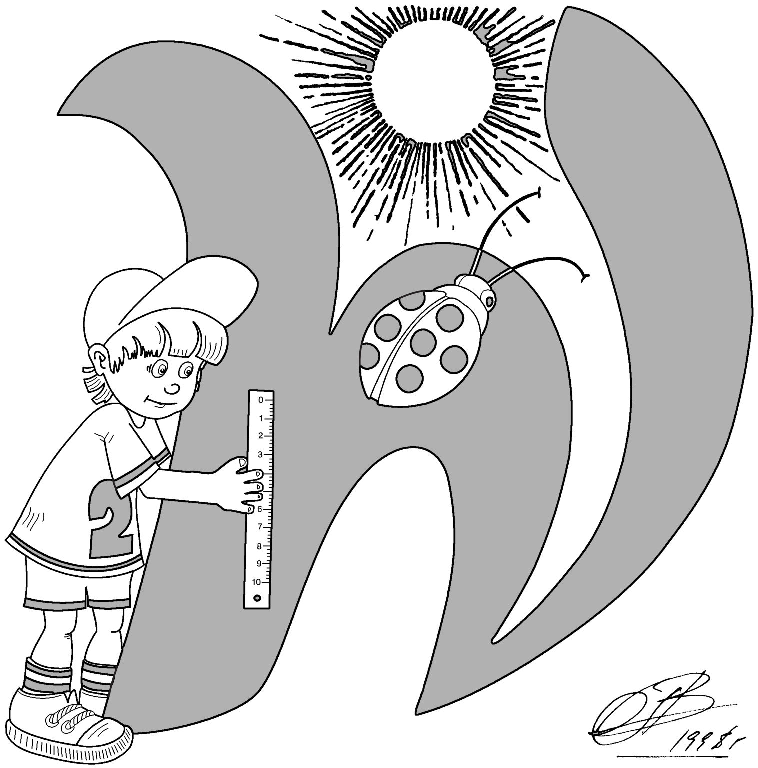
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2007/2008 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Подлесный Д.	1. Чивилёв В.	1. Ефимов В.
2. Чудновский А.	2. Слободянин В.	2. Слободянин В.
3. Шведов О.	3. Мельниковский Л.	3. Ерофеев И.
4. Гуденко А.	4. Воробьёв И.	4. Чивилёв В.
	5. Проскурин М.	5. Шведов О.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Гусихин П., Ерофеев И.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 28 января 2013 г. в 15:07.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Шарик на стержне

Массивный шарик насажен на стержень, жёстко закреплённый под углом α к горизонту, и может без трения скользить по нему. К шарику на лёгкой нерастяжимой нити подвешен точно такой же шарик. Другая нить удерживает верхний шарик на стержне в равновесии (рис. 1).

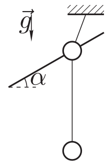


Рис. 1

1. С какими ускорениями начнут движение шарики сразу после пережигания верхней нити?
2. Пусть теперь шарики соединены не нитью, а лёгкой пружиной. С какими ускорениями шарики начнут движение в этом случае?

Ускорение свободного падения g.

Задача 2. Неопытный водитель

Неопытный водитель тренируется водить учебный автомобиль на большой ровной горизонтальной площадке. Для анализа ошибок вождения на учебном автомобиле установлено устройство, регистрирующее модуль скорости и модуль ускорения центра масс автомобиля в каждый момент времени. По окончании движения оно выдаёт результат в виде двух графиков: $|\vec{v}(t)|$ и $|\vec{a}(t)|$. Результат одного из таких измерений представлен на рисунке (рис. 2). Вертикальные участки на графике ускорения соответствуют переключениям режима работы мотора или тормозов, которые происходят столь быстро, что не могут быть отображены в выбранном масштабе.

1. Найдите путь S, пройденный автомобилем за всё время движения.
2. Определите характер движения автомобиля на каждом участке пути и изобразите качественно траекторию автомобиля (вид сверху).

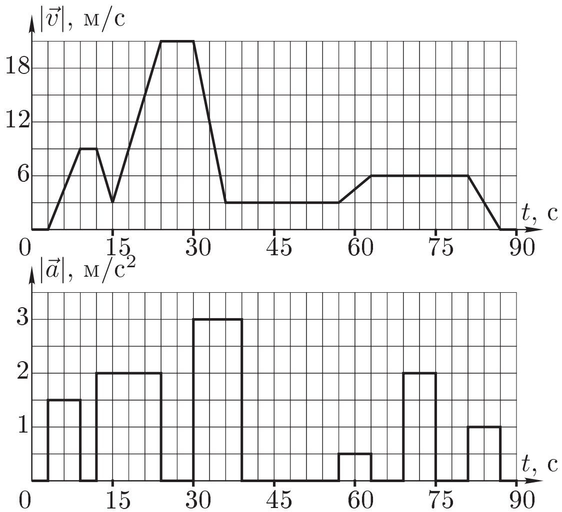


Рис. 2

Задача 3. Нелинейная схема

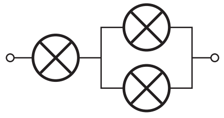


Рис. 3

Экспериментатор Глюк собрал электрическую цепь из одинаковых нелинейных элементов (рис. 3), вольтамперная характеристика каждого из которых (зависимость силы тока через элемент от напряжения на нём) представлена на графике (рис. 4).

Определите, какой будет сила тока в цепи, если приложенное к ней напряжение U_0 равно: а) 0,15 В; б) 3 В.

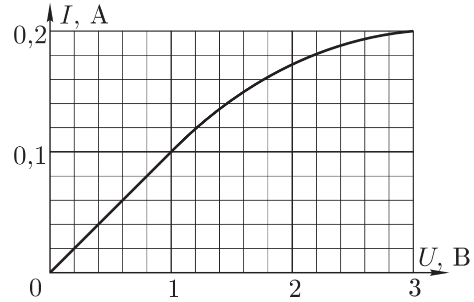


Рис. 4

Задача 4. Айсберг

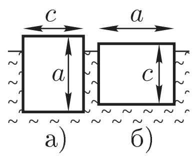


Рис. 5

В течение своей «жизни» айсберг несколько раз опрокидывается, поворачиваясь на 90°. Для изучения этого явления любознательный школьник проделал несколько модельных экспериментов, наблюдая процесс таяния льда в ванне. Опыты показали, что «айсберг» неустойчив к перевороту, если хотя бы один из его поперечных размеров меньше его высоты примерно на 20%. Затем был проделан следующий количественный эксперимент: тающий брусок льда в форме параллелепипеда размером $a \times b \times c = 10 \times 10 \times 8$ см^3 опускался в ванну с водой при температуре $t_0 = 20°$C. Попытки заставить плавать «айсберг» в положении а) (рис. 5) не увенчались успехом: он практически сразу самопроизвольно опрокидывался в устойчивое положение б). Далее в процессе таяния «айсберг», оставаясь параллелепипедом (тонкий надводный козырёк подтаивал и практически не образовывался), изменялся в размерах и примерно через полчаса ($\tau_0 = 30$ мин) самопроизвольно опрокинулся.

1. Какими были размеры модельного «айсберга» непосредственно перед этим опрокидыванием?
2. На основании описанного опыта оцените время τ_1 опрокидывания реального айсберга с размерами $500 \times 500 \times 400$ м^3 в океане с температурой $t_1 = 5°$C. Каковы его размеры при опрокидывании? Считайте, что теплоподвод происходит только по воде и скорость таяния пропорциональна разности температур льда и окружающих его вод.

Примечание. Температуру айсбергов принять равной 0°C.

10 класс

Задача 1.

Два куска пластилина с массами $3m$ и m брошены одновременно с горизонтальной поверхности Земли со скоростями v и $2v$ (рис. 6), причём скорости кусков не находятся в одной вертикальной плоскости. Скорость куска массой $3m$ составляет угол $\beta = 45^\circ$ с вертикалью и угол $\alpha = 60^\circ$ с прямой, проходящей через куски перед броском. Через некоторое время куски сталкиваются и слипаются. С какой скоростью упали на Землю слипшиеся куски?

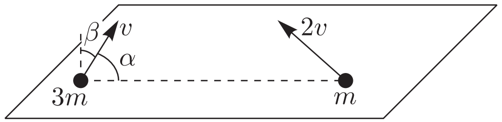


Рис. 6

Задача 2. Какой КПД больше?

Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс A, состоящий из двух изохор и двух изобар. Затем тот же газ совершает аналогичный процесс B (рис. 7). КПД какого процесса больше? Полагая КПД процесса A заданным и равным η_A, вычислите η_B. В обоих процессах $\Delta p_{21} = \Delta p_{32} = \Delta p$ и $\Delta V_{21} = \Delta V_{32} = \Delta V$, но их числовые значения неизвестны.

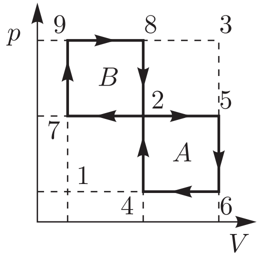


Рис. 7

Задача 3. Труба Ньютона

Говорят, первые эксперименты по оптике Ньютон проводил с металлической зеркально полированной цилиндрической трубой длиной $l = 8$ см и диаметром $d = 1$ см (рис. 8). В центре её нижнего основания он устанавливал точечный источник света O, а верхнее основание закрывал чёрной шторкой A с маленьким отверстием S посередине. В его экспериментах на высоте $h = 5$ см над шторкой располагался горизонтальный квадратный экран B со стороной $a = 3$ см, причём его центр находился точно на оси трубы.

1. Изобразите в масштабе 1:1 на листе бумаги в клетку, считая размер клетки равным 5 мм, картину, которую Ньютон видел на экране.
2. Что увидел бы Ньютон, если бы поднял шторку на высоту $\Delta l = 2$ см над верхним торцом трубы (не меняя положения остальных предметов)?

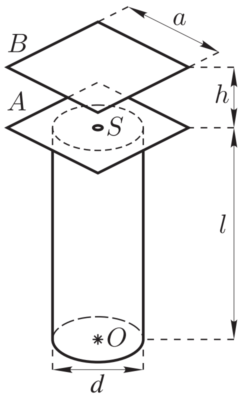


Рис. 8

Задача 4. Атом в однородном поле

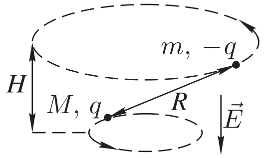


Рис. 9

Частицы с массами M и m и зарядами q и $-q$ соответственно вращаются с угловой скоростью ω по окружностям вокруг оси, направленной по внешнему однородному электрическому полю с напряжённостью E (рис. 9). Найдите расстояние R между частицами и расстояние H между плоскостями их орбит.

Задача 5. Горячий коктейль

В открытом сосуде находятся две несмешиваемые жидкости равных масс при температуре окружающей среды. В момент времени τ_1 смесь начинают нагревать, подводя постоянную мощность. В момент времени τ_5 сосуд оказывается пустым. В результате, получена зависимость температуры содержимого сосуда от времени (рис. 10). Найдите отношение удельных теплот парообразования и удельных теплоёмкостей жидкостей.

Считайте, что коэффициент пропорциональности α между разностью температур и потоком теплоты от сосуда в окружающую среду постоянен.

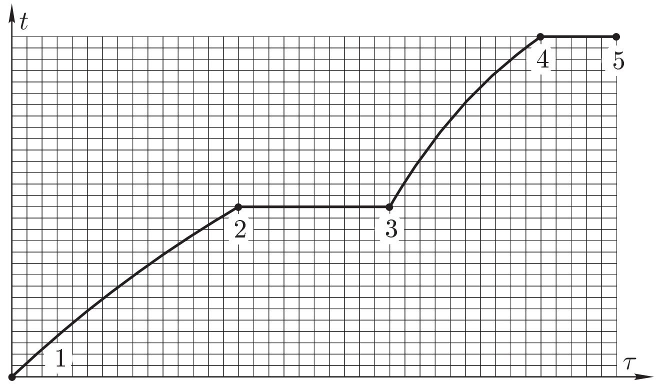


Рис. 10

11 класс

Задача 1. Муравей-спортсмен

Муравей из точки A без начальной скорости скользит по гладкой соломинке, у которой наклонный прямолинейный участок AB в точке B плавно переходит в дугу BC с радиусом кривизны R, а эта дуга в точке C также плавно переходит в горизонтальный прямолинейный участок CD (рис. 11).

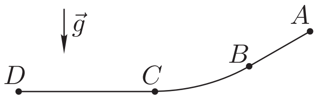


Рис. 11

Известно, что $AB : BC : CD = 1 : 2 : 3$, и суммарная длина пути много меньше R.

Вычислите время скольжения муравья по соломинке от точки A до точки D.

Задача 2. Какой КПД больше?

Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс C, состоящий из двух изохор и двух изобар. Затем тот же газ совершает аналогичный процесс D (рис. 12). КПД какого процесса больше? Полагая КПД процесса C заданным и равным η_C, вычислите η_D. В обоих процессах $\Delta p_{21} = \Delta p_{32} = \Delta p$ и $\Delta V_{21} = \Delta V_{32} = \Delta V$, но их числовые значения неизвестны.

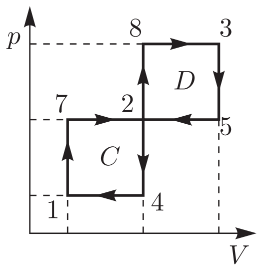


Рис. 12

Задача 3. Изолированная система

Цилиндрический сосуд с металлическим дном и не проводящими элетрический ток стенками закрыт тонким массивным металлическим поршнем, который располагается на высоте h, много меньшей диаметра сосуда. Внутри сосуда находится включённый в электрическую схему резистор, размеры которого много меньше размеров сосуда (рис. 13). Схема соединена лёгкими гибкими проводами с поршнем и дном сосуда. Изначально сосуд был заполнен гелием при давлении $p \gg \varepsilon_0\mathscr{E}^2/h^2$. Система теплоизолирована, помещена в вакуум и находится в равновесии.

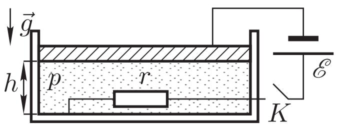


Рис. 13

Ключ K замыкают. Найдите максимальную высоту H, на которой может оказаться поршень после установления в системе равновесного состояния.

Теплоёмкостями сосуда и поршня пренебречь. Считать сопротивление r постоянным. Трение между поршнем и сосудом достаточно мало. Гелий считать идеальным газом. Электрическую проницаемость гелия принять равной $\varepsilon_{\text{He}} = 1$.

Задача 4. Массивный канат

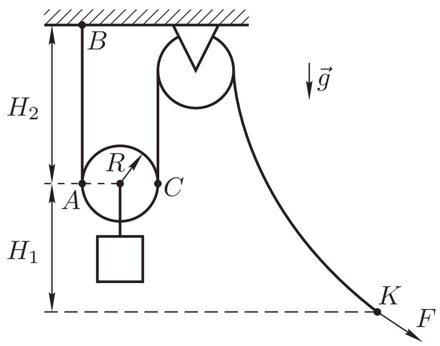


Рис. 14

С помощью массивного однородного каната, подвижного блока радиуса R и неподвижного блока удерживают в покое груз (рис. 14). Масса каната m, его длина l, масса груза с подвижным блоком M. Расстояния по вертикали H_1 и H_2 известны.

1. Найдите силу натяжения каната в точке B.
2. Найдите прикладываемую к концу каната в точке K силу F.

Трением в осях блоков пренебречь.

Задача 5. Очень толстая линза

Прозрачная пластина с показателем преломления n ограничена двумя сферическими поверхностями с радиусами кривизны R и $r < R$.

1. Какой должна быть толщина пластины L, чтобы падающий на поверхность с радиусом кривизны R параксиальный пучок света преобразовывался в параллельный?
2. Во сколько раз увеличивается интенсивность пучка света (энергия, переносимая за единицу времени через единицу площади) после прохождения через пластину?
3. Какое угловое увеличение для удалённых предметов даёт пластина? Потерями энергии пучка внутри пластины можно пренебречь.

Возможные решения
9 класс

Задача 1. Шарик на стержне

Нарисуем все силы, действующие на шарики (рис. 15). Запишем второй закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на стержень:

$$ma_1 = (T + mg)\sin\alpha,$$

где a_1 — ускорение верхнего шарика, T — сила натяжения нити, N — сила реакции стержня.

