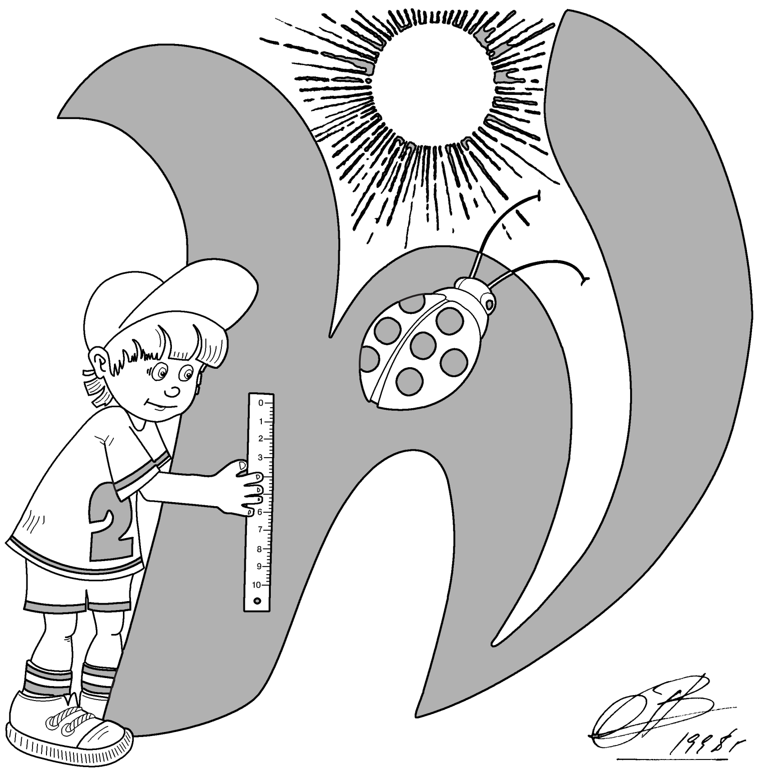
Федеральное агентство по образованию
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Окружной этап

Теоретический тур

Методическое пособие



МФТИ, 2002/2003 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования и науки Российской Федерации
Телефоны: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: **fizolimp@mail.ru** (с припиской **antispam** к теме письма)

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Шведов О.	1. Дунин С., Шведов О.	1. Крюков А.
2. Кузьмичев С.	2. Чивилев В.	2. Чивилев В.
3. Слободянин В.	3. Крюков А.	3. Чудновский А.
4. Слободянин В.	4. Мельниковский Л.	4. Александров Д.
	5. Шведов О.	5. Шведов О.

Ответственные за классы

9 класс	10 класс	11 класс
Шведов О.	Мельниковский Л.	Чивилев В.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В., Чудновский А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Самокотин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

Подписано в печать 14 марта 2005 г. в 22:42.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Тормозной путь

Исследуется зависимость тормозного пути S_T, который проходит материальная точка при прямолинейном движении в однородной среде с неизвестными свойствами, от ее начальной скорости v. График этой зависимости имеет вид, показанный на рис. 1.

Какой путь S проходит материальная точка за время, в течение которого скорость изменяется от $v_1 = 4$ м/с до $v_2 = 3{,}99$ м/с? За какое время τ она проходит этот путь? Чему равно ускорение a материальной точки в момент, когда ее скорость $v_1 = 4$ м/с? Действие всех сил на материальную точку, кроме силы сопротивления среды, скомпенсировано.

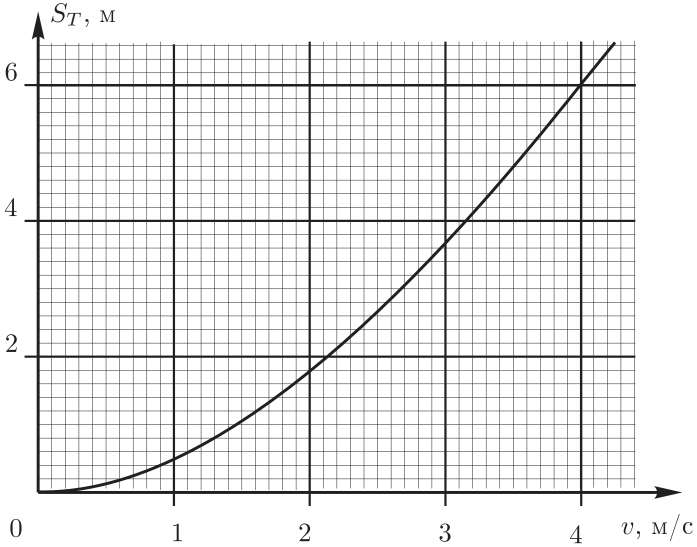


Рис. 1

Задача 2. Шайба в рамке

На горизонтальной поверхности лежит прямоугольная рамка, длинная сторона которой равна L. Внутри рамки покоится маленькая шайба *Ш*.

Рамку начинают двигать по поверхности с постоянной скоростью v_0 (рис. 2). Определите интервал времени τ между двумя последовательными столкновениями шайбы с задней стенкой AB рамки. Коэффициент трения между шайбой *Ш* и горизонтальной поверхностью равен μ, а удар шайбы о стенки рамки абсолютно упругий.

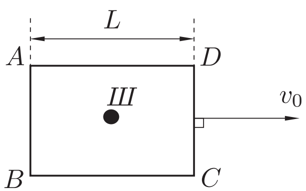


Рис. 2

Задача 3. «Разные, но равные»

В электрических цепях (рис. 3 и 4) сопротивления R_{AB} (между зажимами A и B) и R_{CD} (между зажимами C и D) равны, сопротивления резисторов R_1,R_2 и R_3 заданы. Найдите все возможные значения сопротивления R_x.

Примечание. Для всякой схемы, состоящей из трех резисторов, соединенных «треугольником» (рис. 5), существует эквивалентная схема из трех резисторов, соединенных «звездой» (рис. 6).

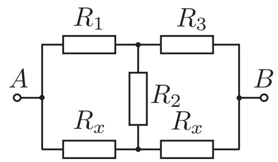


Рис. 3

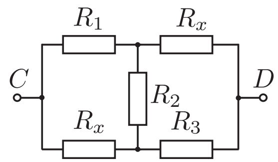


Рис. 4

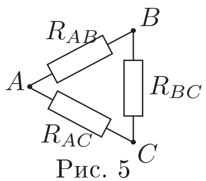


Рис. 5

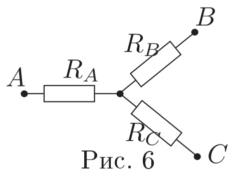


Рис. 6

Задача 4. Сенсационное открытие в оптике

В шестидесятых годах прошлого века группа советских физиков во главе с доктором физико-математических наук Виктором Георгиевичем Веселаго занималась поиском веществ, обладающих отрицательным показателем преломления. Поведение таких веществ было рассмотрено теоретически в статье, опубликованной в 1967 г. в журнале «Успехи физических наук» (том 92). В частности, в статье было показано, что остается справедливым закон преломления Снелла ($n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2$, где φ_1 — угол падения, а φ_2 — угол преломления, а n_1 и n_2 — соответствующие показатели преломления). При этом плоскопараллельная пластинка может при некоторых условиях быть идеальной «линзой». К сожалению, тогда найти вещества с такими свойствами не удалось. Однако в 2000 году группой физиков из университета Сан-Диего были созданы композитные материалы, обладающие отрицательным показателем преломления...

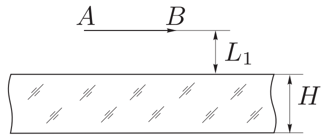


Рис. 7

Над прозрачной плоскопараллельной пластинкой, обладающей отрицательным показателем преломления $n = -1$, находится светящаяся стрелка AB (рис. 7). Расстояние от нее до пластинки $L_1 = 6$ см, толщина пластинки $H = 10$ см. Под пластинкой возникает изображение $A''B''$ стрелки AB. Покажите построением, как получается это изображение. На каком расстоянии L_2 от нижней стороны плоскопараллельной пластинки будет находиться изображение $A''B''$? Действительным или мнимым будет это изображение? Найдите увеличение k, даваемое такой пластинкой в рассматриваемом случае. Будет ли это изображение единственным во всем пространстве? Отражения от границ раздела пластинка-воздух не учитывать.

