения ведра целиком. Из условия, что ведро объёмом V наполняется струёй поперечным сечением S за время T, находим скорость v истечения воды из крана:

$$V = SvT, \qquad \text{откуда} \qquad v = \frac{V}{ST}.$$

Из закона изменения импульса $\Delta p = F\Delta t$ в виде

$$\rho V v = F_0 T \qquad \text{находим} \qquad F_0 = \frac{\rho V v}{T} = \frac{\rho V^2}{ST^2}.$$

Таким образом,

$$F = \frac{mg}{2} + \frac{\rho V g}{4} + \frac{\rho V^2}{2ST^2} = 2{,}45\ \text{Н} + 24{,}5\ \text{Н} + 5\ \text{Н} \approx 32\ \text{Н}.$$

Критерии оценивания

Представление F в виде трёх слагаемых	3
Нахождение скорости истечения воды из крана	1
Применение закона изменения импульса	2
Определение F_0	2
Окончательное выражение для F	1
Численное значение F	1

Задача 4. Перезарядка конденсаторов

Пусть R — сопротивление резистора, C_1 и C_2 — ёмкости конденсаторов. Когда ток прекратится, конденсаторы будут заряжены до одинакового напряжения U_0, а их заряды окажутся равными $q_{10} = C_1U_0$ и $q_{20} = C_2U_0$.

Рассмотрим произвольный момент, когда ток ещё есть. Заряды q_1 и q_2 на конденсаторах в этот момент ещё не равны «равновесным» q_{10} и q_{20}, а отличаются от них на Δq и $-\Delta q$ (в силу закона сохранения заряда):

$$q_1 = q_{10} + \Delta q, \qquad q_2 = q_{20} - \Delta q.$$

Следовательно, напряжения на конденсаторах $U_1 = q_1/C_1$, $U_2 = q_2/C_2$, а сила тока через резистор:

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{q_{10} + \Delta q}{C_1} - \frac{q_{20} - \Delta q}{C_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(U_0 + \frac{\Delta q}{C_1} - U_0 - \frac{-\Delta q}{C_2}\right) = \frac{\Delta q}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \sim \Delta q. \tag{12}$$

Таким образом, ток в произвольный момент времени прямо пропорционален заряду, которому ещё предстоит протечь через резистор от этого момента до установления равновесия в цепи.

В момент замыкания ключа $I(0) = I_0$, $\Delta q(0) = q_0$. Когда сила тока уменьшилась до $I(t) = \alpha I_0$, осталось протечь заряду $\Delta q(t) = q_0 - q$. Из (12) следует

$$\frac{I(t)}{I(0)} = \frac{\Delta q(t)}{\Delta q(0)}, \quad \text{то есть} \quad \frac{\alpha I_0}{I_0} = \frac{q_0 - q}{q_0}, \quad \text{откуда} \quad q = (1-\alpha)q_0 = 9\ \text{мкКл}.$$

Критерии оценивания

Применение соотношения $q = CU$	1
Применение закона сохранения заряда	1
Вывод пропорциональности между I и Δq	4
Запись пропорции между силой тока и зарядом	2
Выражение для q	1
Численный ответ	1

Задача 5. Электромагнитная индукция

Сразу после размыкания ключа сила тока в катушке останется равной I_0 (для скачкообразного изменения тока в катушке требуется бесконечное напряжение). Процесс дальнейшего изменения тока описывается уравнением:

$$L\dot{I} + RI = 0. \tag{13}$$

В начальный момент сила тока в катушке изменялась со скоростью:

$$\dot{I}(0) = -\frac{R}{L}I_0 = -0{,}1\ \text{А/с}.$$

Если бы эта скорость оставалась постоянной, то ток прекратился бы через

$$T = \frac{I_0}{|\dot{I}(0)|} = \frac{L}{R} = 1 \text{ с.}$$

Из уравнения (13) видно, что $\dot{I}$ со временем убывает, поэтому истинное время затухания тока больше. Поскольку $\tau \ll T$, то будем считать, что ток убывает с постоянной скоростью, тогда

$$\Delta I = \dot{I}(0)\tau = -\frac{R}{L} I_0 \tau = -1 \text{ мА.}$$

При нахождении ΔI мы считали, что $\dot{I} = \text{const}$, хотя на самом деле скорость изменения силы тока меняется. Для оценки погрешности нашего результата будем считать, что $\dot{I}$ изменяется линейно со временем. Тогда погрешность δI равна площади заштрихованного треугольника (рис. 23):

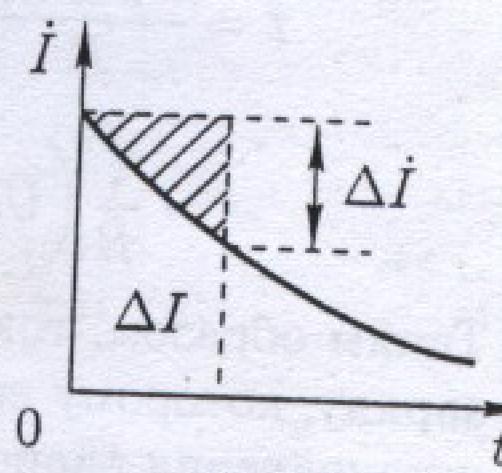


Рис. 23

$$\delta I = \frac{1}{2}\tau \Delta \dot{I} = \frac{1}{2}\tau \frac{R}{L} \Delta I.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta I}{\Delta I} = \frac{\tau R}{2L} = 0{,}5\%.$$

Примечание. Уравнение (13) имеет точное решение:

$$I(t) = I_0 e^{-tR/L},$$

откуда

$$\Delta I = I(\tau) - I_0 = I_0 \left(e^{-\tau R/L} - 1 \right) = -0{,}995 \text{ мА} \approx -1 \text{ мА.}$$

Критерии оценивания

Запись уравнения, описывающего затухание тока в цепи 2
Выражение для $\dot{I}(0)$ 2
Выражение для T 1
Формула для ΔI 1
Численный ответ 2
Оценка относительной погрешности 2