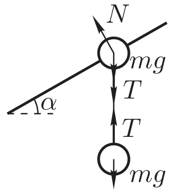


Рис. 15

Для нижнего шарика запишем второй закон Ньютона в проекции на нить:

$$ma_2 = mg - T.$$

1. Пользуясь кинематической связью (проекции ускорений шариков на нить связаны соотношением $a_2 = a_1 \sin\alpha$), выразим из вышеприведённых уравнений ускорения шариков. Получим:

$$a_1 = \frac{2g\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}, \quad a_2 = \frac{2g\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}.$$

2. Поскольку сразу после пережигания нити относительное расположение шариков не успело поменяться, то растяжение пружины будет таким же, что и до отрыва нити. Таким образом, $T = mg$. В результате получим:

$$a_1 = 2g\sin\alpha, \quad a_2 = 0.$$

Задача 2. Неопытный водитель

Заметим, что значение модуля ускорения было равно модулю производной модуля скорости на участках $t_1 \in (0 \text{ с}, 36 \text{ с})$, $t_2 \in (39 \text{ с}, 69 \text{ с})$, $t_3 \in (75 \text{ с}, 90 \text{ с})$. Следовательно, на этих участках водитель ехал прямолинейно, а расстояния, которые он преодолел, могут быть найдены как площади под графиком скорости от времени на соответствующих участках (рис. 16). Таким образом, $S_1 = 378$ м, $S_2 = 117$ м, $S_3 = 54$ м.

На участках $t_1^* \in (36 \text{ с}, 39 \text{ с})$, $t_2^* \in (69 \text{ с}, 75 \text{ с})$ модуль скорости не менялся, тем не менее ускорение было, следовательно, автомобиль на этих участках двигался по окружностям с радиусами $r_1^* = (v_1^2/a_1)^* = 3$ м, $r_2^* = (v_2^2/a_2)^* = 18$ м и проходил расстояния соответственно $S_1^* = v_1 t_1^* = 9$ м и $S_2^* = v_2 t_2^* = 36$ м.

1. Таким образом, автомобиль за всё время преодолел путь

$$S = S_1 + S_1^* + S_2 + S_2^* + S_3 = 594 \text{ м}.$$

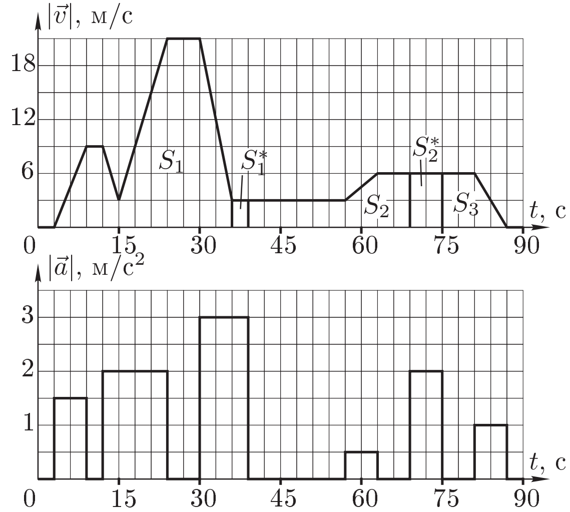


Рис. 16

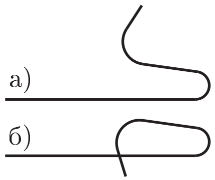


Рис. 17

2. Можно найти, на какой угол повернулся автомобиль на участках движения по окружности: $\alpha_1 = S_1^*/r_1 = 3$ рад $\approx 172°$, $\alpha_2 = S_2^*/r_2 = 2$ рад $\approx 115°$. В результате возможны две принципиально различные ситуации: 1) повороты производились в разные стороны; 2) повороты производились в одну и ту же сторону. Эти ситуации показаны на рисунке 17 а) и б) соответственно.

Задача 3. Нелинейная схема

При малых значениях силы тока ($I \leqslant 0{,}1$ А) нелинейный элемент можно считать резистором с постоянным сопротивлением $R = 10$ Ом. Следовательно, по правилам нахождения последовательного и параллельного сопротивления резисторов сопротивление всей цепи

$$R_0 = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R = 15 \text{ Ом}.$$

Такая замена нелинейного элемента на резистор допустима, если сила тока в цепи не превосходит значения $I_m = 0{,}1$ А. В этом случае максимальное напряжение, приложенное к цепи, $U_m = 1{,}5$ В. Первое из приведённых в условии задачи значений напряжения U_0 удовлетворяет неравенству $U_0 \leqslant U_m$, следовательно, $I_0 = U_0/R_0 = 0{,}01$ А.

Если сила тока I_0 в цепи лежит в интервале от 0,1 А до 0,2 А, то каждый из параллельно соединённых элементов по-прежнему можно заменить на резистор с сопротивлением $R = 10$ Ом. При этом напряжение на каждом из них равно $I_0R/2$. Обозначим через U_1 напряжение на третьем элементе цепи, тогда $U_0 = U_1 + I_0R/2$, а точка (I_0,U_1) должна принадлежать графику вольтамперной характеристики.

Таким образом, для определения силы тока в цепи следует изобразить на графике вольтамперной характеристики прямую $U = U_0 - IR/2$ и найти точку пересечения этой прямой с вольтамперной характеристикой. Значение I в точке пересечения является силой тока в цепи (рис. 18).

Проведя построение, находим, что в случае (б) сила тока $I \approx 0{,}18$ А $<$ $< 0{,}2$ А.

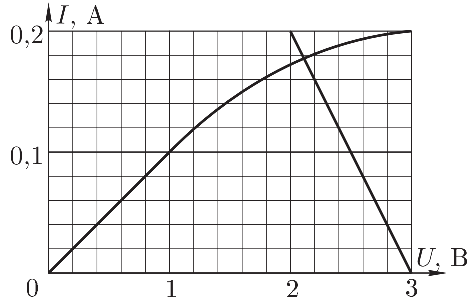


Рис. 18

Задача 4. Айсберг

Модельный «айсберг» теряет устойчивость, превращаясь в «неустойчивый» параллелепипед, за счёт того, что его поперечные размеры изменяются примерно в два раза быстрее вертикального («айсберг» почти не тает сверху). Толщину растаявшего льда x находим из уравнения $a - 2x = 0{,}8(c - x)$, откуда $x = (a - 0{,}8c)/1{,}2 = 3$ см. Следовательно, размеры перевернувшегося «айсберга» $4 \times 4 \times 5$ см^3.

Аналогично находим, что для реального айсберга слой растаявшего льда $y = 150$ м, и он перевернётся, имея характерные размеры $200 \times 200 \times 250$ м^3. Заметим, что из-за меньшей температуры океана и, соответственно, разности температур айсберга и воды скорость таяния в реальных условиях примерно в $(t_0 - t)/(t_1 - t) = 4$ раза меньше. Таким образом, получаем, что реальный айсберг перевернётся через $\tau_1 \simeq 4y/x \approx$1 год и 2 месяца.

10 класс

Задача 1.

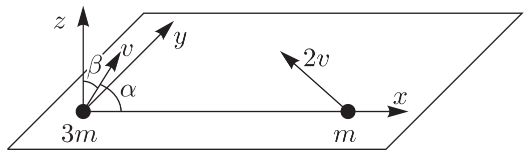


Рис. 19

Направим оси x и y горизонтально, а ось z вертикально (рис. 19). Проекции на оси скорости куска массой $3m$ равны:

$$v_{1x} = v\cos\alpha = v/2, \quad v_{1z} = v\cos\beta = v/\sqrt{2}, \quad v_{1y} = \sqrt{v^2 - v_{1x}^2 - v_{1z}^2} = v/2.$$

Поскольку куски пластилина слипаются, проекции их скоростей на оси y и z равны, поэтому

$$v_{2y} = v_{1y} = v/2, \quad v_{2z} = v_{1z} = v/\sqrt{2}.$$

Кусок пластилина массой m движется против направления оси x, следовательно

$$v_{2x} = -\sqrt{(2v)^2 - v_{2y}^2 - v_{2z}^2} = -\sqrt{13}v/2.$$

Проекции скорости центра масс системы на оси:

$$v_{cx} = \frac{3mv_{1x} + mv_{2x}}{4m} = \frac{3 - \sqrt{13}}{8}v,$$

$$v_{cy} = \frac{3mv_{1y} + mv_{2y}}{4m} = \frac{v}{2},$$

$$v_{cz} = \frac{3mv_{1z} + mv_{2z}}{4m} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

Скорость слипшихся кусков при падении равна скорости центра масс при бросании:

$$v_{\text{пад}} = v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2} = \frac{v}{8}\sqrt{70 - 6\sqrt{13}} \approx 0{,}87v.$$

Задача 2. Какой КПД больше?