10 класс

Задача 1. «Догонялки»

Маленькая шайба массы m_1 лежит на краю длинной доски массой m_2, покрытой смазкой. Трение между шайбой и доской вязкое (сила трения $|\vec{F}_{tr}| = \alpha v_{otn}$, где v_{otn} — скорость шайбы относительно доски). Система находится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбе сообщают скорость v_0, направленную вдоль доски. Каковы будут скорости v_1 шайбы и v_2 доски через достаточно большой промежуток времени? На каком расстоянии L от края доски окажется шайба?

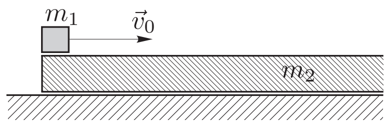


Рис. 8

Задача 2. Разлетающиеся шарики

В трех вершинах правильного тетраэдра с длиной ребра a удерживают три маленьких шарика, каждый из которых имеет массу M и заряд Q. В четвертой вершине удерживают еще один маленький шарик массой m и зарядом q. Известно, что $m \ll M$, а $Q = 2q$. Все шарики одновременно освобождают.
1. Найдите абсолютные величины скоростей V_1, V_2 и V_3 тяжелых и v легкого шариков после их разлета (удаления друг от друга на бесконечно большие расстояния).
2. Под какими углами α_1, α_2 и α_3 к грани тетраэдра, содержавшей три тяжелых шарика, они будут двигаться после разлета?

Задача 3. Повышение мощности дизельных двигателей

Для повышения мощности дизельных двигателей используются устройства, называемые турбокомпрессор и интеркулер. Турбокомпрессор позволяет увеличить начальное давление воздуха, подаваемого в цилиндры двигателя, а интеркулер — охлаждать сжатый воздух (рис. 9).

1. Какого (во сколько раз) максимального увеличения α_1 мощности двигателя можно достичь при помощи одного турбокомпрессора?

2. Каким будет максимальное увеличение α_2 мощности двигателя при использовании турбокомпрессора и интеркулера вместе?

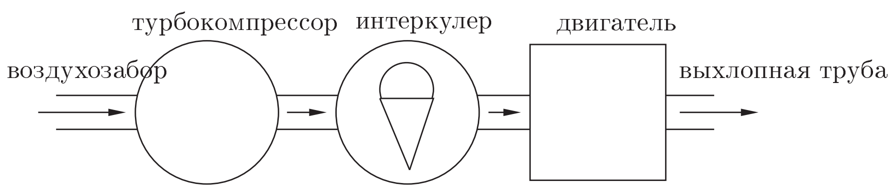


Рис. 9

Считайте, что турбокомпрессор сжимает воздух адиабатически, интеркулер охлаждает его изобарически, используя для этого забортный воздух, КПД двигателя не зависит от начального давления воздуха в цилиндрах, а мощность пропорциональна максимально возможному количеству сжигаемого топлива за цикл. В решении используйте следующие обозначения: p_1 — давление окружающего воздуха, T_1 — его температура, V_1 — объем цилиндров, а давление на выходе компрессора $p_2 = Kp_1$, причем $K = 2$.

Примечание. Уравнение адиабаты: $pV^\gamma = \text{const}$. Для воздуха $\gamma = 1{,}40$.

Задача 4. Сверхтекучий маятник

В высоком цилиндрическом сосуде радиуса $R = 4$ см с жидким гелием при температуре близкой к абсолютном нулю (так что гелий является сверхтекучим и трением можно пренебречь) вертикально плавает ареометр — пластмассовый цилиндр радиуса $r = 3{,}9$ см и массой $m = 500$ г. В результате малых колебаний ареометра уровень гелия в сосуде тоже колеблется, причем амплитуда этих колебаний $x = 1$ мм. Найдите максимальную скорость v уровня поверхности гелия при этих колебаниях. Считайте, что капиллярными эффектами можно пренебречь, а плотность гелия $\rho = 122$ кг/м^3.

Задача 5. Конденсаторы

Из конденсатора переменной емкости C и конденсаторов постоянных емкостей C_1 и C_2 собрана цепь (рис. 10). Производятся следующие действия:

1. Замыкают ключ K_1 и изменяют емкость конденсатора C.
2. Размыкают ключ K_1, замыкают ключ K_2 и изменяют емкость конденсатора C.
3. Размыкают ключ K_2 и изменяют емкость конденсатора C.

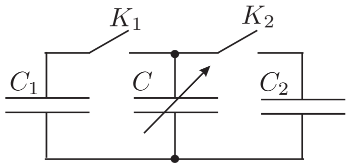


Рис. 10

На графике изображена зависимость заряда q на конденсаторе C от разности потенциалов U на нем. Начальные заряд и разность потенциалов на этом конденсаторе q_0 и U_0, промежуточные q_1 и U_1, $q_2 = q_0$ и U_2 известны. Найдите емкости конденсаторов C_1 и C_2, матрицу начальных и конечных разностей потенциалов на них, а также изменение ΔW энергии системы конденсаторов C_1 и C_2 в описанном процессе.

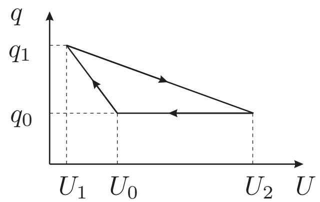


Рис. 11

11 класс

Задача 1. Доска на барабанах

На быстро вращающиеся навстречу друг другу барабаны кладется тонкая достаточно длинная доска, как показано на рисунке. Масса доски m, длина доски $2L$. Коэффициент трения скольжения между доской и барабанами μ, расстояние между осями барабанов $2b$. Найдите закон движения центра доски (координаты от времени), если угол наклона к горизонту прямой, соединяющей оси барабанов, равен α, а в начальный момент времени центр доски расположен симметрично относительно барабанов, и скорость доски равна нулю. Считайте, что в любой момент времени доска не теряет контакта с обоими барабанами. При каком соотношении между α и μ найденный закон движения реализуем?

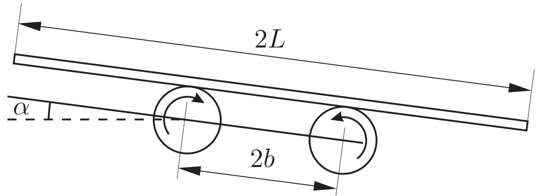


Рис. 12

Задача 2. Архимед

Стеклянный шар обьемом V и плотностью ρ_0 находится в сосуде с водой, плотность которой ρ (рис. 13). Воды достаточно много, так что шар полностью погружен в нее. Острый угол между стенкой конического сосуда и горизонтом составляет α. Внутренняя поверхность сосуда гладкая. Сосуд движется с постоянным ускорением a, направленным под острым углом γ к вертикали. Найдите силы давления шара N_1 и N_2 на дно и стенку сосуда соответственно. При каком соотношении между параметрами задачи V, ρ_0, ρ, α, γ шар не будет отрываться от дна при любых значениях ускорения $a > 0$?

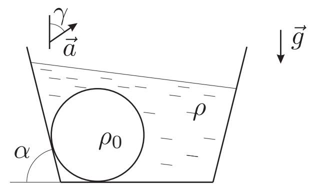


Рис. 13

Задача 3. Вода и пар над поршнем

Герметичный сосуд состоит из двух одинаковых шаров объемом $V = 5$ м^3 каждый и тонкой вертикальной трубки (рис. 14). Поршень в трубке делит сосуд на две части: в нижней — воздух при постоянной температуре, а в верхней — вода и пар, причем площадь свободной поверхности воды в верхнем шаре $S = 3$ см^2. При каких температурах T_0 воды и пара возможна такая ситуация, что при малых изменениях ΔT_0 этой температуры поршень смещается в одну и ту же сторону от положения равновесия независимо от знака ΔT_0?

