

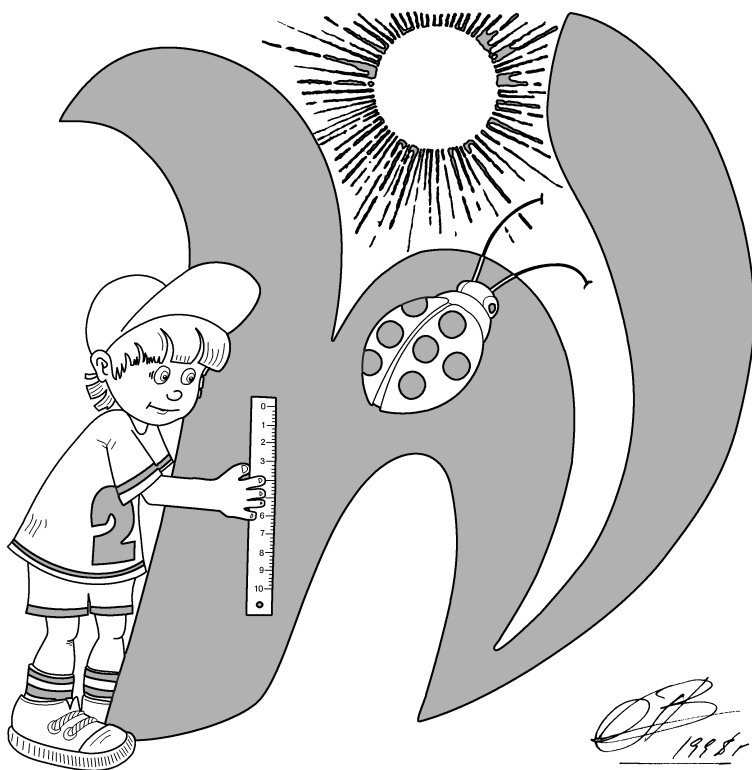
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Санкт-Петербург, 2014 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

9 класс

1. Слободянин В.
2. Замятнин М.
3. Воробьёв И.
4. Замятнин М.
5. Гордеев М.

10 класс

1. Замятнин М.
2. Кармазин С.
3. Шеронов А.
4. Александров Д.
5. Воробьёв И.

11 класс

1. Гуденко А.
2. Гуденко А.
3. Ерофеев И.
4. Варламов С.
5. Слободянин В.

Общая редакция — Кóзел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Паринов Д., Цыбров Ф.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система \LaTeX 2 _{ϵ} .

© Авторский коллектив
141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Экстремальная гонка (Слободянин В.)

Гоночный автомобиль (болид) преодолевает контрольный прямолинейный участок трассы со средней скоростью $v_{\text{ср}}$, причём на всём этом участке он движется в одну и ту же сторону равноускоренно. Вычислите максимально и минимально возможные скорости болида (v_{max} и v_{min} , соответственно) в середине контрольного участка трассы.

Задача 2. На балконе (Замятнин М.)

Экспериментатор Глюк бросает шарик от пинг-понга массой m с балкона 17 этажа вертикально вверх со скоростью v_0 . При полёте на шарик действует сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости. Перед падением на землю шарик двигался с постоянной скоростью v_2 . Найдите скорость шарика v_{max} , при которой его кинетическая энергия меняется быстрее всего в процессе движения.

Задача 3. Подводные работы (Воробьёв И.)

Водолазный колокол в форме цилиндра без дна, частично заполненный воздухом, находится под водой. Чтобы колокол не всплывал, его прикрепили тросом ко дну водоёма. На верёвке к колоколу привязан груз, находящийся в воде (рис. 1). Площадь горизонтального сечения колокола $S = 4 \text{ м}^2$, объём воздуха в нём $V = 8 \text{ м}^3$ при давлении $p = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Когда груз в колоколе поднимают над уровнем воды, давление возрастает на $\Delta p = 250 \text{ Па}$, при этом трос остаётся натянутым. Найдите изменение натяжения троса и верёвки. Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Воздух в колоколе подчиняется закону Бойля-Мариотта: $pV = \text{const}$, где p — давление, V — объём воздуха в колоколе.

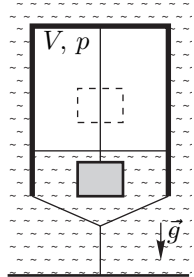


Рис. 1

Задача 4. Сосулька на нити (Замятнин М.)

Через тонкое отверстие, проходящее вдоль вертикальной оси цилиндрической сосульки, продега нить, на конце которой закреплен шарик из материала с очень высоким значением теплопроводности. В начале эксперимента шарик нагрет до некоторой температуры t_1 , а температура сосульки равна температуре окружающего воздуха $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Из-за таяния льда сосулька опускается вниз (рис. 2), а талая вода вытекает в виде капель, при температуре t_0 . При этом за шариком остается цилиндрический канал площадью $S = 2 \text{ см}^2$.

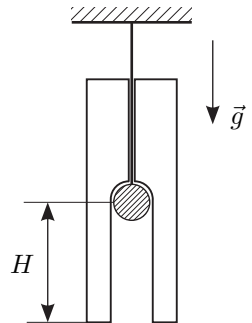


Рис. 2

1. Найдите начальную температуру t шарика, если в процессе эксперимента сосулька перестала опускаться, когда шарик проплавил канал глубиной $H = 10 \text{ см}$.

2. Определите скорость v_0 сосульки на начальной стадии эксперимента, если в момент времени, когда она опустилась на две трети глубины H , её скорость равнялась $v_2 = 0,1$ мм/с.

Считайте мощность теплопередачи пропорциональной разности температур шарика и льда, и что вся она идёт на плавление льда. Теплоёмкость шарика $C = 59,4$ Дж/°С. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/(кг · °С). Плотность льда $\rho = 900$ кг/м³.

Задача 5. Источник с компьютером (Гордеев М.)

Экспериментатор Глюк сконструировал источник тока с регулируемым на выходе напряжением. В прибор он встроил миникомпьютер, показывающий протекший через источник заряд и среднюю силу тока (отношение всего протекшего заряда ко времени работы источника). Глюк присоединил к источнику резистор и, включив установку, начал регулировать напряжение. В результате ему удалось снять зависимость средней силы тока через резистор от времени (рис. 3). График на листе А4 должен быть выдан Вам вместе с условием.

В процессе эксперимента компьютер дал сбой, и зависимость протекшего заряда от времени оказалась утерянной.

1. Восстановите зависимость протекшего через источник заряда от времени $q(t)$ и постройте на миллиметровой бумаге её график;
2. Определите сопротивление R резистора, если известно, что в точке А на нем выделялась мощность $N_A = 0,16$ Вт;
3. Определите максимальную мощность, выделявшуюся на резисторе во время эксперимента.

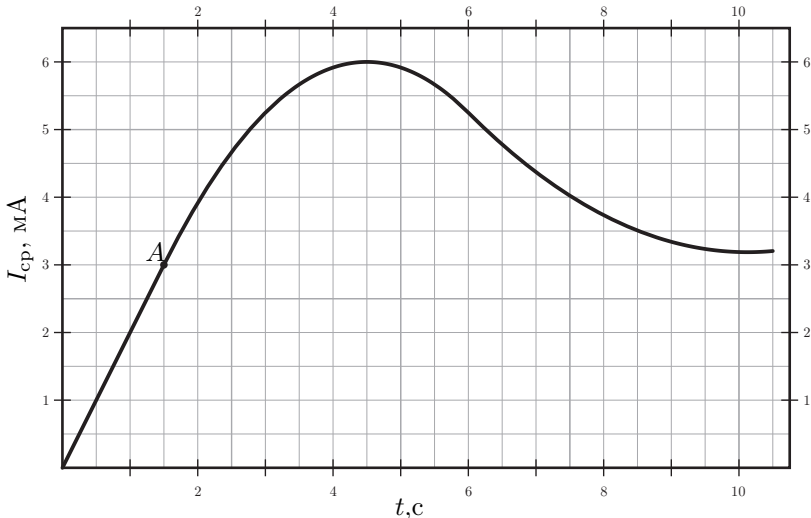


Рис. 3

10 класс

Задача 1. Катапульта (*Замятин М.*)

Игрушечная катапульта может стрелять сразу двумя шариками, выпуская их с одинаковыми по модулю начальными скоростями v_0 , но направленными под разными углами к горизонту. Угол, под которым запускается один из шариков, можно менять как угодно. Конструкция катапульти такова, что после выстрела с горизонтальной плоскости оба шарика попадают в одну и ту же точку этой плоскости. После большого числа испытаний выяснилось, что максимальное из возможных расстояний между шариками в то время, пока они оба находились в воздухе, достигало $L_{\max} = 19$ м. Определите начальную скорость v_0 шариков. Примите $g = 10$ м/с².