Пусть за цикл газ совершает работу $A_0 = \Delta p\Delta V$. Тогда $\eta_A = A_0/Q_{425}$, где подведённое к газу количество теплоты $Q_{425} = U_{54} + A_{25}$. Аналогично $\eta_B = A_0/Q_{798}$, где $Q_{798} = U_{87} + A_{98}$. Заметим, что $A_{98} = A_{25} + A_0$. Сравним изменения внутренних энергий U_{54} и U_{87}. Выражение для U_{87}:

$$U_{87} = C_V(T_8 - T_7) = \frac{C_V}{R}(p_3V_2 - p_2V_1) = \\ = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + \Delta p\Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + A_0).$$

Аналогичным образом получим, что

$$U_{54} = \frac{C_V}{R}(p_2V_3 - p_1V_2) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + \Delta p\Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1 + A_0),$$

то есть $U_{54} = U_{87}$. Отсюда

$$\eta_A = \frac{A_0}{Q_{425}} = \frac{A_0}{U_{54} + A_{25}}, \quad \eta_B = \frac{A_0}{Q_{798}} = \frac{A_0}{U_{54} + A_{25} + A_0} = \frac{\eta_A}{1+\eta_A}.$$

Откуда $\eta_B < \eta_A$.

Задача 3. Труба Ньютона

Рассмотрим некоторое сечение трубы плоскостью, содержащей прямую OS (рис. 20). В силу осевой симметрии задачи любой луч, испущенный источником в этой плоскости, в ней и останется после любого количества отражений. Поэтому для решения задачи достаточно ограничиться одним сечением. Во всех остальных картина будет такой же.

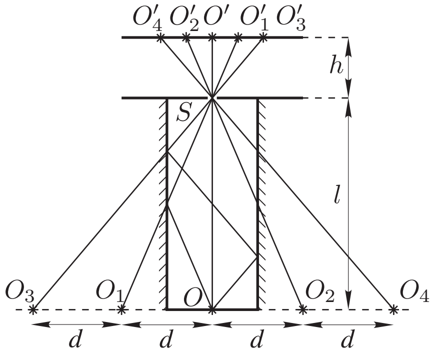


Рис. 20

В рассматриваемом сечении у источника O есть два отражения O_1 и O_2, причём $OO_1 = OO_2 = d$. Их изображениями, в свою очередь, являются точки O_3 и O_4 такие, что $OO_3 = OO_4 = 2d$, изображениями которых являются O_5 и O_6, и так далее. Объединяя изображения в разных сечениях, мы получим множество концентрических окружностей с радиусами $r_n = d, 2d, 3d, \ldots$ Проходя через отверстие, лучи на экране будут образовывать концентрические кольца, радиусы r'_n которых определяются из подобия соответствующих треугольников: $\triangle SOO_k \sim \triangle SO'O'_k$, то есть $r'_n = O'O'_n = ndh/l$.

На экране полностью уместятся кольца с радиусами $r'_1 = 6{,}25$ мм и $r'_2 = 12{,}5$ мм. Кроме них на экране будут видны точка в центре (образованная лучами, не претерпевшими отражений) и четыре дуги окружности радиусом $r'_3 = 18{,}75$ мм (рис. 21).

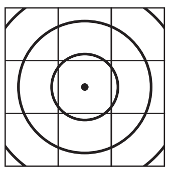


Рис. 21

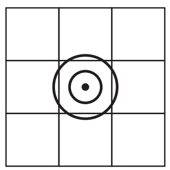


Рис. 22

Если шторку поднять на высоту Δl над верхним торцом трубы, то расстояние от отверстия S до источника будет $L = l + \Delta l$, а расстояние до экрана

$H = h - \Delta l$. Радиус колец на экране в этом случае будет определяться выражением $R'_n = ndH/L$, а их количество будет ограничено условием $R'_n/H < d/(2\Delta l)$. Следовательно на экране будут видны только центральная точка и кольца с радиусами $R'_1 = 0{,}3$ см и $R'_2 = 0{,}6$ см (рис. 22).

Задача 4. Атом в однородном поле

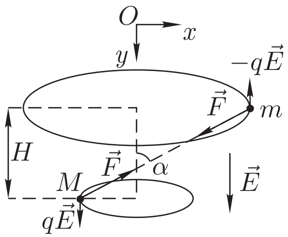


Рис. 23

Направим ось Oy вдоль вектора напряжённости поля $\vec{E}$, а ось Ox перпендикулярно ей (рис. 23). Пусть отрезок, соединяющий частицы, составляет с осью Oy угол α. Запишем второй закон Ньютона для частиц в проекции на введённые оси в момент времени, когда ускорения частиц направлены вдоль оси Ox:

$$\text{Ось } Ox: \qquad M\omega^2 r_1 = \frac{kq^2\sin\alpha}{R^2}, \tag{1}$$

$$-m\omega^2 r_2 = -\frac{kq^2\sin\alpha}{R^2}, \tag{2}$$

$$\text{Ось } Oy: \qquad qE = \frac{kq^2\cos\alpha}{R^2}, \tag{3}$$

где r_1 и r_2 — орбиты окружностей, по которым движутся частицы M и m соответственно.

Заметим также, что

$$r_1 + r_2 = R\sin\alpha. \tag{4}$$

Таким образом, из (1), (2) и (4) находим:

$$R = \sqrt[3]{\frac{kq^2}{\omega^2}\frac{M+m}{Mm}}.$$

Наконец, используя (3), получим:

$$H = R\cos\alpha = \frac{qE}{\omega^2}\frac{M+m}{Mm}.$$

Задача 5. Горячий коктейль

Из графика понятно, что сначала обе жидкости нагревались, затем на участке 2–3 первая жидкость выкипала. Далее нагревалась только вторая жидкость, и на участке 4–5 выкипела и она. Измерим угловые коэффициенты касательных к криволинейным участкам графика в точках 1, 2, 3 и 4: $k_i = \Delta t(\tau_i)/\Delta\tau$. Температура окружающей среды $t = t_1$. Пусть исходная масса каждой из жидкостей равна m, мощность нагревателя P, а мощность тепловых потерь $N = \alpha(t - t_1)$.

Рассмотрим процесс нагревания жидкости, например, вблизи точки 3. За малое время $\Delta\tau$ нагреватель отдаёт количество теплоты $\Delta Q_+ = P\Delta\tau$, а величина тепловых потерь составит $\Delta Q_- = \alpha(t_2 - t_1)\Delta\tau$. Тогда температура второй жидкости поднимется на:

$$\Delta t = \frac{Q_+ - Q_-}{c_2 m}, \quad \text{откуда} \quad k_3 = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P - \alpha(t_2 - t_1)}{c_2 m}.$$

Таким образом, для точки 3 имеем:

$$P = k_3 c_2 m + \alpha(t_2 - t_1). \tag{1}$$

Аналогично для точки 2 запишем:

$$P = k_2(c_1 m + c_2 m) + \alpha(t_2 - t_1). \tag{2}$$

Вычтя уравнение (2) из (1), получим:

$$k_3 c_2 m = k_2(c_1 m + c_2 m), \qquad \text{откуда} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_3}{k_2} - 1 \approx 1{,}8.$$

Для точки 4 можем записать аналогичное уравнение:

$$P = k_4 c_2 m + \alpha(t_4 - t_1). \tag{3}$$

На участках 2–3 и 4–5 температура была постоянной. Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau_{32} = L_1 m + \alpha(t_2 - t_1)\tau_{32}, \tag{4}$$

$$P\tau_{54} = L_2 m + \alpha(t_4 - t_1)\tau_{54}. \tag{5}$$

Подставив в уравнение (4) значение для мощности из (1) и аналогично подставив из (3) в (5), найдём:

$$L_1 m = k_3 c_2 m \tau_{32}, \quad L_2 m = k_4 c_2 m \tau_{54}, \quad \text{откуда} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{k_3 \tau_{32}}{k_4 \tau_{54}} \approx 4{,}4.$$

11 класс

Задача 1. Муравей-спортсмен

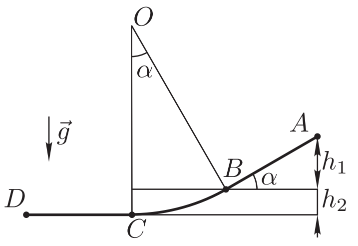


Рис. 24

Полное время движения муравья складывается из времени движения t_1 по участку AB, времени t_2 на участке BC и времени t_3 на участке CD. Пусть $AB = l$.