Примечание. Если при некоторой температуре T давление насыщенного пара p, то их малые изменения связаны уравнением Клаузиуса $\Delta p = \Delta T \mu \lambda p/(RT^2)$, где молярная масса $\mu = 18$ г/моль, удельная теплота парообразования $\lambda = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Задача 4. «Изоэрга»

Экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что почти у всех известных ему изопроцессов (изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического) график зависимости давления от объема имеет соответствующее название: изохора, изобара, изотерма, адиабата. У процесса же, в ходе которого не изменяется внутренняя энергия, такого названия нет! Глюк решил восполнить этот пробел и назвал отмеченную зависимость «изоэргой». Далее он решил сравнить ход «изоэрги» с изотермой и адиабатой для реального одноатомного газа при условиях, близких к нормальным. На рисунке 15 приведены результаты его исследований. Выясните, какому из трех процессов $1-2$, $1-3$ или $1-4$ соответствует «изоэрга», какому — изотерма, а какому — адиабата. Ответ обоснуйте.

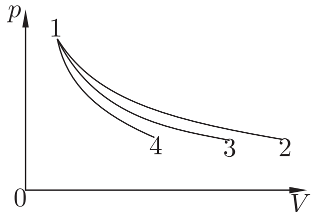


Рис. 15

Задача 5. Выделение тепла в схеме

Две катушки индуктивности включены в цепь (рис. 16). В начальном состоянии ключ замкнут, ток через него и катушку L_1 равен I_0, ток через катушку L_2 отсутствует. Какое количество теплоты Q выделится на резисторе R при размыкании ключа? Сопротивлением катушек в данном процессе можно пренебречь.

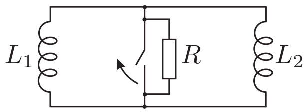


Рис. 16

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Тормозной путь

Путь, проходимый точкой за время, в течение которого скорость изменяется от v_1 до v_2 равен $S = S_T(v_1) - S_T(v_2)$. Как видно из рис. 17, участок графика от $v_1 = 4$ м/с до $v_2 = 3{,}99$ м/с можно считать прямой линией с угловым коэффициентом 6 м: 2,4 м/с=2,5 с. Поскольку $\Delta v = v_1 - v_2 = 0{,}01$ м/с (0,1 клетки), то $S = S_T(v_1) - S_T(v_2) = 0{,}025$ м (0,125 клетки). Искомый путь S пройден за время $\tau = S/v_1 = 0{,}00625$ с. Ускорение точки $a = \Delta v/\tau = 1{,}6$ м/с^2.

Задача 2. Шайба в рамке

Рассмотрим движение шайбы в С.О., связанной с рамкой. Пусть ось Ox направлена в сторону движения рамки. В этой системе отсчета шайба будет двигаться против оси Ox со скоростью v_0. После упругого удара о стенку AB, она изменит направление своего движения. При этом на шайбу начнет действовать сила трения $F_{tr} = \mu mg$, где m — масса шайбы. Ускорение шайбы всегда будет направлено против оси Ox. Когда шайба станет двигаться против оси Ox, модуль ее скорости будет увеличиваться, пока не достигнет v_0. В этот момент в системе отсчета, связанной со столом, шайба остановится. Таким образом, движение шайбы будет сходно с движением в однородном поле тяжести, напряженность которого направлена против оси Ox. Поскольку от стенки AB шайба отлетает вправо со скоростью v_0, то перед столкновением с ней она будет иметь скорость $-v_0$. С учетом этого решение задачи сводится к стандартной процедуре. Ускорение шайбы $a = \frac{F_{tr}}{m} = \mu g$. Возможны два случая.

1. Если $v_0^2/(2\mu g) < L$, то шайба не догонит стенку CD и $\tau = 2(v_0/a) = 2v_0/(\mu g)$.

2. Если $v_0^2/(2\mu g) \geqslant L$, то после упругого взаимодействия со стенкой CD шайба изменит направление своего движения. Из формулы $L = v_0 t - \mu g t^2/2$ найдем время движения от стенки AB до CD:

$$t_{1,2} = \frac{v_0}{\mu g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 - \frac{2L}{\mu g}}.$$

Так как вследствие удара о стенку CD время движения шайбы уменьшается, выбираем время t_1 со знаком «-» перед квадратным корнем. Тогда

$$\tau = 2t_1 = 2\frac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2L\mu g}{v_0^2}}\right).$$

Обобщим оба результата:

$$\tau = 2v_0/(\mu g), \qquad \text{при} \qquad v_0^2/(2\mu g) < L;$$

$$\tau = 2t_1 = 2\frac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2L\mu g}{v_0^2}}\right), \qquad \text{при} \qquad v_0^2/(2\mu g) \geqslant L.$$

Задача 3. «Разные, но равные»

Наиболее просто вычислить сопротивления R_{AB} и R_{CD}, если соединение резисторов R_1, R_2 и R_x «треугольником» (на рис. 17 и 18 оно обведено пунктирным контуром) заменить эквивалентным соединением «звездой» (рис. 19 и 20).

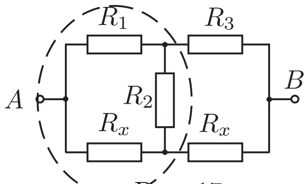


Рис. 17

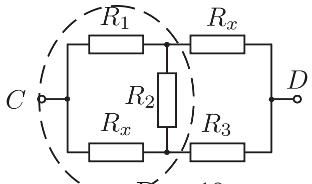


Рис. 18

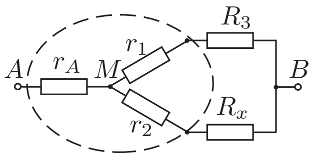


Рис. 19

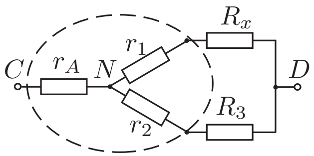


Рис. 20

Поскольку $R_{AB} = R_{CD}$, то и $R_{MB} = R_{ND}$, так как r_A соединено последовательно с каждым из них:

$$R_{MB} = \frac{(r_1 + R_3)(r_2 + R_x)}{r_1 + r_2 + R_3 + R_x} = R_{ND} = \frac{(r_1 + R_x)(r_2 + R_3)}{r_1 + r_2 + R_3 + R_x}.$$

Так как в последнем уравнении знаменатели равны, то должны быть равны и числители: $(r_1 + R_3)(r_2 + R_x) = (r_1 + R_x)(r_2 + R_3)$. После преобразований это уравнение примет вид

$$r_1(R_x - R_3) = r_2(R_x - R_3).$$

Данное равенство справедливо в двух случаях:
1. $R_x = R_3$ (один корень уравнения);
2. $r_1 = r_2$.

Второй случай указывает на симметрию соединения «звездой», которая возможна, если исходная схема соединения «треугольником» обладает подобной симметрией, т.е. при $R_1 = R_x$ (это второй корень уравнения). Другие решения уравнения отсутствуют. Следовательно, возможны только два значения R_x:

$$R_x = R_1 \qquad \text{и} \qquad R_x = R_3.$$

При внимательном анализе схем (рис. 17 и 18) оба решения можно «угадать», но их единственность не очевидна.

Задача 4. Сенсационное открытие в оптике

Выясним, каков должен быть ход луча при прохождении сквозь пластинку с отрицательным показателем преломления. В формуле Снелла при $n_1 > 0$ и $n_2 > 0$ острые углы φ_1 и φ_2 положительны, если они отсчитываются от нормали к поверхности против часовой стрелки (рис. 21). Тогда при $n_1 > 0$ и $n_2 < 0$ синус одного из углов, φ_1 или φ_2, а тем самым и угол, должен быть отрицательным. Ход луча для случая $n_1 = 1$, $n_2 = -1$ изображен на рис. 22, при этом $|\varphi_1| = |\varphi_2|$.

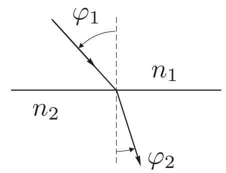


Рис. 21

Теперь построение изображения предмета AB становится чисто технической задачей. Из точки A пускаем к границе раздела два произвольных луча; с учетом уточненного нами смысла закона Снелла строим преломленные лучи. Точка A' является первичным изображением точки A. Она расположена симметрично точке A относительно верхней границы раздела сред. Но лучи, вышедшие из точки A' вновь пересекутся в точке A'', которая расположена симметрично точке A' относительно нижней границы раздела сред. Аналогичные рассуждения можно провести и для точки B. Следовательно, $L_2 = H - L_1 = 4$ см. Это изображение действительное. Увеличение k, даваемое пластинкой, равно 1. Еще одно изображение $A'B'$ будет внутри пластинки (оно также действительное с увеличением $k = 1$).