Задача 2. Катушка с проводом (*Кармазин С.*)

Лёгкий провод намотан на цилиндрическую катушку, которая надета на горизонтальный стержень (рис. 4). Для того, чтобы катушка равномерно вращалась на стержне, необходимо тянуть за конец провода вертикально вниз с силой F_1 или горизонтально, вдоль касательной к нижнему краю катушки, с силой F_2 . Какова масса m катушки?

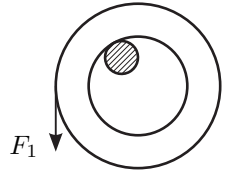


Рис. 4

Задача 3. Охлаждение гелия (*Шеронов А.*)

При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры T_0 до некоторой конечной температуры T_x в процессе с теплоемкостью C , прямо пропорциональной температуре T , газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объёму. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение T_x/T_0 .

Задача 4. Источник стабильности (*Александров Д.*)

Стабилизированный источник тока способен выдавать постоянный ток I_0 независимо от подключённой к нему нагрузки. Источник включён в цепь, показанную на рисунке 5. Все элементы цепи можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор не был заряжен. В некоторый момент времени ключ замкнули. Какое количество теплоты Q выделилось на резисторе R после замыкания ключа?

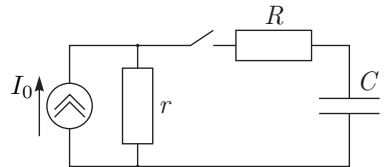
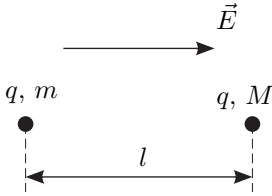


Рис. 5

Задача 5. Разойдутся или нет? (Воробьёв И.)



Две материальные точки с массами m и M ($M > m$) и одинаковыми положительными зарядами q находятся на расстоянии l друг от друга в однородном электрическом поле E , направленном от m к M (рис. 6). В начальный момент скорости точек равны 0. Найдите максимальное расстояние между точками при их дальнейшем движении. Считайте, что точки всё время движутся вдоль одной прямой.

Рис. 6

11 класс

Задача 1. Растяжение пружины (Гуденко А.)

Тонкую лёгкую пружину, растянутую на некоторую величину Δl_1 , закрепили на гладком горизонтальном столе в точках A и B . Отношение периодов малых поперечных (рис. 7) и продольных (рис. 8) колебаний небольшого грузика, расположенного посередине пружины, равно $n_1 = 4$. После того как деформацию пружины увеличили на $\Delta x = 3,5$ см, отношение периодов стало равно $n_2 = 3$. Найдите длину нерастянутой пружины l_0 , а также значение деформации Δl_1 в первом и деформации Δl_2 во втором случаях. Считайте, что пружина в условиях опыта подчиняется закону Гука.

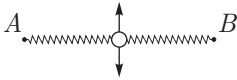


Рис. 7

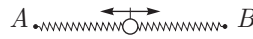


Рис. 8

Задача 2. Наноплавление (Гуденко А.)

Температура плавления массивного образца олова $t_0 = 232^\circ\text{C}$. Температура плавления мельчайших оловянных шариков диаметром $d = 20$ нм оказывается на 25 градусов ниже и равна $t_d = 207^\circ\text{C}$. Это так называемый размерный эффект, причём экспериментально установлено, что температура плавления зависит не только от размеров, но и от формы образца. При какой температуре будет плавиться оловянная фольга толщиной $h = d$?

Считайте, что атомы олова в приповерхностном слое толщиной в $2-3$ межатомных расстояния обладают некоторой избыточной энергией по сравнению с энергией атомов в объёме, а теплота плавления λ в пересчёте на один атом пропорциональна средней энергии связи U атомов в веществе, которая, в свою очередь, пропорциональна абсолютной температуре T фазового перехода (плавления): $\lambda \sim U \sim T$.

Задача 3. Восьмёрка лорда Кельвина (Ерофеев И.)

В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса $abefcbda$, произведённого над неизвестным количеством ν азота. В координатах (C, T) , где C — теплоёмкость газа, а T — температура, график цикла представляет собой четыре отрезка (рис. 9). К сожалению, положение начала координат оказалось утраченным. Пояснительные записи указывали, что $C_d = 1,000$ Дж/К, $C_a = 0,715$ Дж/К, а также что

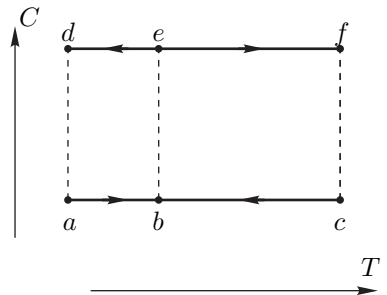


Рис. 9

$$T_c - T_b = 2(T_b - T_a) = 200 \text{ К}, \quad \text{и} \quad \frac{p_c}{p_a} = \frac{V_c}{V_a}.$$

1. Найдите работу газа A за цикл и КПД цикла η .
2. Определите значения температуры T_a , T_b и T_c .
3. Нарисуйте график цикла в координатах (p, V) и определите количество вещества ν .

Примечание. Процесс с постоянной теплоёмкостью C называется политропным и для него справедливо соотношение:

$$pV^n = \text{const},$$

где n — постоянная, показатель политропы.

Задача 4. Электроудар (Варламов С.)

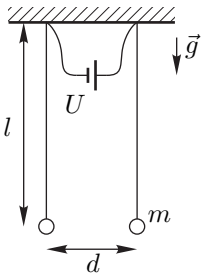


Рис. 10

К горизонтальному непроводящему потолку на тонких металлических проволоках длиной $l = 1$ м на расстоянии $d = 10$ см друг от друга подвешены два одинаковых стальных шарика радиусом $r = 5$ мм и массой $m = 4$ г (рис. 10). В начальный момент шарики не заряжены и покоятся.

1. Определите период T малых свободных колебаний шариков.

2. К точкам крепления проволок подключают источник напряжения U с большим внутренним сопротивлением $R = 10^{15}$ Ом. При каком значении $U = U_{\min}$ шарики столкнутся через некоторое время?

3. Найдите время t_0 , через которое разность потенциалов между шариками достигнет значения U_{\min} , если $U = U_0 = 1,0 \cdot 10^6$ В.

Задача 5. В архиве Снеллиуса (Слободянин В.)



Рис. 11

В архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой была изображена линза, положение точечного источника света S_0 и его изображения S_1 . От времени чернила выцвели, и на схеме осталось видно только положение оптической оси линзы, источника S_0 , изображения S_1 и одного из фокусов F (рис. 11). Построением циркулем и линейкой без делений на отдельно выданном Вам листе А4 восстановите возможные положения линзы.

Построением циркулем и линейкой без делений на отдельно выданном Вам листе А4 восстановите возможные положения линзы.

При решении задач Вам могут понадобиться следующие данные:

Ускорение свободного падения	$g = 9,8 \text{ м/с}^2$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Число Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$
Молярная масса олова	$\mu = 119 \text{ г/моль}$
Плотность олова	$\rho = 7,31 \text{ г/см}^3$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Экстремальная гонка (Слободянин В.)

Графическое решение. Пусть L — длина контрольного участка трассы. Время движения болида $t_0 = L/v_{\text{ср}}$. На графике $v(t)$ возможные способы движения болида представлены прямыми с разными наклонами (ускорениями), причём, площадь под каждым графиком (длина пути) одинакова (рис. 12).

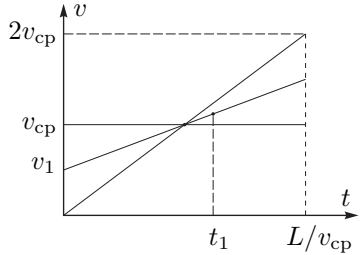


Рис. 12

Пусть болид стартовал со скоростью v_1 . Обозначим через t_1 момент времени, когда он находился в середине пути. Площади под графиком слева и справа от точки t_1 равны. Заметим, что при увеличении по модулю ускорения a значение скорости в середине пути (момент t_1) увеличивается.