1. Восстановим из точек B и C перпендикуляры к траектории движения муравья, они являются радиусами дуги BC (рис. 24). Пусть $\angle BOC = \alpha = 2l/R$. Поскольку $l \ll R$, то $\sin\alpha \approx \alpha = 2l/R$. Ускорение на прямолинейном участке AB равно $a_1 = g\sin\alpha = 2gl/R$.

$$\text{Поскольку} \quad l = \frac{a_1 t_1^2}{2}, \quad \text{то} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a_1}} = \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Скорость в конце этого участка $v_B = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl\sin\alpha} = 2l\sqrt{g/R}$.

2. Вычислим t_2. Из закона сохранения энергии найдём скорость v_C муравья в точке C. Это будет его наибольшая скорость.

$$mg(h_1 + h_2) = \frac{mv_C^2}{2}, \quad \text{следовательно,} \quad v_C = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}.$$

Найдём $h_1 + h_2$.

$$h_1 = l\sin\alpha = 2\frac{l^2}{R}, \quad h_2 = R(1 - \cos\alpha) = 2R\sin^2(\alpha/2) = 2R(\alpha/2)^2 = 2\frac{l^2}{R},$$

$$h_1 + h_2 = 4\frac{l^2}{R}, \quad \text{таким образом,} \quad v_C = 2l\sqrt{\frac{2g}{R}}.$$

На участке BC движение муравья аналогично колебательному движению математического маятника с длиной подвеса R. Его циклическая частота $\omega = \sqrt{g/R}$. Время t_2 движения муравья из точки B в точку C равно времени его обратного движения из точки C в точку B, которое можно найти из уравнения гармонических колебаний:

$$v_B = v_C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t_2\right), \quad \text{откуда} \quad t_2 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{v_B}{v_C} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

.

3. На отрезке CD муравей движется равномерно со скоростью v_C, следовательно, $t_3 = \dfrac{3l}{v_C} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{R}{2g}}$.

Полное время движения муравья

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \approx 2{,}85\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Задача 2. Какой КПД больше?

Пусть за цикл газ совершает работу $A_0 = \Delta p \Delta V$. Тогда $\eta_C = A_0/Q_{172}$, где подведённое к газу количество теплоты $Q_{172} = U_{12} + A_{72}$. Аналогично $\eta_D = A_0/Q_{283}$, где $Q_{283} = U_{23} + A_{83}$. Заметим, что $A_{83} = A_{72} + A_0$. Сравним изменения внутренних энергий U_{12} и U_{23}. Выражение для U_{12}:

$$U_{12} = \frac{C_V}{R}(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = \\ = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + \Delta p\Delta V) = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + A_0).$$

Аналогичным образом получим, что

$$U_{23} = \frac{C_V}{R}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{C_V}{R}(p_2\Delta V + V_2\Delta p + A_0) = \\ = \frac{C_V}{R}(p_1\Delta V + V_1\Delta p + 3A_0) = U_{12} + 2\frac{C_V}{R}A_0.$$

Отсюда

$$\eta_C = \frac{A_0}{Q_{172}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72}},$$

$$\eta_D = \frac{A_0}{Q_{283}} = \frac{A_0}{U_{23} + A_{83}} = \frac{A_0}{U_{12} + A_{72} + \dfrac{2C_V + R}{R}A_0} = \\ = \frac{\eta_C}{1 + \dfrac{C_V + C_p}{R}\eta_C} = \frac{\eta_C}{1 + 4\eta_C}.$$

Откуда $\eta_D < \eta_C$.

Задача 3. Изолированная система

Поскольку система теплоизолированная, то можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$E_1 + A = E_2,$$

где E_1 и E_2 — энергии системы соответственно до и после замыкания ключа, а A — работа внешних сил. В нашем случае это работа электродвижущих

сил. Поскольку система вначале находилась в равновесии, то масса поршня $m = pS/g$.

Пусть через источник ЭДС протёк заряд q. Тогда дно сосуда и поршень окажутся заряженными, образуя пластины конденсатора. Ёмкость этого конденсатора в конечном состоянии будет $C = \varepsilon_0 S/H$, где S — площадь дна сосуда. Поскольку напряжение на конденсаторе равно $\mathscr{E}$, то протёкший через источник ЭДС заряд:

$$q = C\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}}{H}.$$

Поскольку на пластинах находятся разноимённые заряды, то они притягиваются с силой

$$F = \frac{q^2/S}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2H^2}.$$

В конечном состоянии давление газа будет $p + F/S$.

Таким образом,

$$\frac{C_V}{R}p_1V_1 + mgh + \mathscr{E}q = \frac{C_V}{R}p_2V_2 + mgH + \frac{q^2}{2C};$$

$$\frac{3}{2}pSh + pSh + \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{H} = \frac{3}{2}\left(p + \frac{\varepsilon_0\mathscr{E}^2}{2H^2}\right)SH + pSH + \frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{2H};$$

$$\frac{5}{2}pS(H - h) = -\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_0 S\mathscr{E}^2}{H},$$

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 - \left(\frac{H}{h}\right) = -\frac{\varepsilon_0\mathscr{E}^2}{10h^2p}.$$

Решая квадратное уравнение, найдём

$$H = h\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_0\mathscr{E}^2}{10h^2p}}\right),$$

так как нас интересует больший корень. С учётом того, что

$$\frac{\varepsilon_0\mathscr{E}^2}{h^2p} \ll 1,$$

получим

$$H \approx h\left(1 - \frac{\varepsilon_0\mathscr{E}^2}{10h^2p}\right).$$

Задача 4. Массивный канат

Условие равновесия подвижного блока с грузом и куском каната AC:

$$2T_A = Mg + \frac{m}{l}\pi Rg.$$

Отсюда сила натяжения в точке A:

$$T_A = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g.$$

Причём $T_C = T_A$. Сила натяжения в точке B:

$$T_B = T_A + \frac{m}{l}H_2g = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g + \frac{m}{l}H_2g.$$

Для нахождения F переместим мысленно кусок каната KC, сместив точку C вниз на малое расстояние x. Работа всех сил над куском каната KC равна изменению потенциальной энергии этого куска:

$$T_Cx - Fx = \frac{m}{l}xgH_1.$$

Итак,

$$F = T_C - \frac{m}{l}gH_1 = \frac{1}{2}Mg + \frac{\pi mR}{2l}g - \frac{m}{l}H_1g.$$

Задача 5. Очень толстая линза

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу о падении параллельного пучка света на сферическую поверхность радиуса R, отделяющую среду с показателем преломления n от воздуха. Рассмотрим два луча, падающие на поверхность раздела под малыми углами. Пусть луч DOF (рис. 25) проходит через центр шара. Другой луч, ABF, преломляется в точке B на границе раздела сред, падая на неё под углом α. Тогда $\angle OBF = \alpha/n$ как угол преломления, $\angle BOD = \alpha$; из $\triangle BOF$ находим, что $\angle BFO = \alpha - \alpha/n$. Применим к $\triangle BOF$ теорему синусов и учтём, что синус малого угла приближённо равен самому углу в радианах:

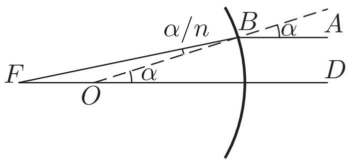


Рис. 25

$$\frac{\alpha/n}{|OF|} \approx \frac{\alpha(1-1/n)}{|BO|} \approx \frac{\alpha}{|BF|},$$

отсюда $|BF| = |BO|/(1-1/n) = Rn/(n-1)$. Таким образом, узкий параллельный пучок лучей после преломления на сферической поверхности раздела сред сходится в фокусе, находящемся от поверхности раздела на расстоянии $Rn/(n-1)$ на луче, проходящем через центр.