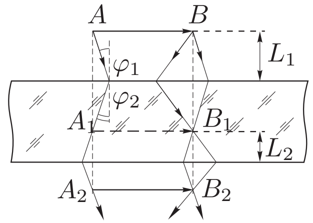


Рис. 22

10 класс

Задача 1. «Догонялки»

Обозначим через $\vec{u} = \vec{v_1} - \vec{v_2}$ относительную скорость шайбы и доски. Найдем $\Delta\vec{u}/\Delta t$. По второму закону Ньютона

$$m_1\frac{\Delta\vec{v_1}}{\Delta t} = -\alpha(\vec{v_1} - \vec{v_2}), \qquad m_2\frac{\Delta\vec{v_2}}{\Delta t} = \alpha(\vec{v_1} - \vec{v_2}).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = -\alpha\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{u} = -\frac{\vec{u}}{\tau}, \qquad \text{где} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{\mu}, \qquad \frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Постоянная τ имеет размерность времени, а μ — массы. Таким образом, относительная скорость $\vec{u}$ будет изменяться по тому же закону, что и скорость материальной точки массой μ, движущейся в вязкой среде с силой сопротивления $-\alpha\vec{u}$. Со временем эта материальная точка затормозится — установившееся значение скорости $\vec{u}$ будет равно нулю, то есть скорости шайбы и доски станут одинаковыми. Их значения $\vec{v}$ можно найти из закона сохранения импульса:

$$m_1\vec{v} + m_2\vec{v} = m_1\vec{v_0}, \qquad v = v_0\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Обозначим через $\vec{r}$ вектор, соединяющий шайбу и конец доски. Поскольку $\vec{u} = \Delta\vec{r}/\Delta t$, имеем

$$\Delta\vec{r} = \vec{u}\Delta t = -\tau\Delta\vec{u}.$$

При изменении скорости u от v_0 до нуля ($\Delta u = -v_0$) расстояние r между шайбой и концом доски изменяется на

$$\Delta r = v_0\tau.$$

Таким образом, в установившемся режиме шайба и доска будут двигаться со скоростью $v = v_0 m_1/(m_1+m_2)$, а шайба удалится от края доски на расстояние

$$L = v_0\tau = \frac{v_0}{\alpha}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2. Разлетающиеся шарики

1. Поскольку $m \ll M$ и $q \sim Q$, то легкий шарик улетит на достаточно большое расстояние до того, как тяжелые шарики заметно сдвинутся из начального положения. Поэтому можно считать, что легкий шарик улетает на бесконечное расстояние, двигаясь во внешнем постоянном поле тяжелых шариков. По закону сохранения энергии

$$3\frac{kqQ}{a} = \frac{mv^2}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad v = \sqrt{\frac{6kqQ}{ma}} = \sqrt{\frac{3kQ^2}{ma}}.$$

Затем будут разлетаться тяжелые шарики. В силу симметрии модули их скоростей будут одинаковы: $V_1 = V_2 = V_3 = V$. По закону сохранения энергии

$$3\frac{kQ^2}{a} = 3\frac{MV^2}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad V = \sqrt{\frac{2kQ^2}{Ma}}.$$

2. Углы между скоростями тяжелых шариков и гранью тетраэдра, содержавшей их в начальный момент, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \approx \sin\alpha = V_x/V$, где V_x — проекция скорости тяжелого шарика на перпендикуляр к указанной грани. По закону сохранения импульса

$$3MV_x = mv, \qquad \text{откуда} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{mq}{3MQ}} = \sqrt{\frac{m}{6M}}.$$

Задача 3. Повышение мощности дизельных двигателей

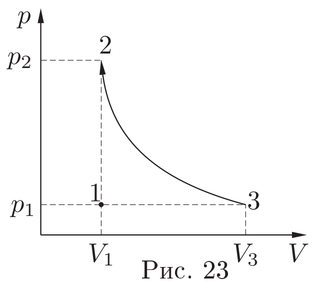


Рис. 23

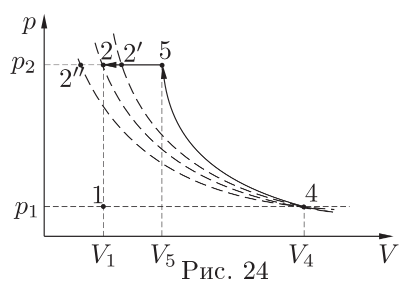


Рис. 24

По условию мощность двигателя пропорциональна максимально возможному количеству сжигаемого топлива за цикл. Понятно, что чем больше воздуха, и, следовательно, кислорода будет закачено в цилиндры, тем больше топлива может быть сожжено за цикл. Таким образом, надо вычислить, как увеличивается количество воздуха в цилиндрах при использовании только компрессора и компрессора с интеркулером.

Пусть V_1 и p_1 — объем цилиндров и атмосферное давление, соответственно. Следовательно, без дополнительных приспособлений в цилиндры будет закачено

$$m_1 = \mu\cdot\frac{p_1V_1}{RT_1}$$

воздуха (точка 1 на рис. 23).

Рассмотрим случай использования только компрессора. По условию задачи, процесс сжатия (кривая 3-2 на рис. 23) происходит адиабатически:

$$p_2V_1^\gamma = p_1V_3^\gamma.$$

Следовательно, количество воздуха, закачиваемого в цилиндры, увеличится в

$$\alpha_1 = \frac{m_3}{m_1} = \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = K^{1/\gamma}.$$

Рассмотрим случай использования компрессора и интеркулера вместе. В этом случае процесс будет состоять из двух этапов (рис. 24):
1. адиабатического сжатия 4-5;
2. изобарического охлаждения 5-2.

Так как для охлаждения сжатого воздуха используется забортный воздух, то сжатый воздух не может быть охлажден ниже температуры окружающей среды T_1. При этом через воздухозабор проходит максимальный объем воздуха V_4.

Для доказательства проведем изотерму из точки 4.

Допустим, что изотерма из точки 4 проходит через точку $2'$. Тогда точка 2 не может быть достигнута, так как ей соответствует температура ниже T_1, а в точке $2'$ не был бы достигнут объем V_1, что противоречит условию задачи.

Допустим теперь, что изотерма из точки 4 проходит через точку $2''$. Тогда мы могли бы добиться более высокой степени сжатия воздуха, чем V_1 или, что то же самое, мы могли бы стартовать не из точки 4, а несколько правее, что увеличило бы количество поступающего воздуха.

Следовательно, точки 2 и 4 должны лежать на одной изотерме 4-2.

Напишем уравнения состояния, соответствующее точке 2:

$$p_2V_1 = \frac{m_4}{\mu}RT_1, \qquad \text{откуда} \qquad m_4 = K\mu \cdot \frac{p_1V_1}{RT_1} = Km_1.$$

Таким образом, мощность двигателя возрастет в $\alpha_2 = K$ раз по сравнению с двигателем без улучшений и в $K^{1-1/\gamma}$ раз по сравнению с использованием одного компрессора.

Теоретически применение одного турбокомпрессора позволяет увеличить мощность двигателя в $\alpha_1 = 1{,}64$ раза, а добавление к нему интеркулера — в $\alpha_2 = 2$ раза.

Задача 4. Сверхтекучий маятник

Пусть L и B — уровни гелия и нижнего основания ареометра в положении равновесия, а L' и B' — те же уровни при смещении ареометра (рис. 25). Высота h столба гелия в равновесии определяется законом Архимеда:

$$\pi r^2\rho h = m,$$

причем $h \gg R \gg x$.