Наименьшая скорость v_{min} достигается при $a = 0$ и равна средней скорости $v_{\text{ср}}$, а максимальная v_{max} будет достигнута при движении с максимальным ускорением и нулевой начальной (или конечной) скоростью. Конечная скорость при таком движении $v_{\text{к}} = 2v_{\text{ср}}$. Длина контрольного участка равна:

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2}{2a}.$$

На половине пути:

$$\frac{L}{2} = \frac{v_{\text{max}}^2}{2a}.$$

Отсюда следует, что максимальная скорость в середине участка равна $v_{\text{max}} = v_{\text{к}}/\sqrt{2} = \sqrt{2}v_{\text{ср}}$.

Аналитическое решение. Пусть начальная скорость болида v_0 , а ускорение при движении равно a . Тогда длина контрольного участка трассы

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2 - v_0^2}{2a}. \quad (1)$$

Для половины пути справедливо соотношение:

$$\frac{L}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим выражение для скорости в середине трассы:

$$v^2 = \frac{v_{\text{к}}^2 + v_0^2}{2}.$$

Так как движение равноускоренное, то средняя скорость $v_{\text{ср}}$ выражается через $v_{\text{к}}$ и v_0 следующим образом:

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + \frac{v_{\text{к}} - v_0}{2} = \frac{v_0 + v_{\text{к}}}{2}.$$

Начальная и конечная скорости неотрицательны, поэтому для начальной скорости верно условие $0 < v_0 < 2v_{\text{ср}}$.

Выразим скорость v в середине пути через v_0 и $v_{\text{ср}}$:

$$v^2 = 2v_{\text{ср}}^2 - 2v_0 v_{\text{ср}} + v_0^2 = (v_{\text{ср}} - v_0)^2 + v_{\text{ср}}^2.$$

Минимальная скорость v_{min} достигается при $v_0 = v_{\text{ср}}$ и равна $v_{\text{ср}}$. Максимальная скорость v_{max} достигается при $v_0 = 0$ или $v_0 = 2v_{\text{ср}}$ и равна $\sqrt{2}v_{\text{ср}}$.

Задача 2. На балконе (*Замытнин М.*)

Скорость изменения кинетической энергии тела — это мощность приложенных к нему сил. На шарик действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По условию сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}.$$

Суммарная мощность сил, приложенных к шарiku:

$$N = (m\vec{g} + \vec{F}_c) \cdot \vec{v} = mgv - \alpha v^2, \tag{3}$$

где v — проекция скорости шарика \vec{v} на ось, направленную вертикально вниз.

При падении шарик будет ускоряться, пока сила сопротивления не уравновесит силу тяжести. Зная скорость установившегося движения v_2 , найдём коэффициент α , записав для шарика второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вниз, и приравняв ускорение нулю:

$$0 = mg - \alpha v_2, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{mg}{v_2}.$$

В процессе движения скорость v изменяется от $-v_0$ до v_2 .

Выражение для мощности (3) можно привести к виду:

$$N = \frac{mgv_2}{4} - \frac{mg}{v_2} \left(v - \frac{v_2}{2} \right)^2.$$

График этой зависимости — парабола с вершиной в точке $v_1 = v_2/2$, показанная на рисунке 13.

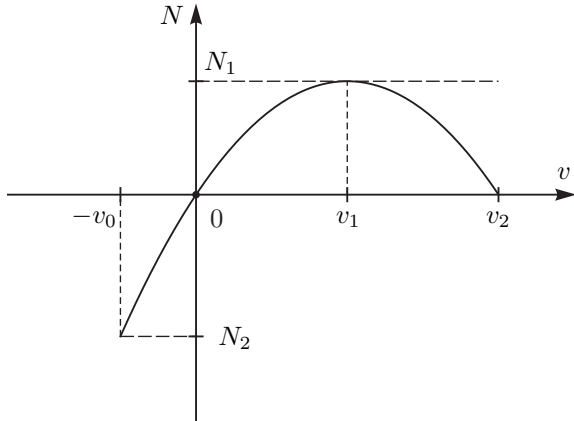


Рис. 13

Как видно из графика, максимальная (по модулю) скорость изменения кинетической энергии достигается либо при $v = v_1$, либо при $v = -v_0$. В первом случае мощность $N_1 = \frac{mgv_2}{4}$, во втором $N_2 = \frac{mgv_2}{4} - \frac{mg}{v_2} \left(v_0 + \frac{v_2}{2}\right)^2$. Сравнив N_1 и N_2 , найдём, что при $v_0 < v_k = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}v_2$ мощность $N_1 > N_2$ и, следовательно, $v_{\max} = v_1$; при $v_0 > v_k$, наоборот, $N_2 > N_1$ и $v_{\max} = v_0$. При $v_0 = v_k$ верны оба ответа.

Задача 3. Подводные работы (Воробьёв И.)

Чтобы вычислить изменение объёма воздуха в колоколе, воспользуемся законом Бойля-Мариотта: $pV = (p + \Delta p)(V - \Delta V)$. Из него следует, что объём воздуха уменьшится на:

$$\Delta V = V \left(\frac{\Delta p}{p + \Delta p} \right) = 0,0133 \text{ м}^3.$$

Рассмотрим равновесие системы «колокол + груз + столб воды внутри колокола». На систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести, сила натяжения троса F_1 и силы гидростатического давления на верхнюю и нижнюю поверхность системы (не все силы показаны на рисунке 14). После поднятия груза объём воздуха уменьшится, освобождённый объём ΔV займет вода массой $\rho\Delta V$. При этом из всех внешних сил, действующих на систему, изменятся только сила натяжения троса и сила тяжести, действующая на воду внутри колокола. Таким образом, сила натяжения троса уменьшится на

$$\Delta F = \rho\Delta Vg = 133 \text{ Н.}$$

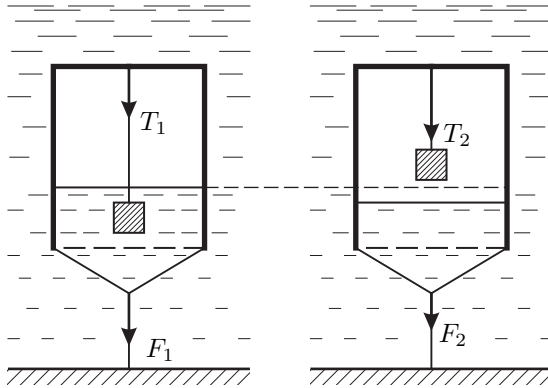


Рис. 14

На колокол действуют сила тяжести, сила гидростатического давления, сила давления воздуха и силы натяжений троса и верёвки. Из них при поднятии груза изменяются силы натяжений и сила давления воздуха. Силы натяжения направлены вниз, сила давления воздуха — вверх. Давление увеличивается, сила натяжения троса уменьшается, значит, сила натяжения верёвки увеличивается, причём:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \Delta p S + \Delta F = 1000 \text{ Н} + 133 \text{ Н} = 1133 \text{ Н}.$$

Задача 4. Сосулька на нити (Замятин М.)

Пусть в некоторый момент температура шарика равна t , а глубина канала h . Запишем уравнение теплового баланса:

$$C(t_1 - t) = \lambda m = \lambda \rho S h. \quad (4)$$

Здесь m — масса растопленного льда. Из записанного уравнения можно найти начальную температуру шарика:

$$t_1 = t_0 + \frac{S H \rho \lambda}{C} = 100^\circ \text{C}.$$

Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур между шариком и льдом. С другой стороны, скорость опускания сосульки тоже связана с мощностью отводимого от шарика тепла

$$\lambda \rho S v = \alpha(t - t_0), \quad (5)$$

где α — постоянный размерный коэффициент. Из уравнения (4) выразим температуру t и подставим её в формулу (5):

$$\lambda \rho S v = \alpha \left(t_1 - \frac{\lambda \rho S h}{C} - t_0 \right), \quad \text{откуда} \quad v = \alpha \left(\frac{t_1 - t_0}{\lambda \rho S} + \frac{h}{C} \right),$$

то есть скорость сосульки линейно зависит от расстояния, на которое она опустилась (рис. 15).

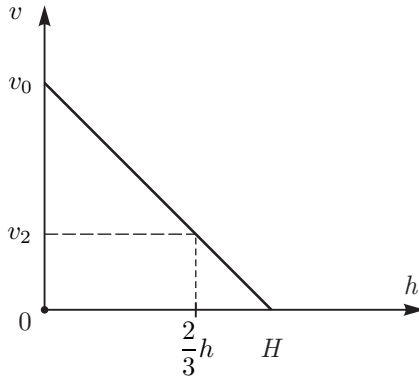


Рис. 15

Тогда в начале эксперимента скорость сосульки $v_0 = 3v_2 = 0,3$ мм/с.

Задача 5. Источник с компьютером (Гордеев М.)