Аналогичным образом получаем, что при падении на вогнутую сферическую поверхность раздела сред (радиус R) параллельный пучок света преобразуется в расходящийся, продолжения лучей пересекаются на расстоянии $Rn/(n-1)$ от поверхности.

1. Перейдём теперь к ответам на вопросы задачи. Параллельный пучок света будет преобразован оптической системой в параллельный, если фокусы двух сферических поверхностей совпадают. В условии не сказано, выпуклыми или вогнутыми являются поверхности раздела. Поэтому следует рассмотреть все возможные случаи.

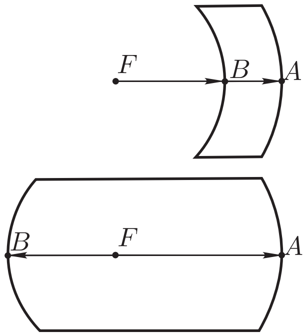


Рис. 26

[l] Если предположить, что поверхность большего радиуса вогнутая, то получаемый после преломления на ней расходящийся пучок может быть преобразован в параллельный только путём преломления на поверхности радиуса $r > R$, что противоречит условию задачи. Напротив, поверхность радиуса r может быть как выпуклой, так и вогнутой (рис. 26). В обоих случаях $|AF| = Rn/(n-1)$, $|BF| = rn/(n-1)$. Следовательно, в первом случае $l = |AB| = (R-r)n/(n-1)$, во втором случае $l = |AB| = (R+r)n/(n-1)$.

2. При прохождении через пластинку пучок света сжимается в R/r раз, следовательно, его интенсивность возрастает в $(R/r)^2$ раз.

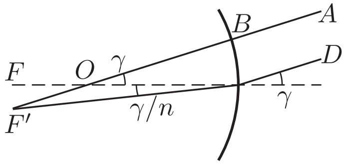


Рис. 27

3. Найдём угловое увеличение, даваемое пластинкой. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу: определим, под каким углом γ к оси симметрии (рис. 27) должен падать параллельный пучок света, чтобы после преломления на сферической поверхности радиуса R сойтись в точке F' на расстоянии y от фокуса F в фокальной плоскости. Из симметрии относительно поворота вытекает, что

$$\gamma = \frac{y}{|OF|} = \frac{y(n-1)}{R}.$$

Следовательно, падающий на сферическую поверхность под углом γ параллельный пучок света после преломления сходится в точку в фокальной плоскости, находящуюся на расстоянии $\gamma R/(n-1)$ от фокуса F.

Таким образом, пучок, падающий на пластинку под углом γ_1 к оси симметрии параллельно ей, выходит из пластинки под углом γ_2, определяемым из соотношения $\gamma_1 R/(n-1) = \gamma_2 r/(n-1)$. Отсюда находим угловое увеличение: $\gamma_1/\gamma_2 = r/R$.

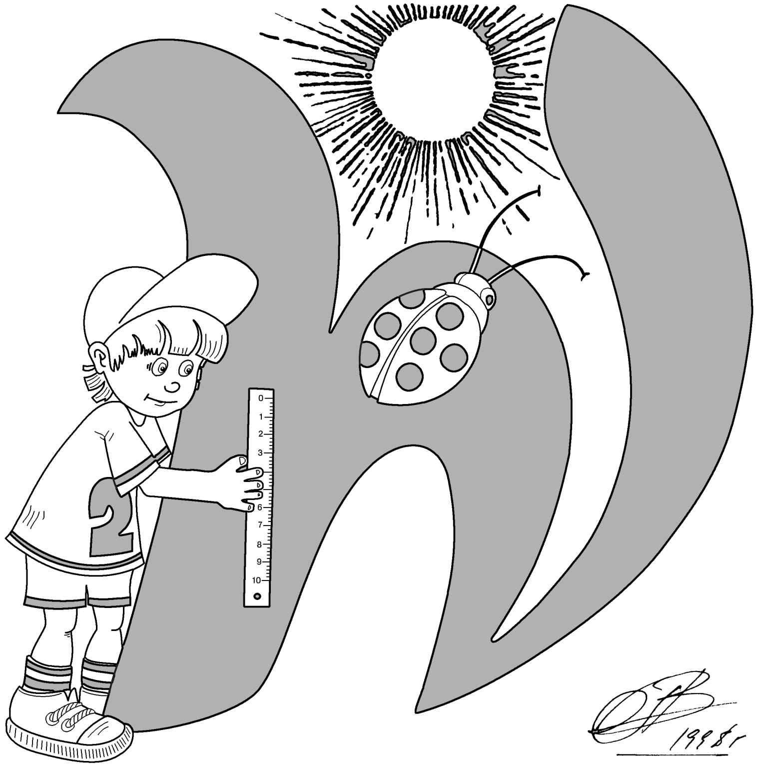
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Экспериментальный тур

Методическое пособие



МФТИ, 2007/2008 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Ерофеев И., Иоголевич И.	1. Ерофеев И., Иоголевич И.	1. Слободянин В.
2. Мельниковский Л.	2. Шведов О.	2. Мельниковский Л., Соловьёва К.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Сметнёв Д.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 28 января 2013 г. в 15:09.

141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Шаровой сегмент

Шаровым сегментом называется тело, ограниченное сферической поверхностью и плоскостью (рис. 1). При помощи данного оборудования постройте график зависимости объёма v шарового сегмента единичного радиуса $r = 1$ от его высоты h.

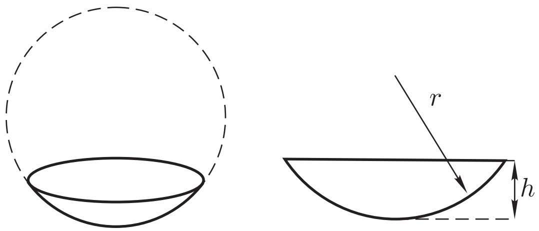


Рис. 1

Примечание. Формула объёма шарового сегмента не предполагается известной. Плотность воды принять равной $\rho = 1{,}0$ г/см^3

Оборудование. Стакан с водой, теннисный шарик известной массы m, шприц с иглой, лист миллиметровой бумаги, скотч, ножницы.

Рекомендации для организаторов. Стакан желательно взять цилиндрический с прозрачными стенками без рифлёных поверхностей. Шарики от настольного тенниса стоит проколоть иглой от шприца (не насквозь). Объём шприца 5 мл. Сообщить каждому участнику массу его шарика с точностью до десятой доли грамма.

Задача 2. Угол между зеркалами

Определите двугранный угол между зеркалами с наибольшей точностью.

Оборудование. Система из двух зеркал, измерительная лента, 3 булавки, лист картона.

Рекомендации для организаторов. Для установки требуются 2 зеркала размером приблизительно 3×4 см^2 и 5 прямоугольных пластинок из оргстекла. Зеркала должны составлять двугранный угол $\alpha = 33^\circ$ и быть помещены в «домик» из оргстекла (рис. 2).

[l] Таким образом, «домик» открыт с одной стороны. Конструкция должна быть достаточно жёсткой, для чего все элементы констукции необходимо склеить. Для точной выдержки угла удобно сделать треугольный шаблон. В качестве измерительной ленты лучше взять нежёсткий швейный сантиметр без миллиметровых делений длиной в 150 см. Размер картона должен быть порядка 100×70 см^2, он должен быть достаточно плотным, чтобы булавки хорошо втыкались в него и надёжно держались.