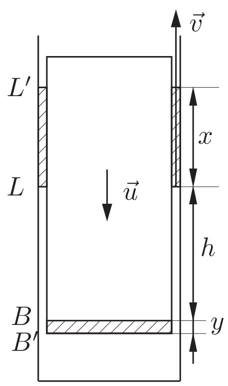


Рис. 25

Для нахождения максимальной скорости v смещения уровня гелия воспользуемся законом сохранения энергии. Максимальная скорость мениска будет достигаться при прохождении положения равновесия. Найдем кинетическую энергию в этот момент. Поскольку $R - r \ll R \ll h$, определяющий вклад в кинетическую энергию системы вносит движение тонкого пристеночного слоя жидкости:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\pi(R^2-r^2)h\rho v^2}{2} = \frac{(R^2-r^2)mv^2}{2r^2}.$$

Действительно, $ur^2 = v(R^2-r^2)$ и кинетическая энергия остальной жидкости и ареометра порядка

$$E'_{\text{kin}} = \frac{mu^2}{2} + \frac{\pi R^3\rho u^2}{2} \ll E_{\text{kin}}.$$

Аналогично, в рамках используемого приближения потенциальная энергия в положении максимального смещения

$$E_{\text{pot}} = \rho\left(h + \frac{x}{2}\right)\pi(R^2-r^2)gx - mgy = \frac{\rho g\pi(R^2-r^2)x^2}{2}.$$

Учитывая, что $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$, получаем

$$\rho g\pi r^2x^2 = mv^2, \qquad v = rx\sqrt{\frac{\rho g\pi}{m}} = 3{,}5 \text{ мм/с}.$$

Задача 5. Конденсаторы

Поскольку график процесса состоит из трех (а не из большего числа) прямолинейных участков, напряжение на конденсаторе C не изменяется при замыкании ключей. Следовательно, для конденсатора C_1 напряжение U_0 — начальное, U_1 — конечное; для конденсатора C_2 напряжение U_1 — начальное, U_2 — конечное. Таким образом, $V_{11} = U_0$, $V_{12} = U_1$, $V_{21} = U_1$, $V_{22} = U_2$.

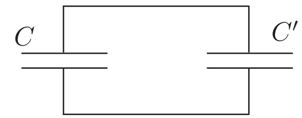


Рис. 26

Найдем теперь емкости конденсаторов. Пусть конденсатор C замкнут на конденсатор постоянной емкости C', где $C' = C_1$ или $C' = C_2$ (рис. 26). При медленном изменении емкости конденсатора C полный заряд конденсаторов, равный сумме заряда q на конденсаторе C и $C'U$ на конденсаторе C', сохраняется: $Q = q + C'U = const$. Поэтому график зависимости $q(U)$ является прямой с угловым коэффициентом $\Delta q/\Delta U = -C'$. Отсюда

$$C_1 = \frac{q_1-q_0}{U_0-U_1}, \qquad C_2 = \frac{q_1-q_0}{U_2-U_1}.$$

Изменение энергии конденсаторов C_1 и C_2

$$\Delta W = C_1\left(\frac{U_1^2}{2} - \frac{U_0^2}{2}\right) + C_2\left(\frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(q_1-q_0)(U_2-U_0)$$

и совпадает с площадью треугольника на графике.

11 класс

Задача 1. Доска на барабанах

Нарисуем все силы, действующие на доску (рис. 27). Выбираем систему координат такую, что ось x направлена вдоль доски. В этой системе координат можно записать следующую систему уравнений:

$$F_1 = \mu N_1, \qquad F_2 = \mu N_2, \tag{1}$$

$$ma = F_1 - F_2 + mg\sin\alpha, \tag{2}$$

$$0 = N_1 b - N_2 b + mgx\cos\alpha. \tag{3}$$

Подставляя F_1 и F_2 в (2) и решая систему из двух уравнений (2) и (3) относительно x, получаем уравнение:

$$a + \omega^2 x = g\sin\alpha, \qquad \text{где} \qquad \omega^2 = \frac{\mu g}{b}\cos\alpha. \tag{4}$$

Введем новую переменную y следующим образом:

$$x = y + \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}.$$

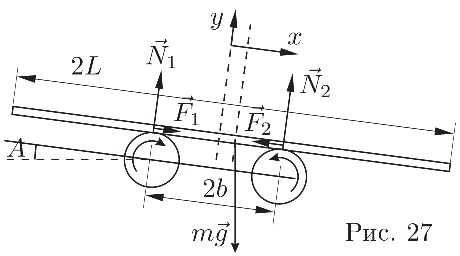


Рис. 27

Тогда уравнение (4) можно привести к виду $a+\omega^2 y = 0$. Это уравнение является уравнением колебаний и имеет решение

$$y = y_0\cos(\omega t+\phi), \qquad \text{или} \qquad x = y_0\cos(\omega t+\phi)+\frac{g\sin\alpha}{\omega^2}.$$

Определим значения постоянных y_0 и ϕ из начальных условий

$$x\,|_{t=0} = 0, \qquad v\,|_{t=0} = 0.$$

Равенство нулю скорости в начальный момент приводит к равенству нулю начальной фазы ϕ. С учетом этого условия и равенства нулю координаты центра доски в начальный момент получаем

$$y_0 = -\frac{g\sin\alpha}{\omega^2}.$$

Таким образом, закон движения доски будет $\quad x(t) = \dfrac{g\sin\alpha}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$

Так как по условию задачи доска достаточно длинная, то колебательное движение доски возможно только при условии, что центр доски не выйдет за пределы точек опоры на барабаны: $-b < x < b$, откуда $\mu > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. В противном случае доска потеряет устойчивость.

Окончательно, закон движения центра доски:

$$x(t) = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}(1-\cos\omega t) \qquad \text{при} \qquad \mu > 2\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Задача 2. Архимед

На шар (рис. 28) действуют сила тяжести $P = \rho_0 V g$, силы N_1 и N_2 со стороны дна и стенки сосуда, сила Архимеда F_a со стороны воды. Разложим для удобства F_a на горизонтальную и вертикальную составляющие F_{ax} и F_{ay}. Эти составляющие найдем, записав уравнения движения в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси x и y для мысленно выделенного водяного шара обьемом V, движущегося с ускорением a:

$F_{ax} = \rho V a\sin\gamma, \qquad F_{ay} - \rho V g = \rho V a\cos\gamma.$

Отсюда $F_{ax} = \rho V a\sin\gamma$, $F_{ay} = \rho V(g+a\cos\gamma)$.

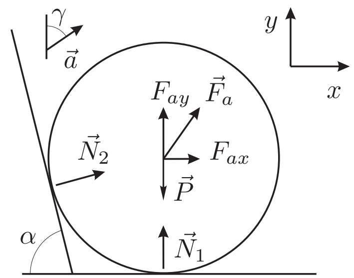


Рис. 28

Запишем уравнения движения для стеклянного шара в проекциях на оси x и y:

$F_{ax} + N_2\sin\alpha = \rho_0 V a\sin\gamma,$

$F_{ay} - \rho_0 V g + N_1 + N_2\cos\alpha = \rho_0 V a\cos\gamma.$

Из двух последних уравнений с учетом найденных выражений для F_{ax} и F_{ay} находим силы давления на дно и стенку:

$$N_1 = (\rho_0-\rho)V(a\cos\gamma - a\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g),$$

$$N_2 = (\rho_0-\rho)Va\sin\gamma/\sin\alpha.$$

Шар не будет отрываться от дна, если $N_1 > 0$, то есть $a\cos\gamma - a\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha + g > 0$. Перепишем неравенство в виде $\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \cos\gamma < g/a$. Это неравенство выполнено для любых $a > 0$ при $\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \cos\gamma < 0$. Отсюда следует, что при любых V, ρ_0, ρ ($\rho_0 > \rho$) отрыва от дна не будет при $\alpha > \gamma$. Заметим, что последнее условие можно получить из физических соображений, не прибегая к анализу выражения для N_1.