1. Чтобы получить зависимость протекшего через источник заряда от времени, воспользуемся предложенным определением среднего тока:

$$I_{\text{cp}} = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I_{\text{cp}} t$$

Заряд, протекший через источник за время t , численно равен площади прямоугольника $q = I_{\text{cp}} t$. Найдя прошедший заряд для нескольких (>15) точек, построим зависимость $q(t)$ (рис. 16).

2. Поскольку участок ОА – линейный, то силу тока в момент времени t_A можно найти и из следующих соображений:

$$I_{\text{cp}} = \frac{q}{t} = \alpha t \rightarrow q = \alpha t^2$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \alpha \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \approx \alpha \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2\alpha t = 2I_{\text{cp}} t$$

Для точки А: $I_A = 2t_A \cdot I_{\text{cp}}(t_A) = 6$ мА

Сопротивление резистора R найдем из закона Джоуля-Ленца:

$$R = \frac{N_A}{I_A^2} = 4,44 \text{ кОм}$$

3. Максимальной силе тока соответствует точка В с наибольшим угловым коэффициентом на графике $q(t)$ (здесь - точка перегиба).

$$t_B = 3 \text{ с} \quad I_{\text{max}} = 8,25 \text{ мА}$$

Вновь воспользуемся законом Джоуля-Ленца:

$$N_{\max} = RI_{\max}^2 = 0,3025 \text{ Вт}$$

Заметим, что максимальная сила тока и максимальная **средняя** сила тока достигаются не одновременно.

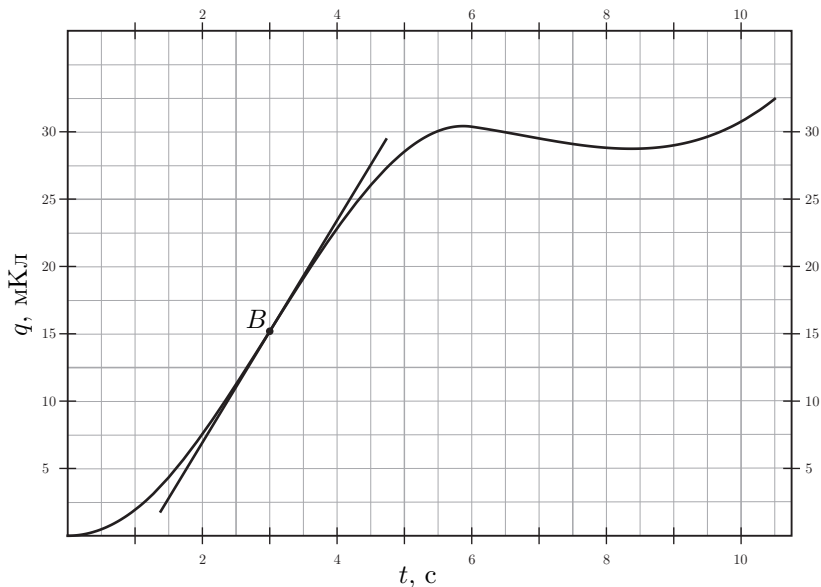


Рис. 16

10 класс

Задача 1. Катапульта (*Замятнин М.*)

Дальность полёта шарика, выпущенного из катапульты под углом φ , равна

$$L = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Так как шарики, имеющие одинаковую начальную скорость, попадают в одну и ту же точку, углы φ_1 и φ_2 относительно горизонта, под которыми их выпускают, удовлетворяют условию $2\varphi_1 = 180^\circ - 2\varphi_2$, что эквивалентно выражению:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ \quad (7).$$

Векторы их начальных скоростей направлены симметрично относительно луча, образующего угол 45° с горизонтом (рис. 17). Время, в течение которого оба шарика находятся в полете, определяется временем полета нижнего шарика (верхний шарик летит дольше):

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_0 \sin(45^\circ - \alpha)}{g}. \quad (8)$$

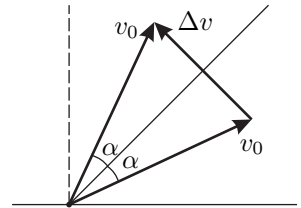


Рис. 17

Перейдём в систему отсчета, начало координат которой совпадает с нижним шариком, а ориентация осей в пространстве неизменна в течение всего полёта. В этой системе отсчёта верхний шарик движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\Delta v = 2v_0 \sin \alpha. \quad (9)$$

За время $t_{\text{п}}$ он успеет удалиться на расстояние

$$L = \Delta v t_{\text{п}} = \frac{4v_0^2}{g} \sin \alpha \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{2v_0^2}{g} (\cos(2\alpha - 45^\circ) - \cos 45^\circ). \quad (10)$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos(2\alpha - 45^\circ) = 1$, то есть, когда $\alpha = 22,5^\circ$. Значит,

$$L_{\text{max}} = \frac{2v_0^2}{g} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда начальная скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{max}} g}{2 - \sqrt{2}}} = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Катушка с проводом (*Кармазин С.*)

Решение 1.

Пусть R — внешний радиус катушки, r — внутренний радиус, μ — коэффициент трения между стержнем и катушкой, \vec{Q} — полная реакция опоры, которую можно представить как сумму силы нормальной реакции опоры \vec{N} и силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($\vec{Q} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$).

На рисунках 18 и 19 показаны силы, действующие на катушку в процессе ее равномерного разматывания под действием силы F .

Заметим, что между внутренней поверхностью катушки и стержнем будет действовать сила трения, причём отношение модулей сил $F_{\text{тр}}$ и Q зависит только от коэффициента трения, но не от силы F . Отсюда

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Из равенства моментов сил относительно центра катушки

$$FR = F_{\text{тр}}r.$$

получаем

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Заметим также, что

$$Q_1 = F_1 + P,$$

и,

$$Q_2 = \sqrt{F_2^2 + P^2}.$$

Решив полученную систему уравнений, найдём

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1 + P}{\sqrt{F_2^2 + P^2}}.$$

откуда получаем искомую массу:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$

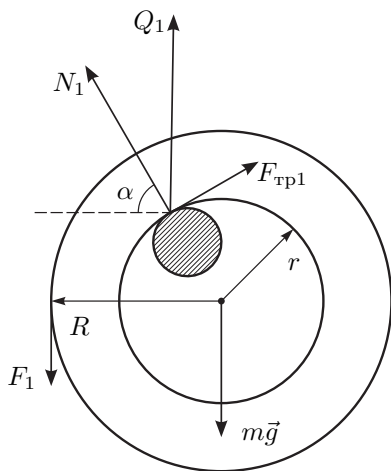


Рис. 18

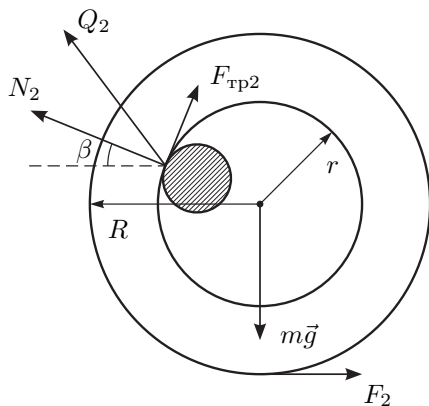


Рис. 19

Решение 2 («в лоб»). Пусть α — угол между направлением силы N_1 и горизонталью. Условие равенства нулю равнодействующей всех сил в проекции на горизонтальную ось имеет вид:

$$\mu N_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0 \quad (11)$$

а в проекции на вертикальную ось

$$N_1 \sin \alpha + \mu N_1 \cos \alpha = P + F_1. \quad (12)$$

Условие равенства моментов сил относительно центра катушки имеет вид:

$$\mu N_1 r = F_1 R. \quad (13)$$

Возведем (11) и (12) в квадрат и сложим их:

$$N_1^2 + (\mu N_1)^2 = (P + F_1)^2. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда нить тянут горизонтально (рис. 19). Обозначим символом β угол между силой реакции опоры N_2 и горизонталью. Уравнения, аналогичные (11) — (14), для второго случая принимают вид

$$\mu N_2 \sin \beta + N_2 \cos \beta = P, \quad (15)$$

$$N_2 \sin \beta - \mu N_2 \cos \beta = F_2, \quad (16)$$

$$\mu N_2 r = F_2 R.$$

Аналогично решая полученную систему уравнений (15) и (16), найдем:

$$N_2^2 + (\mu N_2)^2 = P^2 + F_2^2. \quad (17)$$

Делим уравнение (14) на (17) и получаем:

$$\frac{(P + F_1)^2}{P^2 + F_2^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{F_1^2}{F_2^2},$$

откуда следует ответ:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$

Примечание: формально одним из решений является $P = 0$, однако тогда равнодействующая силы реакции и силы трения должна быть противоположна силе F_1 и направлена по той же прямой. Это возможно только в случае, если $R = r$.