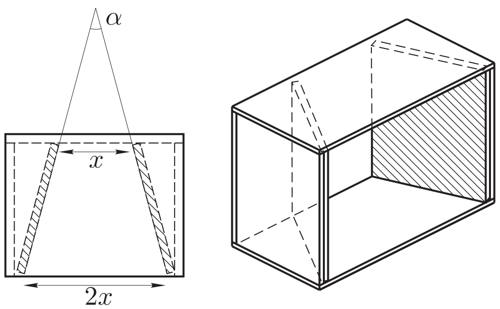


Рис. 2

10 класс

Задача 1. Устойчивая пробирка

1. Найдите массу выданной вам пробирки и её внешний и внутренний диаметры.
2. Вычислите теоретически, при какой наименьшей высоте $h_{\min}$ и наибольшей высоте $h_{\max}$ налитой в пробирку воды она будет устойчиво плавать в вертикальном положении, и найдите численные значения, используя результаты первого пункта.
3. Определите $h_{\min}$ и $h_{\max}$ экспериментально и сравните с результатами пункта 2.

Оборудование. Пробирка неизвестной массы с наклеенной шкалой, сосуд с водой, стаканчик, лист миллиметровой бумаги, нитка.

Примечание. Отклеивать шкалу от пробирки запрещается!

Рекомендации для организаторов. Диаметр пробирки 1–2 см. Длина — около 20 см. Заранее на пробирку скотчем должна быть надёжно приклеена полоска миллиметровой бумаги с отмеченными и подписанными делениями через каждый сантиметр. Ширина полоски около 5 мм. Длина — на 1 см короче длины пробирки. На пробирках с закруглённым дном удобнее всего совместить начало отсчёта длины с верхним концом пробирки. В качестве сосуда удобно использовать прозрачную двухлитровую пластиковую бутылку с обрезанным верхом. Воды необходимо налить столько, сколько достаточно, чтобы пробирка при полном погружении не касалась дна.

Задача 2. «Серый ящик»

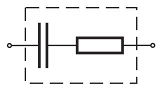


Рис. 3

В «сером ящике» с двумя выводами находится электрическая цепь (рис. 3). Определите ёмкость конденсатора и сопротивление резистора.

Оборудование. «Серый ящик», батарейка, вольтметр, который можно считать идеальным, секундомер, резистор с известным сопротивлением, провода, ключ, монтажная плата.

Рекомендации для организаторов. Ёмкость конденсатора и сопротивления резисторов следует выбирать достаточно большими, чтобы время разрядки конденсатора через каждый из резисторов составляло порядка нескольких десятков секунд (возможные значения $C \simeq 1000$ мкФ, $R \simeq 50$ кОм). Сопротивление вольтметра должно быть много больше сопротивления резисторов (подойдёт цифровой мультиметр). Батарейку можно взять стандартную, с напряжением 1,5–4,5 В.

11 класс

Задача 1. Полезный цитрус

Из медной и цинковой пластин, лимона и салфеток соберите гальванический элемент. Снимите зависимость $U(I)$ напряжения на элементе от силы тока через него. Постройте график этой зависимости. При помощи выданного оборудования определите цвет свечения светодиодов.

Оборудование. Лимон, салфетки, набор цинковых и медных пластин, переменный резистор, вольтметр, амперметр, набор пронумерованных светодиодов, канцелярский нож, клипсы, тарелка, миллиметровая бумага.

Примечание. Необходимо ждать, пока показания приборов стабилизируются. Показания считать установившимися, если они не изменяются в течение 5 секунд.

Рекомендации для организаторов. В качестве цинковой и медной пластины желательно использовать оцинкованное железо и односторонний текстолит. Размеры пластин должны быть около 10×10 см^2. К каждой пластине необходимо припаять провод длиной 10–20 см. У участника должны быть 5 пар пластин. Сопротивление переменного резистора 5 кОм. К резистору необходимо припаять провода длиной 10–20 см. В качестве вольтметра и амперметра рекомендуется использовать 2 цифровых мультиметра. Светодиоды должны иметь прозрачный, не матовый корпус (линзу), чтобы участники могли определить цвет только по его свечению. Светодиоды должны ярко светиться от 3 В. К ним также необходимо припаять провода. Каждому участнику рекомендуется дать по 3 светодиода с разными цветами свечения. Клипсы по возможности большего размера. Лимоны надо брать в одном магазине. В качестве салфеток рекомендуется дать одноразовые носовые платки. Тарелку рекомендуется дать пластиковую, одноразовую, а нож канцелярский.

Задача 2. Гнётся и не ломается

Под действием силы $\vec{F}$ зажатая с края горизонтальная упругая лёгкая пластина деформируется (рис. 4). В линейном (по силе $\vec{F}$) приближении её форма описывается выражением

$$y(x) = \frac{F}{2dD}\left(x^2 l - \frac{x^3}{3}\right).$$

Рис. 4

Здесь d — ширина линейки, l — длина линейки, D — так называемая «цилиндрическая жёсткость» пластины.

Определите цилиндрическую жёсткость линейки. Оцените модуль Юнга E древесины линейки.

Оборудование. Штатив с двумя лапками, грузы известной массы, деревянная линейка, лазерная указка, пластилин, зеркальце.

Рекомендации для организаторов. В качестве грузов удобнее всего взять монетки разного достоинства (и сообщить участникам их массы). Длина линейки $30 \div 50$ см.

Размеры зеркальца $\sim 2 \times 2$ см^2. Объём пластилина ~ 1 см

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Шаровой сегмент

Для начала измерим радиус шарика, отрезав тонкую полоску миллиметровой бумаги и обмотав ей шарик n раз. Радиус шарика $R = l/(2\pi n)$, где l — длина миллиметровой бумаги.

Нальём воды в стакан. Для уменьшения ошибки последующих измерений глубин погружения шарика, вызванной паралаксом можно приклеить скотчем полоски миллиметровой бумаги к стакану с двух сторон (можно воспользоваться уже имеющейся длинной полоской, разрезав её пополам). Выровняв по уровню воды начала отсчета обеих полосок, мы получаем довольно точный измерительный аппарат. Совмещая соответствующие деления обеих полосок с нижним краем шарика, мы можем находить глубину его погружения H.

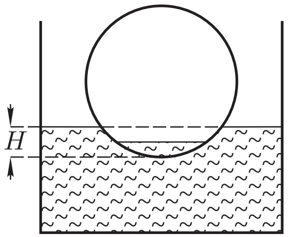


Рис. 5

Рассмотрим плавающий шарик с некоторой массой M воды внутри (рис. 5). Сила тяжести, действующая на шарик, уравновешивается силой архимеда вытесненной воды $(M+m)g = \rho g V$, где V как раз и есть объём шарового сегмента высоты H. Получаем, что $V = (M+m)/\rho$.

Теперь мы можем снять зависимость объёма шарового сегмента шарика от его высоты, доливая при помощи шприца по 0,1 г воды. Но это не совсем то, что спрашивается в задаче. Мы должны отнормировать H и V. Понятно, что для получения нужных величин следует уменьшить все линейные размеры в R раз. То есть $h = H/R$. Тогда объём $v = V/R^3$.

В результате получим необходимый график.

Примечание. Экспериментально полученный график не совпадает с теоретическим, описываемым формулой $v = \pi h^2(1 - h/3)$, из-за поверхностного натяжения.

Задача 2. Угол между зеркалами

При трёхкратном отражении от зеркал, луч может вернуться по тому же самому пути. Тогда он претерпевает одно отражение под углом 90°. Рассмотрим два таких луча, падающих на оба зеркала. Из геометрических построений можно найти, что угол между ними $\gamma = \pi - 3\alpha$ (рис. 6), где α — угол между зеркалами.

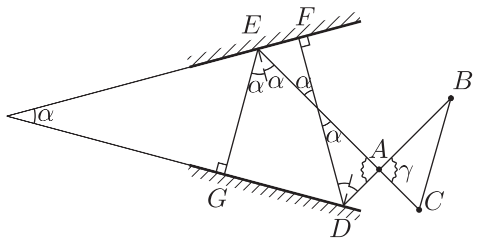


Рис. 6

Таким образом, требуется выставить булавку A примерно посередине и вблизи зеркал. Затем выставить булавку B так, чтобы она, её отражение и булавка A лежали на одной прямой. Аналогично выставляем булавку C. Для увеличения точности булавки B и C надо выставить подальше от A. Измерим расстояния $|AB|$, $|BC|$ и $|AC|$. Угол γ найдём по формуле косинусов:

$$\cos\gamma = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|}.$$

А угол $\alpha = \dfrac{\pi - \gamma}{3}$.