Задача 3. Вода и пар над поршнем

Пусть m_w — масса воды. Смещение поршня при изменении температуры T воды и пара обусловлено изменением давления на поршень: $dp_{ef} = dm_w g/S + dp$, где $dp = dT\mu\lambda p/(RT^2)$ по условию, а dm_w найдем из изменения массы в уравнении Менделеева-Клапейрона:

$$dm_w = -d\left(\frac{\mu V p}{RT}\right) = -\frac{\mu V}{R}\cdot\frac{T dp - p dT}{T^2} = \left(\frac{\mu p V}{RT^2} - \frac{\mu^2\lambda p V}{R^2 T^3}\right)dT.$$

Смещение поршня в одну сторону возможно при:

$$\frac{dp_{ef}}{dT} = \frac{\mu p}{RT_0^2}\left(\lambda + \frac{gV}{S} - \frac{\mu\lambda g V}{RST_0}\right) = 0, \qquad \text{откуда} \qquad T_0 = \frac{\mu\lambda g V}{R(\lambda S + gV)}.$$

Можно убедиться, что при этом $\frac{d^2 p_{ef}}{dT^2} \neq 0$, что требуется для смещения в одну сторону. Таким образом, искомая температура

$$T_0 = \frac{\mu\lambda g V}{R(\lambda S + gV)} = 330\ \text{K} = 57^\circ\text{C}.$$

Задача 4. «Изоэрга»

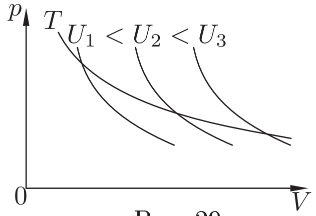


Рис. 29

1. Рассмотрим изотермическое расширение реального газа. Кинетическая энергия молекул однозначно определяется температурой ($U_к = \frac{3}{2}kT$) и, следовательно, остается постоянной.

При нормальных условиях расстояния между молекулами существенно превышают их размер, поэтому между молекулами преобладают силы притяжения. При расширении газа против этих сил совершается положительная работа и потенциальная энергия молекул газа увеличивается. Следовательно, при перемещении вдоль изотермы в сторону больших объемов внутренняя энергия газа увеличивается, при этом изотерма последовательно пересекает «изоэрги» со все большей энергией (рис. 29), а это означает, что в точке пересечения изотермы с «изоэргой» наклон изотермы относительно оси OV меньше.

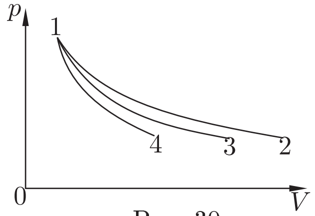


Рис. 30

2. При адиабатическом расширении газа его внутренняя энергия уменьшается на величину работы, совершенной газом: $\Delta U = -\Delta A$. Следовательно, при перемещении вдоль адиабаты в сторону больших объемов мы переходим к «изоэргам» со все меньшей внутренней энергией, а это означает, что в точке пересечения адиабаты с «изоэргой» наклон адиабаты относительно оси OV больше.

Таким образом, кривая $1-2$ является изотермой, кривая $1-3$ — «изоэргой», а кривая $1-4$ —адиабатой (рис. 30).

Задача 5. Выделение тепла в схеме

Обозначим через I_1, I_2 и I токи через катушки L_1, L_2 и резистор R соответственно. При замыкании ключа ток потечет через резистор R, поэтому начальные значения токов $I_1 = I_0$, $I_2 = 0$, $I = I_0$. Зависимость тока от времени определяется из уравнений

$$IR = -L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}; \qquad I = I_1 - I_2.$$

Поэтому $L_1\Delta I_1 + L_2\Delta I_2 = 0$ и величина $L_1I_1 + L_2I_2 = \Phi = L_1I_0$ сохраняется. В установившемся режиме ток через резистор R будет равен нулю, а

$$I_1 = I_2 = \frac{L_1I_0}{L_1 + L_2}.$$

Выделившееся на резисторе тепло равно разности энергий катушек с токами в начале и конце процесса:

$$Q = \frac{L_1I_0^2}{2} - \frac{L_1I_1^2}{2} - \frac{L_2I_2^2}{2} = \frac{L_1L_2I_0^2}{2(L_1 + L_2)}.$$

Для заметок

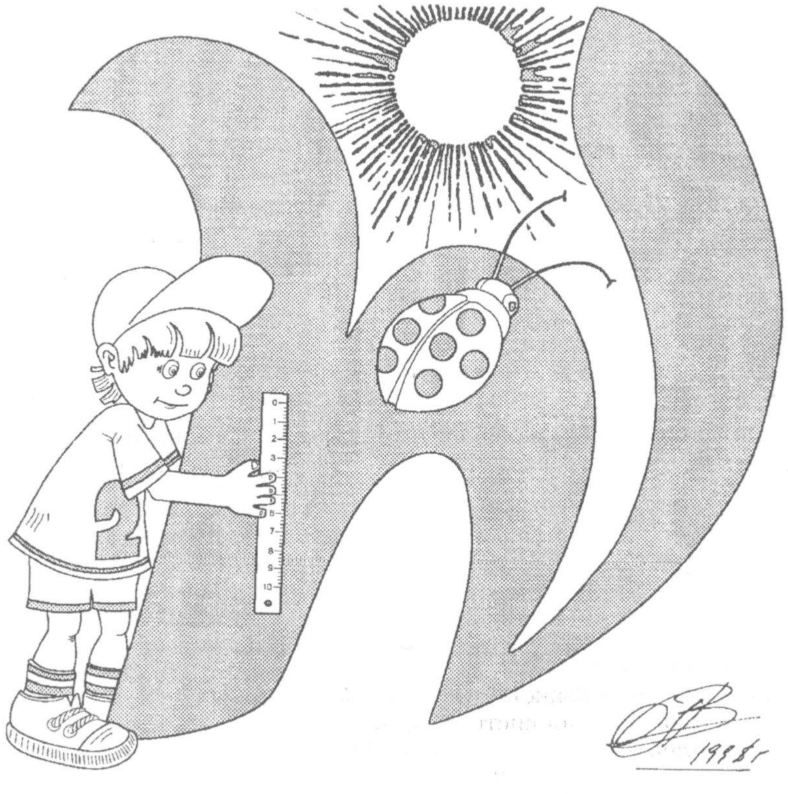
Министерство образования Российской Федерации
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад

XXXVII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Зональный этап

Экспериментальный тур

Методическое пособие



МФТИ, 2002/2003 уч.г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников
Министерства образования Российской Федерации
Тел.: (095) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: vip@pop3.mipt.ru

Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. Дунин С.	1. Кузьмичев С.	1. Шведов О.
2. Крюков А.	2. Шведов О.	2. Слободянин В.

Общая редакция — Дунин С., Слободянин В., Чудновский А.

Оформление и верстка — Чудновский А., Ильин А., Самокотин А.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система LaTeX 2_ε.

Подписано в печать 11 марта 2003 г. в 16:39.

141700, Московская область, г.Долгопрудный
Московский физико-технический институт

Условия

9 класс

Задача 1. Плотность тела

Определить плотность тела. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

Оборудование. Два сосуда (высокий, но узкий и широкий, но низкий), деревянный цилиндр, блок, штатив, кусок проволоки, нить, миллиметровая бумага, скотч, вода, тело неизвестной плотности.

Задача 2. Фокус зеркала

Параболическим называется зеркало, которое в любом сечении, проходящем через ось симметрии, имеет форму параболы. Известно, что если на такое зеркало падают лучи света параллельно оси симметрии, то после отражения все они пересекаются в одной точке, называемой фокусом. На выданном вам листе начерчен фрагмент параболы и проведены линии, вдоль которых должны падать лучи света. С помощью имеющегося оборудования найдите положение точки фокуса.

Оборудование. Лист картона формата $A3$, 4 булавки с круглыми головками, зеркало, линейка без делений, лист бумаги с чертежом.

10 класс

Задача 1. Пластилин в трубе

Определите длину l_1 пластилиновой пробки, вставленной с одной стороны в цилиндрическую трубку (рис. 1).

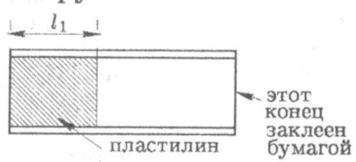


Рис. 1

Оборудование. Трубка с пластилиновой пробкой, линейка, нитки, брусок из пластилина известной массы, пластмассовый нож.

ВНИМАНИЕ. Вскрывать заклееный конец трубки и как-либо нарушать пластилиновую пробку запрещено.

Задача 2. Почти равные сопротивления

Расположите выданные вам неизвестные резисторы в порядке убывания сопротивлений $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$. Найдите R_1, R_2, R_3, R_4. Определите с как можно большей точностью отношения $(R_1 - R_2)/R_1$ и $(R_3 - R_4)/R_3$, про которые известно, что они много меньше единицы.