Задача 3. Охлаждение гелия (Шеронов А.)

Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$. Работу газа на начальном этапе охлаждения найдём, вычислив площадь под графиком (рис. 20):

$$A = -\frac{1}{2}(P_0V_0 - P_1V_1) = -\frac{1}{2}(RT_0 - RT_1) = \frac{R}{2}\Delta T.$$

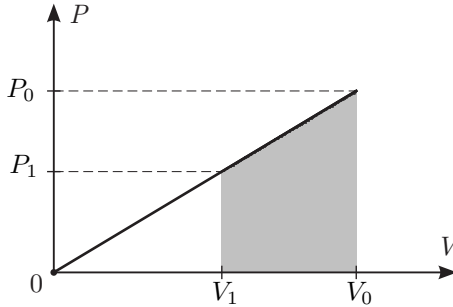


Рис. 20

В начале процесса охлаждения теплоёмкость равнялась:

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \delta A}{\Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

Следовательно, теплоемкость рассматриваемого процесса

$$C = 2R\frac{T}{T_0}. \quad (18)$$

Работа газа будет отрицательной до тех пор, пока газ не примет минимальный объём (точка C на рисунке 21). В этой точке $\Delta V = 0$, а значит теплоёмкость

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V = \frac{3}{2}R. \quad (19)$$

Приравняв (19) к (18), найдём температуру T_c , при которой объём газа достигает своего минимума:

$$T_c = \frac{3}{4}T_0.$$

Так как суммарная работа газа равна нулю, то положительная работа A_+ (площадь под участком CX графика) равна по модулю отрицательной работе A_- (площади под участком OC графика). Найдём искомую работу газа, воспользовавшись первым законом термодинамики: $Q_{OC} = \Delta U + A_{OC}$, где Q_{OC} — тепло, полученное газом на участке OC . Его значение найдём как площадь под графиком $C(T)$. Поскольку график линейный, то

$$Q_{OC} = -\frac{2R}{T_0} \frac{T_0^2 - T_c^2}{2} = -\frac{7}{16}RT_0.$$

Изменение внутренней энергии на этом участке:

$$\Delta U = U_c - U_0 = C_V(T_c - T_0) = -\frac{3}{8}RT_0,$$

откуда $A_{OC} = Q_{OC} - \Delta U = -\frac{RT_0}{16}$. Искомая работа $A_{CX} = -A_{OC} = \frac{RT_0}{16}$.

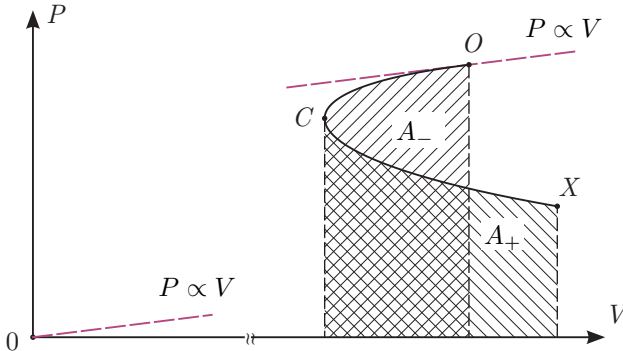


Рис. 21

Найдём температуру T_x , при достижении которой работа становится равной нулю:

$$A = Q - \Delta U = \frac{2R}{T_0} \frac{T_x^2 - T_0^2}{2} - C_V(T_x - T_0) = \frac{R}{T_0}(T_x - T_0)(T_x + T_0 - \frac{3}{2}T_0),$$

откуда $T_x/T_0 = 1/2$.

Задача 4. Источник стабильности (Александров Д.)

Пусть I — сила тока в резисторе R , J — сила тока в резисторе r , q — заряд, протекший через резистор R после замыкания ключа (заряд конденсатора). За достаточно малое время, при котором изменением напряжения на резисторе R можно пренебречь, выделившаяся на резисторе теплота равна произведению этого напряжения на протекший заряд:

$$\delta Q = U \Delta q = IR \Delta q.$$

Отсюда следует, что полная теплота численно равно умноженной на R площади под графиком зависимости силы тока I через резистор R от протекшего через него заряда q . Найдём эту зависимость. Из уравнений

$$I_0 = I + J, \quad Jr = IR + \frac{q}{C},$$

получаем

$$I_0 r = I(r + R) + \frac{q}{C}.$$

Таким образом, график зависимости $I(q)$ представляет собой прямую, пересекающую оси в точках $(I_0 r)/(r + R)$ и $CI_0 r$. Площадь под этим графиком

$$S = \frac{1}{2} I_0 \frac{r}{r + R} CI_0 r = \frac{CI_0^2 r^2}{2(r + R)}.$$

Отсюда находим ответ

$$Q = SR = \frac{CRI_0^2 r^2}{2(r + R)}.$$

Задача 5. Разойдутся или нет? (Воробьёв И.)

Из второго закона Ньютона найдём ускорение точки массы m

$$a_1 = -k \frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$$

и ускорение точки массы M

$$a_2 = k \frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}.$$

Здесь r — расстояние между точками, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, за положительное выбрано направление от m к M . Найдём относительное ускорение точек:

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k \frac{q^2}{r^2} \frac{M + m}{Mm} - qE \frac{M - m}{Mm}.$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда q массой $\mu = (M + m)/(Mm)$, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $-E_1 = -E(M - m)/(M + m)$. Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда:

$$U(r) = k \frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$

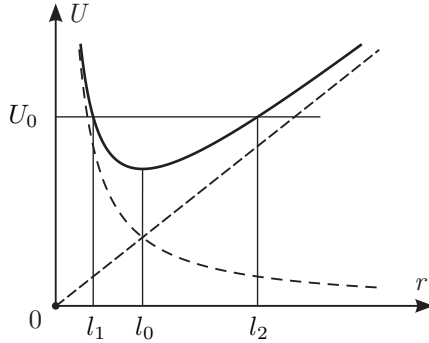


Рис. 22

Из графика зависимости $U(r)$ (рис. 22) видим, что движение заряда происходит в ограниченной области $l_1 \leq r \leq l_2$; l_1 и l_2 — корни уравнения

$$U_0 = k \frac{q^2}{r} + qE_1 r,$$

или

$$r^2 - \frac{U_0}{qE_1} r + \frac{kq}{E_1} = 0.$$

По теореме Виета произведение корней не зависит от U_0 и равно $l_1 l_2 = l_0^2$, где $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$. Таким образом, получаем, что если начальное расстояние l меньше, чем l_0 , то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения l_0^2/l , а затем уменьшаться. Если же $l < l_0$, то начальное расстояние и будет максимальным. При $l = l_0$ расстояние между зарядами меняться не будет.

Ответ: максимальное расстояние между зарядами равно l при $l \geq \sqrt{kq/E_1}$ и равно kq/lE_1 при $l < \sqrt{kq/E_1}$.

11 класс

Задача 1. Растяжение пружины (Гуденко А.)

Если жёсткость всей пружины длиной l равна k , то период продольных колебаний груза можно найти по формуле:

$$T_{\parallel}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{4k},$$

где m — масса груза.

Уравнение движения груза в поперечном направлении имеет вид:

$$m\varphi'' \frac{l}{2} = 2F_{\text{упр}} \varphi = -2k\Delta l \varphi \iff \varphi'' + \frac{4k\Delta l}{ml} \varphi = 0.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_{\perp}^2 = (4k\Delta l)/(ml)$, их период:

$$T_{\perp}^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{4k\Delta l} = 4\pi^2 \frac{m}{4k} \left(1 + \frac{l_0}{\Delta l}\right).$$

Отношение периодов:

$$\frac{T_{\perp}^2}{T_{\parallel}^2} = n^2 = 1 + \frac{l_0}{\Delta l}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Поскольку $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1$:

$$\frac{\Delta x}{l_0} = \frac{1}{n_2^2 - 1} - \frac{1}{n_1^2 - 1} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)},$$

откуда

$$l_0 = \frac{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)}{n_1^2 - n_2^2} \Delta x = 60 \text{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{l_0}{n_1^2 - 1} = 4 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{l_0}{n_2^2 - 1} = 7,5 \text{ см}.$$

Задача 2. Наноплавление (Гуденко А.)