10 класс

Задача 1. Устойчивая пробирка

1. Обернём несколько раз пробирку ниткой. Приложим нитку к шкале и вычислим по формуле $D_0 = l/(n\pi)$ внешний диаметр пробирки, где l — длина намотанной нитки, n — количество оборотов.

Пусть пробирка плавает вертикально (рис. 7). Запишем равенство нулю суммы всех сил, действующих на пробирку:

$$Mg + \rho g h S_1 = \rho g H S_0, \qquad (1)$$

где S_0 и S_1 — площади внешнего и внутреннего сечения пробирки, M — масса пробирки. Поделив обе части на $\rho g S_0$, увидим, что между глубиной погружения пробирки и высотой налитой в неё воды есть зависимость:

$$H = h\frac{S_1}{S_0} + \frac{M}{\rho S_0}.$$

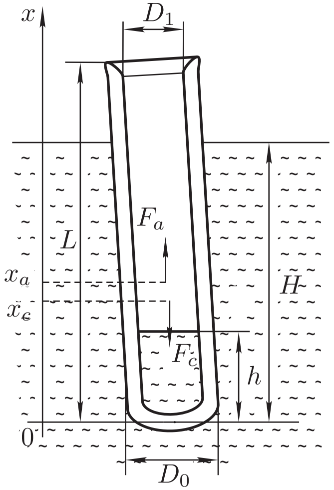


Рис. 7

Снимем зависимость $H(h)$ и изобразим её на графике. Масса пробирки $M = \rho\pi D_0^2 y_0$, где y_0 — координата точки пересечения графика с осью ординат. Внутренний диаметр равен $D_1 = \sqrt{\alpha} D_0$, где α — угловой коэффициент наклона графика. Заметим, что начиная с некоторого момента при заметном подъёме уровня воды в пробирке уровень её погружения почти не изменяется. При проведении прямой эти данные нужно отбросить.

2. Для устойчивого плавания пробирки необходимо, чтобы центр тяжести системы «пробирка + налитая вода» был ниже точки приложения силы Архимеда; в критическом положении они совпадают, то есть $x_c = x_{\text{арх}}$. Введём безразмерные коэффициенты: $\beta = S_1/S_0$ — отношение площади внутреннего сечения к внешнему, и $\gamma = M/(\rho S_0 L)$ — отношение массы пробирки к массе воды, вытесняемой пробиркой при полном погружении. Тогда

$$x_c = \frac{1}{2}\frac{\beta h^2/L + \gamma L}{\gamma + \beta h/L}, \qquad x_{\text{арх}} = \frac{1}{2}(\gamma L + \beta h),$$

а после преобразований и нахождения корней квадратного уравнения:

$$h_{\text{крит }1,2} = \frac{\gamma\beta \pm \sqrt{\gamma^2\beta + \gamma\beta^2 - \gamma\beta}}{\beta(1-\beta)}L. \qquad (2)$$

Знак «$-$» соответствует наименьшей высоте столба $h_{\min}$.

Максимальная же высота $h_{\max}$ обусловлена тем, что пробирка начинает тонуть (в (1) $H = L$). Откуда

$$h_{\max} = \frac{L}{\beta}(1-\gamma), \quad h_{\min} = \frac{\gamma\beta - \sqrt{\gamma^2\beta + \gamma\beta^2 - \gamma\beta}}{\beta(1-\beta)}L.$$

3. Для экспериментального нахождения наибольшей и наименьшей высоты воды в пробирке, при которой она устойчиво плавает в вертикальном положении, проведём серию из нескольких измерений, постепенно доливая в пробирку воды. Значение $h_{\max}$ оказывается больше теоретического по причине значительного поверхностного натяжения

Задача 2. «Серый ящик»

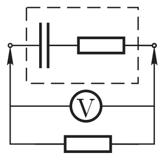


Рис. 8

Пусть C_X и R_X — неизвестные ёмкость конденсатора и сопротивление резистора «серого ящика», R_0 — известное сопротивление резистора.

С помощью батарейки зарядим конденсатор до некоторого напряжения U_C, которое можно измерить после отсоединения батарейки, подсоединив вольтметр к выводам «серого ящика». Подсоединим теперь параллельно вольтметру резистор с известным сопротивлением R_0 (рис. 8). Тогда показание вольтметра станет $U = U_C R_0/(R_0 + R_X)$; отсюда найдем $R_X = (U_C/U - 1)R_0$. Значение U меняется от опыта к опыту, поэтому следует провести серию опытов и взять среднее значение.

Построим график зависимости показания вольтметра $U(t)$ от времени t. На начальном этапе эту зависимость можно считать линейной:

$$U(t) \simeq U_0 - kt.$$

При этом напряжение на конденсаторе равно $U_C(t) = U(t)(1 + R_X/R_0)$, а заряд

$$Q(t) = C_X U(t)(1 + R_X/R_0) = C_X(U_0 - kt)(1 + R_X/R_0).$$

Скорость изменения заряда конденсатора, равная силе тока в цепи, равна по модулю $I = C_X k(1 + R_X/R_0)$, показание вольтметра составляет $U_0 = IR_0 = kC_X(R_0 + R_X)$. Следовательно, ёмкость конденсатора

$$C_X = \frac{U_0}{k(R_0 + R_X)}$$

выражается через известные величины (коэффициент k измеряется по графику).

Для проверки результатов можно провести несколько опытов с различными значениями напряжения на конденсаторе.

11 класс

Задача 1. Полезный цитрус

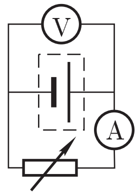


Рис. 9

Собираем гальванический элемент. Для этого помещаем хорошо пропитанную лимонным соком салфетку между двумя различными пластинами. Данную конструкцию зажимаем клипсами. Собираем схему для снятия вольтамперной характеристики (рис. 9). При снятии характеристики необходимо каждый раз выжидать некоторое время, пока показания приборов не стабилизируются. Строим график $U(I)$. Из графика видно, что максимальное значение U порядка 0,8 В (рис. 10). Этого не достаточно для зажигания светодиода, поэтому для определения цвета свечения светодиодов требуется собрать батарею из нескольких гальванических элементов, соединив их последовательно.

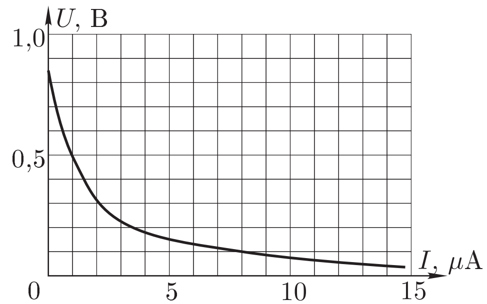


Рис. 10

Задача 2. Гнётся и не ломается

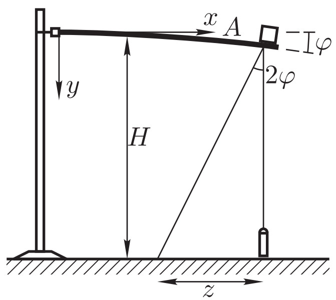


Рис. 11

Установим штатив с горизонтальной линейкой на стол (рис. 11). Прикрепим зеркальце на нижнюю сторону линейки у её свободного края при помощи пластилина. Зафиксируем лазер при помощи второй лапки на штативе под линейкой так, чтобы его луч попадал на зеркальце. Кусочками пластилина будем отмечать на полу положение зайчика в зависимости от массы груза, нагружающего линейку.

Угол поворота зеркальца определяется выражением

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = y'(x)\big|_{x=l} = \frac{Fl^2}{2dD}$$

и в линейном приближении пропорционален приложенным силам. С другой стороны, изменение угла φ можно получить, измерив смещение зайчика z:

$$2\varphi = \frac{Hz}{H^2 + z^2}.$$

Построив график зависимости смещения зайчика z от веса груза mg, получим цилиндрическую жёсткость D.

Для оценки модуля Юнга древесины E заметим, что относительная деформация верхней поверхности линейки $\delta l = h\varphi/l$, где h — толщина линейки. Из условия равенства моментов $Ehd \cdot h \cdot h\varphi/l \sim lF$ получаем $D \sim Eh^3$.