Оборудование. Источник тока с неизвестным внутренним сопротивлением, резистор с известным сопротивлением R_0, четыре резистора с неизвестными сопротивлениями, многопредельный вольтметр, который можно считать идеальным, соединительные провода.

11 класс

Задача 1. Неизвестные резисторы

В «черном ящике» с тремя выводами собрана схема (рис. 2). Напряжение U источника тока задано. Один из резисторов R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 заменен соединительным проводом. Определите, какой это резистор. Сопротивления каких резисторов можно найти, используя имеющееся оборудование? Найдите эти сопротивления. Сопротивления проводов, источника тока, амперметра малы.

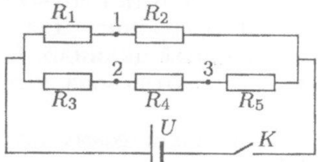


Рис. 2

Оборудование. «Черный ящик», амперметр, соединительные провода.

Задача 2. «Биения»

В колебательной системе, состоящей из двух математических маятников, между маятниками существует слабая связь, осуществляемая за счет системы подвеса (рис. 3). Если в системе возбудить колебания первого маятника (например, груз m_1) в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка, то с течением времени амплитуда колебаний второго маятника (груз m_2) начнет возрастать, а первого — убывать. Через некоторое время τ колебания первого груза практически прекратятся, а амплитуда колебаний второго маятника станет почти такой же, какой была вначале у первого маятника.

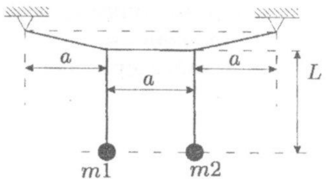


Рис. 3

Далее амплитуда колебаний второго маятника начнет уменьшаться, а первого — возрастать, и через время $T = 2\tau$ после возбуждения колебаний амплитуды колебаний маятников станут такими же, как и в начале эксперимента. Такие периодические изменения во времени амплитуды колебаний называются биениями.

Оказывается, период T биений зависит от длины L подвеса математических маятников по закону: $T = AL^n$, где A — коэффициент пропорциональности, а n — показатель степени.

Определите численное значение показателя степени n, изменяя длину маятника от 15 см до 1 м.

Оборудование. Штатив с лапкой, планка с закрепленным на ней шнуром (рис. 5), две гайки М6 — М8 (грузы m_1 и m_2), нитки (три куска по 1 м), рулетка, секундомер, миллиметровая бумага.

Примечание. Штатив следует установить на край стола так, чтобы длина маятника могла достигать 1 метра.

Рис. 4

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Плотность тела

Рекомендации для организаторов. Выданной проволоки должно быть достаточно для того, чтобы заставить деревянный цилиндр плавать вертикально погруженным почти полностью в высоком сосуде, в качестве которого можно взять школьную мензурку. Диаметр блока должен быть не менее диаметра высокого сосуда, а размеры исследуемого тела — не позволять погружать его в высокий сосуд. Вес исследуемого тела должен быть приблизительно на $25 \div 30\%$ меньше веса деревянного цилиндра, а плотность тела — больше плотности воды. Длина нити ≈ 70 см.

Решение. На одном конце деревянного цилиндра намотаем такое количество проволоки, чтобы он плавал в воде вертикально, будучи погруженным почти полностью. На боковой стенке деревянного цилиндра закрепим при помощи скотча полоску миллиметровой бумаги, создав тем самым возможность измерять глубину погружения цилиндра. К верхней части цилиндра привяжем кусок нити, второй конец которой привяжем к исследуемому телу и перекинем нить через блок. Цилиндр опустим в высокий сосуд с водой, и замерим, на какую величину меняется длина его погруженной части в том случае, когда исследуемое тело подвешено в воздухе и, когда в воде (в широком сосуде). При измерениях примем меры, чтобы учесть трение в оси блока (или удостоверимся, что им можно пренебречь).

Пусть под действием нити цилиндр в первом случае дополнительно выдвигается из воды на высоту H_1, а во втором — на H_2. Тогда, из-за однородности цилиндра и условия равновесия всей системы на блоке, отношение веса исследуемого тела в воздухе к отношению его веса в воде равно H_1/H_2. Отсюда плотность тела $\rho = \rho_0 H_1/(H_1 - H_2)$.

Задача 2. Фокус зеркала

Рекомендации для организаторов. Приблизительные размеры зеркала: 3 см в высоту и 5 см в ширину; зеркало должно быть снабжено подставкой, позволяющей устанавливать его на столе вертикально (можно приклеить на заднюю сторону деревянный брусочек) так, чтобы нижний край зеркала совпадал с плоскостью стола. В качестве линейки без делений ученикам можно предложить незаточенный граненый карандаш или обычную линейку, у которой деления закрыты непрозрачной клейкой лентой.

Решение. Метод нахождения фокуса следует из того, что на малом участке вблизи какой-нибудь точки, участок кривой практически совпадает с участком касательной, проведенной к кривой в этой точке. Поэтому луч, падающий в какой-нибудь точке на изогнутое зеркало, отразится от него под тем же углом, под которым он отразится от плоского зеркала, установленного в той же точке по касательной к линии, образующей поверхность изогнутого зеркала. Будем устанавливать выданное зеркало так, чтобы его плоскость как можно точнее совпадала с касательной к вычерченной параболе в точках, где парабола пересекается с проведенными параллельными линиями, и каждый раз с помощью булавок и линейки строить ход отраженного луча. Для этого надо выставить две булавки на соответствующей линии, а две — так, чтобы они были на одной прямой с изображением первых булавок в зеркале. Прямая, проведенная через точки, в которые вколоты две вторые булавки, и определит ход отраженного луча.

Из-за приблизительности определения положения плоского зеркала и неточностей построения проведенные лучи будут пересекаться в близких, но не совпадающих точках. Нарисуем окружность минимального радиуса, охватывающую все точки пересечения. Центр окружности можно принять за положение фокуса, а ее радиус — считать оценкой погрешности (более точной оценкой будет радиус окружности, включающей две трети полученных точек).

10 класс

Задача 1. Пластилин в трубе

Рекомендации для организаторов. В качестве трубки целесообразно взять металлопластиковую водопроводную трубу диаметром 1/2 дюйма (алюминиевая основа трубы покрыта пластиком с двух сторон). Такие трубы можно приобрести на рынке стройматериалов. Длина выдаваемого участникам олимпиады отрезка трубы $l_0 = 15 \div 20$ см. Длина пластилиновой пробки $l_1 \approx 5$ см. Выдаваемый участникам пластилиновый брусок должен быть правильной формы (постоянного поперечного сечения). Лучше всего выдавать пластилин непосредственно из коробки. Масса выдаваемого пластилинового бруска должна быть больше массы пластилиновой пробки.

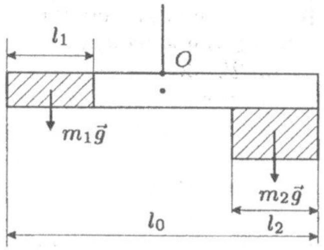


Рис. 5

Решение. Пластилиновый брусок прямоугольного сечения (размеры $a \times b$) прикрепляем к трубке так, чтобы один из концов бруска совпадал с концом трубки. Изменяя длину бруска l_2, добиваемся, чтобы при подвешивании за середину трубки она принимала горизонтальное положение. Уравнение моментов относительно полюса O:

$$m_1 g(l_0/2 - l_1/2) = m_2 g(l_0/2 - l_2/2), \qquad \text{откуда}$$

$$m_1(l_0 - l_1) = m_2(l_0 - l_2). \tag{1}$$

Массы кусков пластилина

$$m_1 = \rho \frac{\pi d^2}{4} l_1, \tag{2}$$

$$m_2 = \rho a b l_2, \tag{3}$$

где d — диаметр трубки, a и b — размеры прикрепленного бруска. Из уравнений (1-3) получаем:

$$l_1^2 - l_1 l_0 + \alpha(l_0 - l_2) l_2 = 0,$$

где $\alpha = S/S_0 = 4ab/(\pi d^2)$. Решая это квадратное уравнение относительно l_1, находим

$$l_1 = \frac{l_0}{2} - \sqrt{\frac{l_0^2}{4} - \alpha(l_0 - l_2) l_2}. \tag{4}$$

Здесь учтено, что $l_1 < l_0/2$. С помощью линейки проводим все необходимые измерения, после чего по формуле (4) вычисляем l_1.