Уменьшение температуры плавления для нанобъектов связано с увеличением (при уменьшении объёма) доли приповерхностных атомов, обладающих избыточной энергией ΔU по сравнению с объёмными атомами. Для образцов различной формы эти доли оказываются разными. Для шариков доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ :

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{4\pi R^2 \delta}{4\pi R^3/3} = 3\delta/R = 6\delta/d.$$

Приведённая формула справедлива, если $\delta \ll d$. Оценим толщину приповерхностного слоя. Объём, приходящийся на один атом олова равен:

$$v = \frac{1}{\rho N_A} \mu,$$

а следовательно характерное межатомное расстояние $a = \sqrt[3]{v} \approx 3,0 \cdot 10^{-10}$ м. Приповерхностный слой в таком случае имеет размеры меньше 1 нм, что существенно меньше 20 нм.

Теплота плавления уменьшается на величину избыточной энергии всех приповерхностных атомов:

$$\Delta q_0 = \Delta U \Delta N = (\Delta U N) 6\delta/d.$$

Новая теплота плавления:

$$q = q_0 - \Delta q_0 = q_0 - (\Delta U N) 6\delta/d.$$

В пересчёте на атом:

$$\lambda = q/N = q_0/N - \Delta U (6\delta/d).$$

Учитывая, что $\lambda = q/N = \alpha T_d$ и $\lambda_0 = q_0/N = \alpha T_0$ (α – коэффициент пропорциональности), получаем относительное понижение температуры плавления нанопарика по сравнению с массивным образцом:

$$\Delta T_d/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{6\delta}{d}.$$

Доля атомов в приповерхностном слое толщиной δ фольги площадью S :

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{2S\delta}{Sh} = 2\delta/h = 2\delta/d.$$

Соответственно, относительное понижение температуры плавления фольги:

$$\Delta T_h/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{2\delta}{d} = \Delta T_d/\Delta T_h = 3.$$

Это соотношение хорошо подтверждается экспериментально:

$$\Delta T_h = 1/3 \Delta T_d \approx 8,30^\circ\text{C} \rightarrow t_h = t_0 - \Delta T_h \approx 223,7^\circ\text{C}.$$

Задача 3. Восьмёрка лорда Кельвина (Ерофеев И.)

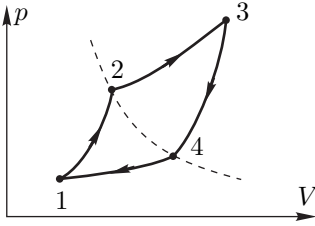


Рис. 23

Качественно изобразим процесс на графике в привычных (p, V) координатах (рис. 23). График состоит из четырёх политроп: процессу ab соответствует линия 12 , $ef - 23$, $cb - 34$, $ed - 41$. Также важно отметить, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме ($T_2 = T_4 = T_b$).

1. Поскольку теплота, переданная газу в процессе с постоянной теплоёмкостью, равна $Q = C\Delta T$, то в координатах CT теплота процесса численно

равна площади под графиком. Из графика в условии видно, что на участке 12 и 23 тепло подводится, а на участках 34 и 41 — отводится. Найдём подведённую теплоту Q_+ и отданную теплоту Q_- :

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23} = C_a(T_2 - T_1) + C_d(T_3 - T_2) = 271,5 \text{ Дж.}$$

$$Q_- = Q_{34} + Q_{41} = -C_a(T_3 - T_2) - C_d(T_2 - T_1) = -243 \text{ Дж.}$$

По первому началу термодинамики полная теплота в цикле равна работе, совершённой газом:

$$A = Q_+ + Q_- = 28,5 \text{ Дж,} \quad \text{тогда} \quad \eta = \frac{A}{Q_+} = 0,105.$$

2. Из уравнения политропы и уравнения состояния идеального газа $pV/T = \text{const}$ следует связь между T и V :

$$TV^{n-1} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-n}} = \frac{V}{V_0}. \quad (20)$$

Запишем (20) для четырёх процессов:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_1}{V_2}, \quad \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_2}{V_3}, \quad \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_3}{V_4}, \quad \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_4}{V_1}.$$

Перемножим все равенства:

$$\left(\frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}\right)^{\frac{n_a - n_d}{(1-n_a)(1-n_d)}} = 1, \quad \text{откуда} \quad T_1 T_3 = T_2 T_4 = T_2^2. \quad (21)$$

Запишем (21), используя $T_2 = T_1 + T_0$ и $T_3 = T_1 + 3T_0$, где $T_0 = 100 \text{ К}$:

$$T_1(T_1 + 3T_0) = (T_1 + T_0)^2, \quad \text{откуда} \quad T_1 = T_0.$$

Таким образом, получим $T_1 = 100 \text{ К}$, $T_2 = 200 \text{ К}$ и $T_3 = 400 \text{ К}$.

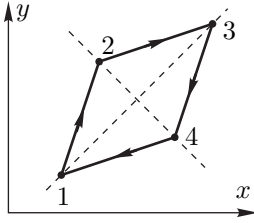


Рис. 24

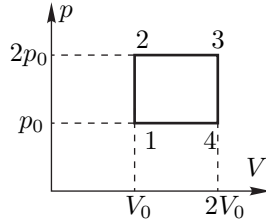


Рис. 25

3. Найдём связь между показателем политропы n и теплоёмкостью C . Дифференцируя (20), найдём: ΔV и ΔT :

$$V^{n-1}\Delta T + (n-1)TV^{n-2}\Delta V = 0, \quad \text{откуда} \quad \Delta V = \frac{\Delta T}{1-n} \frac{V}{T}.$$

Запишем первый закон термодинамики:

$$\Delta Q = C\Delta T = \Delta U + A = C_V\Delta T + p\Delta V = C_V\Delta T + p \frac{\Delta T}{1-n} \frac{V}{T}$$

$$(C - C_V)\Delta T = \frac{\Delta T}{1-n} \frac{pV}{T} = \frac{\nu R\Delta T}{1-n}.$$

Таким образом,

$$n = 1 - \frac{\nu R}{C - C_V} = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Взяв логарифм от уравнения политропы, получим:

$$\ln \frac{p}{p_0} + n \ln \frac{V}{V_0} = \text{const},$$

откуда следует, что в координатах xy , где $x = \ln V/V_0$, а $y = \ln p/p_0$, график политропы представляет прямую с наклоном $-n$, следовательно, график всего цикла будет параллелограммом, у которого точки 2 и 4 лежат на прямой $x + y = \text{const}$ (рис. 24). Из условия $p_1/p_3 = V_1/V_3$ находим, что точки 1 и 3 лежат на прямой $x - y = \text{const}$. Таким образом, диагонали параллелограмма перпендикулярны следовательно, график цикла является ромбом. Поскольку диагональ 13 ромба является биссектрисой, то углы наклона политроп в сумме дают 90° , откуда следует, что произведение угловых коэффициентов равно 1:

$$n_a n_d = \frac{C_p - C_a}{C_a - C_V} \cdot \frac{C_p - C_d}{C_d - C_V} = 1, \quad \text{откуда} \quad C_a + C_d = C_p + C_V = \nu(c_p + c_V),$$

где c_p и c_V — молярные теплоёмкости. Окончательно найдём:

$$\nu = \frac{C_a + C_d}{c_p + c_V} = 34,4 \text{ ммоль}.$$

Заметим, что $C_a = \nu c_v$, а $C_d = \nu c_p$, следовательно, цикл процесса состоит из двух изобар и двух изохор (рис. 25).

Задача 4. Электроудар (Варламов С.)

1. Период колебаний каждого из шариков $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2,0$ с.
2. Шарика считаем точечными зарядами. При отклонении проволок от вертикали на небольшой угол α ($\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha \approx \alpha$) в сторону сближения сила кулоновского притяжения $F_q = kq^2/(d-2\alpha l)^2$ уравновешивается равнодействующей сил тяжести и натяжения проволок $F_p = mg\alpha$:

$$k \frac{q^2}{(d-2\alpha l)^2} = mg\alpha \quad \rightarrow \quad k \frac{q^2}{mg} = \alpha(d-2\alpha l)^2 = f(\alpha).$$

Функция $f(\alpha) = \alpha(d-2\alpha l)^2$ имеет максимум при $\alpha_0 = d/(6l)$. Этому значению соответствует максимальное значение заряда шариков:

$$kq_{\max}^2 = mg\alpha_0(d-2\alpha_0 l)^2 = \frac{2mgd^3}{27l} \quad \rightarrow \quad q_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}.$$

Для отклонения шариков на больший, чем α_0 угол, вплоть до столкновения, требуется меньший заряд, а значит, при сколь угодно незначительном превышении q_{\max} шарика под действием кулоновского взаимодействия достаточно быстро притянутся и, взаимно разрядившись, вновь разойдутся, пока вновь не приобретут необходимый для столкновения критический заряд q_{\max} . Разность потенциалов между шариками при q_{\max} равна минимальному значению напряжения источника, при котором шарика столкнутся:

$$U_{\min} = \varphi_+ - \varphi_- = k \frac{q_{\max}}{r} - (-k \frac{q_{\max}}{r}) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64,6 \text{ кВ}.$$

3. Поскольку $U_{\min} \ll U_0 = 1$ МВ, ток заряда можно считать постоянным $I = U_0/R$, и время заряда до значения q_{\max} можно рассчитать по формуле:

$$\tau = \frac{q_{\max}}{I} = \frac{U_{\min} r}{2k} \frac{R}{U_0} = 18 \text{ с}.$$

Задача 5. В архиве Снеллиуса (Слободянин В.)

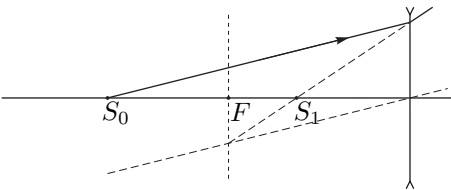


Рис. 26

Для начала проведём качественный анализ того, где может располагаться линза и какой она может быть. **Рассеивающая линза.** Изображение в рассеивающей линзе всегда мнимое и лежит по ту же сторону от линзы, что и источник, причем расстояние от линзы до изображения меньше расстояния от линзы до источника. Таким образом, условию удовлетворяет рассеивающая линза, которая находится правее S_1 (рис. 26).

Собирающая линза. Изображение может быть как мнимым, так и действительным. Мнимое (причём увеличенное) изображение расположено от линзы всегда дальше, чем источник, поэтому линза, дающая мнимое изображение, расположена слева от S_0 (рис. 27).

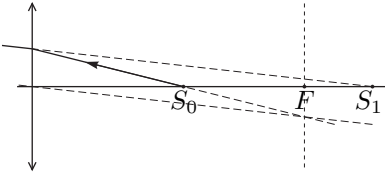


Рис. 27

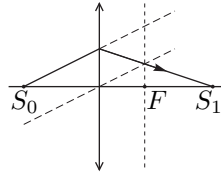


Рис. 28

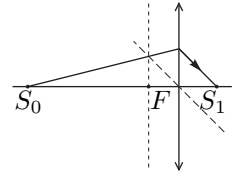


Рис. 29

Если линза расположена между источником S_0 и изображением S_1 , то изображение — действительное. Так как линза имеет два фокуса, то точка F может лежать как справа (рис. 28), так и слева от линзы (рис. 29).

Таким образом, существуют четыре решения!

Теперь найдём точные координаты оптических центров этих линз и выполним построения. Пусть расстояние от источника света до фокуса равно d , до изображения — L , а до линзы — x . Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{|x|} \pm \frac{1}{|L-x|} = \pm \frac{1}{|d-x|}, \quad (22)$$

где знак плюс в левой части соответствует действительному изображению, а минус — мнимому. Знак плюс перед оптической силой линзы соответствует собирающей линзе, а знак минус — рассеивающей.

Данные в задаче точки S_0 , F и S_1 делят оптическую ось на четыре промежутка, в каждом из которых модули в уравнении (22) будут раскрываться с различными знаками.

Найдём все решения уравнения (22). Раскроем знаки на промежутке S_0F . Как мы заметили выше, здесь может располагаться только собирающая линза, тогда:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} = \frac{1}{d-x},$$

$$x^2 - 2Lx + Ld = 0 \rightarrow L-x = \mp \sqrt{L(L-d)},$$

причем решение со знаком минус попадает в рассматриваемый нами промежуток.

Решая по аналогии уравнение (22) на оставшихся трёх промежутках, найдём, что ещё две собирающие линзы находятся в точках $x = \pm \sqrt{Ld}$, а в точке $L-x = \sqrt{L(L-d)}$ находится рассеивающая линза.

Все построения в данной задаче сводятся к построению корней из произведений длин отрезков. В курсе геометрии доказывается, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее

пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Таким образом, найдём $\sqrt{S_0S_1 \cdot FS_1}$ и $\sqrt{S_0S_1 \cdot S_0F}$ и отложим полученные отрезки от точки S_0 вправо и от точки S_1 в обе стороны, соответственно.

Пошаговая инструкция к построению (рис. 30):

1. Отложим на оптической оси отрезок длины $S_0S_1 = L$ вправо от точки S_1 . Обозначим точку M_1 .
2. Найдём среднее геометрическое длин отрезков $FS_1 = L - d$ и L . Для этого построим окружность на диаметре FM_1 . Найдём точку пересечения перпендикуляра к оптической оси, проходящего через S_1 , и окружности — P_1 . Длина отрезка S_1P_1 равна $\sqrt{L(L-d)}$.
3. Отложим отрезки длины S_1P_1 влево (O_1) и вправо (O_2) от S_1 на оптической оси. Левая линза окажется собирающей, а правая — рассеивающей.
4. Отложим на оптической оси отрезок длины $S_0S_1 = L$ влево от точки S_0 . Обозначим точку M_0 .
5. По аналогии с пунктом 2 построим окружность на диаметре M_0F и перпендикуляр S_0P_0 , длина которого равна \sqrt{Ld} .
6. Отложим отрезки длиной S_0P_0 вправо (O_3) и влево (O_4) от точки S_0 на оптической оси. Эти линзы являются собирающими.

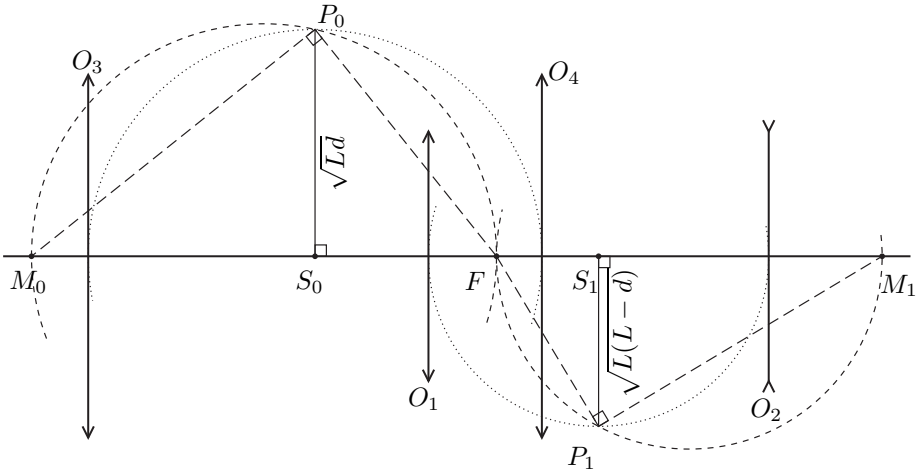


Рис. 30

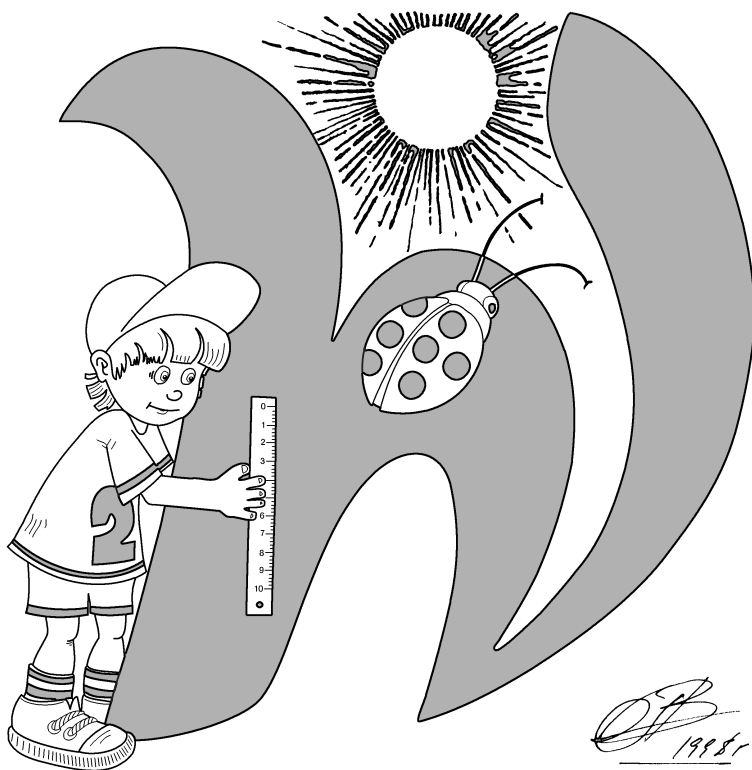
Методическая комиссия по физике
при центральном оргкомитете
Всероссийских олимпиад школьников

XLVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Экспериментальный тур

Методическое пособие



Санкт-Петербург, 2014 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

9 класс

1. Замятнин М.
2. Замятнин М.