Задача 2. Почти равные сопротивления

Рекомендации для организаторов. Величины неизвестных сопротивлений R_1, R_3 и известного сопротивления R_0 должны быть одного порядка, но разными (могут отличаться в два-три раза, например, $R_1 \approx R_2 \approx 300$ Ом, $R_3 \approx R_4 \approx 200$ Ом, $R_0 \approx 500$ Ом). Малые отношения $(R_1 - R_2)/R_1$ и $(R_3 - R_4)/R_3$ должны быть также одного порядка, но разными (например, $(R_1 - R_2)/R_1 \approx 0{,}04$, $(R_3 - R_4)/R_3 \approx 0{,}03$). Пару резисторов с близкими сопротивлениями можно изготовить, взяв два одинаковых резистора (например 300 Ом) и подключив к одному из них резистор с большим сопротивлением (несколько килоом). Многопредельный вольтметр должен с достаточной точностью измерять как напряжение порядка ЭДС батарейки $\mathcal{E}$, так и напряжения порядка $\mathcal{E}(R_1 - R_2)/R_1$, имея на всех пределах внутренние сопротивления, много большие сопротивления резисторов. При тестировании задачи использовался цифровой мультиметр ИТ20В и батарейка с ЭДС порядка 5 В.

Решение. Грубо значение сопротивления R_x можно найти, собрав схему (рис. 6) из батарейки, неизвестного резистора R_x и резистора известного сопротивления R_0. Тогда отношение сопротивлений равно отношению напряжений на резисторах, которые измеряются вольтметром на «грубом» пределе. Чтобы найти отношения $(R_1 - R_2)/R_1$ и $(R_3 - R_4)/R_3$ с большей точностью, соберем две «мостовые схемы» (рис. 7 и рис. 8). Тогда напряжения U_{12} будут одинаковыми, а измеряемые вольтметром напряжения — малыми (напряжение U_{12} можно измерить на грубом пределе). Показания вольтметра в первом случае

$$U_1 = U_{12}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right),$$

во втором случае

$$U_2 = U_{12}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right).$$

Тогда $\frac{U_2}{U_{12}} - \frac{U_1}{U_{12}} = \frac{R_3 - R_4}{R_3 + R_4}$, $\frac{U_2}{U_{12}} + \frac{U_1}{U_{12}} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. Отсюда находим

$$\frac{R_3 - R_4}{R_3} \approx 2\frac{R_3 - R_4}{R_3 + R_4} = 2\left(\frac{U_2}{U_{12}} - \frac{U_1}{U_{12}}\right),$$

$$\frac{R_1 - R_2}{R_1} \approx 2\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = 2\left(\frac{U_2}{U_{12}} + \frac{U_1}{U_{12}}\right).$$

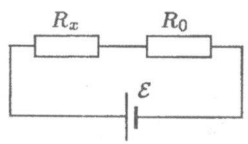


Рис. 6

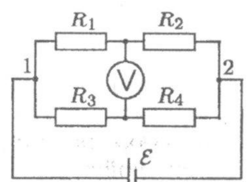


Рис. 7

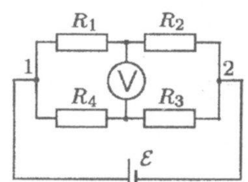


Рис. 8

11 класс

Задача 1. Неизвестные резисторы

Рекомендации для организаторов. Соединительным проводом нужно заменить резистор R_3 или R_5. Сопротивления резисторов R_1, R_2, R_3, R_4 должны быть порядка 1 кОм (но разными). Амперметр должен измерять силу тока U/R_i и $2U/R_i$. Сопротивление источника тока и амперметра должно быть много меньше R_1, R_2, R_3, R_4. Для измерения силы тока можно использовать школьный миллиамперметр или цифровой мультиметр. Вся цепь, схема которой изображена на рисунке, помещается в «черный ящик», из котрого делаются три вывода (от точек 1, 2 и 3). Желательно выводы делать из проводов разного цвета. Ручку (кнопку) ключа K следует вывести из «черного ящика».

Решение. Не используя резистор, можно провести следующие измерения:

N	Измерение	Показание амперметра
1	Замыкаем выводы 2 и 3 амперметром	$I_1 = \frac{U}{R_3+R_5}$
2	Замыкаем выводы 1 и 2 проводом, 2 и 3 амперметром	$I_2 = U\frac{R_2}{R_2+R_5}(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5})^{-1}$
3	Замыкаем выводы 1 и 3 проводом, 2 и 3 амперметром	$I_3 = U\frac{R_1}{R_1+R_3}(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5})^{-1}$
3'	Замыкаем выводы 2 и 3 проводом, 1 и 3 амперметром	$I'_3 = I_2 - I_3$
4	Замыкаем выводы 1 и 2 амперметром	$I_4 = U(\frac{R_1}{R_1+R_3} - \frac{R_2}{R_2+R_4+R_5})(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2(R_4+R_5)}{R_2+R_4+R_5})^{-1}$
5	Замыкаем выводы 1 и 3 амперметром	$I_5 = U(\frac{R_1}{R_1+R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_2+R_5})(\frac{R_1(R_3+R_4)}{R_1+R_3+R_4} + \frac{R_2R_5}{R_2+R_5})^{-1}$

Результаты измерений в зависимости от случая приведены в таблице. Верные утверждения обозначены +, неверные – знаком −, возможные - ±.

	$R_1 = 0$	$R_2 = 0$	$R_3 = 0$	$R_4 = 0$	$R_5 = 0$
$I_3 = 0$	+	-	-	-	-
$I_2 = 0$	-	+	-	-	-
$I_1 = I_2$	-	-	+	±	-
$I'_3 = I_4$	-	-	+	+	-
$I'_3 = I_5$	-	-	-	+	+
$I_1 = I_3$	-	-	-	±	+

В предложенных «черных ящиках» реализовывался случай $R_3 = 0$ или $R_5 = 0$, что можно обнаружить из свойств $I_1 = I_2$, $I'_3 = I_4 \neq I_5$ или $I_1 = I_3$, $I'_3 = I_5 \neq I_4$. Пусть $R_5 = 0$, тогда из опытов 1-5 можно найти R_1 и R_3:

$$R_3 = \frac{U}{I_1}; \qquad \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} = \frac{U}{I_2}; \qquad R_1 = \frac{U}{I_5}.$$

Сопротивления R_2 и R_4 определить с помощью имеющихся приборов нельзя.

Задача 2. «Биения»

Рекомендации для организаторов. Длина планки должна составлять ~ 60 см. В ее края следует вбить гвоздики, к которым прикрепить шнур, который не должен провисать. В качестве шнура можно использовать капроновую нить или рыболовную леску (подойдут и обычные толстые нитки).

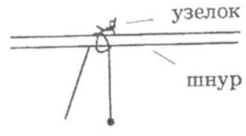


Рис. 9

Решение. Подвес математического маятника делаем длиной ~ 1 м, перекидываем его через шнур и отдельной ниткой привязываем его к шнуру (рис. 10) так, чтобы, подтягивая нить подвеса, можно было регулировать длину L маятника. Для $6 \div 7$ значений L измеряем период биений T.

Прологарифмируем данную в условии зависимость $T(L)$:

$$\ln T = \ln A + n \ln L, \qquad \text{откуда} \qquad n = \frac{\Delta \ln T}{\Delta \ln L}.$$

Легко видеть, что показатель степени равен тангенсу угла наклона графика зависимости T от L в координатах $\ln L$ (ось абсцисс) и $\ln T$ (ось ординат).

При аккуратных измерениях получается $n = 1{,}5 \pm 0{,}1$.

В дополнение к приведенному решению заметим, что такое же значение $n = 1{,}5$ получается при теоретическом решении дифференциальных уравнений, описывающих колебания системы маятников. Период биений

$$T = \left(\frac{F}{amg^{3/2}}\right) L^{3/2}.$$

Здесь F — сила натяжения шнура.