10 класс

1. Фольклор
2. Гуденко А.

11 класс

1. Гуденко А.
2. Варламов С.,
Тарчевский А.

Общая редакция — Кбзел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Паринов Д., Цыбров Ф.

При подготовке оригинал-макета
использовалась издательская система $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$.

© Авторский коллектив
141700, Московская область, г. Долгопрудный
Московский физико-технический институт

9 класс

Задача 1. Стратификация

Предостережение

«Черный ящик» необходимо располагать открытым концом пробирки вверх. Запрещается разбирать установку. При нарушении данного требования возможно необратимое повреждение оборудования, при котором новое оборудование выдаваться не будет. «Чёрный ящик» не взбалтывать, жидкости на вкус не пробовать.

Запишите в работе номер вашей установки.

В вертикально расположенной пробирке находятся несколько не смешивающихся между собой жидкостей. Диаметр пробирки D постоянен по высоте и указан на установке. Напоминаем, что площадь круга вычисляется по формуле $\pi D^2/4$.

Определите:

1. плотность материала стержня;
2. плотности жидкостей;
3. объёмы слоёв жидкостей.

Оборудование. «Черный ящик» с пробиркой, весы, стержень, нить, два канцелярских зажима, линейка, салфетки, миллиметровая бумага.

Задача 2. Мостик

Внутри «серого ящика» находится схема с идеальным источником напряжения, показанная на рис. 1. К выводам, отмеченным V , подключите мультиметр в режиме вольтметра.

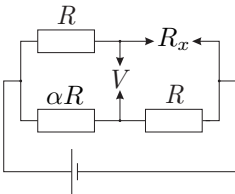


Рис. 1

1. Определите напряжение на источнике U_0 и коэффициент α .

2. Снимите зависимость показаний вольтметра $U(R_x)$ от сопротивления R_x плеча моста (не менее 11 точек в максимально широком диапазоне). Постройте график в координатах, в которых зависимость будет линейной.

3. С помощью полученного графика определите сопротивление R_{x0} , при котором мост оказывается сбалансированным, и сопротивление R внутри «серого ящика».

Оборудование. «Серый ящик», мультиметр в режиме вольтметра, резисторы известного сопротивления 510 Ом, 1 кОм и 3 кОм, зажимы «крокодил».

10 класс

Задача 1. Конденсаторы

Электролитические конденсаторы (ЭК) — конденсаторы, в которых в качестве диэлектрика используется тонкая оксидная плёнка, нанесённая на поверхность одного из электродов. Их важной особенностью является полярность, то есть включать в цепь их нужно с учётом направления протекающего тока. Плюсу ЭК соответствует длинная ножка, а минусу — короткая, напротив которой есть метка со знаком «-». Все измерения следует проводить, соблюдая правильную полярность.

Сопротивление мультиметра в режиме измерения постоянного напряжения $R_V = 1,00 \text{ МОм}$ на всех пределах измерения.

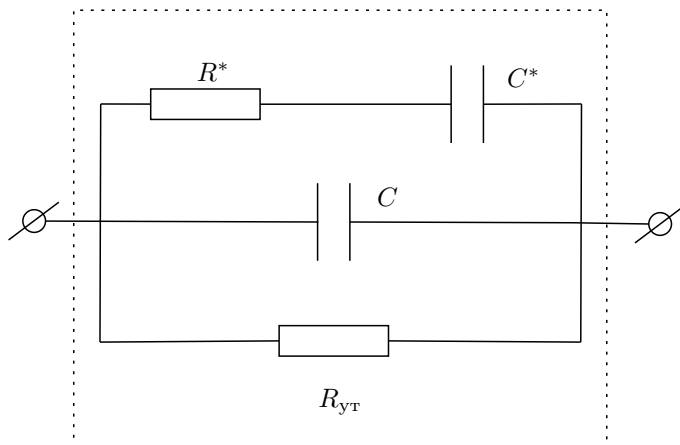


Рис. 2

1. Используя только мультиметр с проводами, определите отношение ёмкостей конденсаторов.
2. Определите значения ёмкостей обоих конденсаторов.
3. Если выводы заряженного конденсатора на небольшое время $t \approx 5 \text{ с}$ замкнуть, а затем измерить напряжение на нём, то напряжение частично восстановится. Считая, что схема, представленная на рисунке 2, качественно описывает это явление, определите параметр C^* этой схемы.

Оцените погрешности полученных величин.

Оборудование. Два конденсатора неизвестной ёмкости; мультиметр; секундомер; соединительные провода.

Задача 2. Диффузия гелия

Воздушный шарик, накачанный гелием, относительно быстро сдувается (за несколько часов его объём уменьшается в два раза). Это связано с диф-

фузией гелия через резиновую оболочку шарика. Плотность потока j гелия (число молекул, проникающих через единичную площадку резины в единицу времени) определяется *законом Фика*:

$$j = D \frac{\Delta n}{\delta},$$

где D — коэффициент диффузии гелия через резину, δ — толщина оболочки надутго шарика, $\Delta n = n - n_0$ — разность концентрации n гелия внутри шарика и n_0 вне.

Задание. Определите коэффициент диффузии D гелия через резину. Считайте, что шарик проницаем только для гелия, то есть воздух не проникает внутрь шарика. Убедитесь в этом экспериментально.

Молярная масса воздуха и гелия $\mu_{\text{воз}} = 29$ г/моль, $\mu_{\text{He}} = 4$ г/моль. Давление в шарике считайте равным атмосферному давлению в аудитории $p_0 = 10^5$ Па. Температура в аудитории $t = 27^\circ\text{C}$, плотность резины $\rho_{\text{рез}} = 1,05$ г/см³, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Считайте, что при надувании шарика плотность резины не меняется и утечкой гелия через узел можно пренебречь

Оборудование. Два одинаковых резиновых шарика, один из которых накачан гелием; весы; три груза (гайки); бумажная измерительная лента; миллиметровая бумага; секундомер; ножницы (по требованию).

11 класс

Задача 1. Эксцентричная струна

Стоячие поперечные волны в натянутой резиновой нити можно возбудить с помощью периодического воздействия на нить вблизи точки закрепления. При определённых частотах воздействия возникает резонансное возрастание амплитуды колебаний. В возникшей стоячей волне на длине нити укладываются целое число полуволен.

Скорость u распространения поперечной волны небольшой амплитуды, бегущей по резиновой нити, зависит от её погонной плотности ρ_l [кг/м] и силы её натяжения T по формуле:

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}.$$

Зная скорость волны, несложно рассчитать резонансные частоты в зависимости от силы натяжения нити, её длины и погонной плотности.

1. Соберите установку для возбуждения волн в натянутой нити. Опишите методику измерения резонансных частот стоячих волн в натянутой резиновой нити.
2. Определите наименьшие резонансные частоты поперечных колебаний резиновой нити для нескольких (5–7) значений силы её натяжения T , увеличивая длину нити l вплоть до значения $l = 2l_0$, где l_0 — длина нерастянутой нити.
3. Получите теоретическую зависимость наименьшей резонансной частоты колебаний нити от силы её натяжения и длины $f = f(T, l)$.
4. Используя результаты измерений пункта 2, сравните теоретическую зависимость $f(T, l)$ с экспериментом.
5. Определите погонную плотность ρ_l нити.
6. Для силы натяжения $T = 0,16$ Н определите все резонансные частоты f_n , которые можно получить с помощью предоставленного оборудования*. Постройте экспериментальную зависимость $f_n(\lambda)$, где λ — длина волны, и объясните её теоретически. Определите по этим данным скорость волны.

ВНИМАНИЕ. *Максимальное напряжение, которое можно прикладывать к электромотору, $U_{\text{макс}} = 9$ В. Взамен сгоревших электромоторов новые выдаваться *не будут*. Изменять расположение электромотора запрещается.

Оборудование. Тонкая резиновая нить длиной около 30 см, закреплённая на клипсах, электромотор с эксцентриком, прикрепленный к столу, регулируемый источник постоянного тока, стробоскоп, динамометр, бумажная измерительная лента, полоса чёрной бумаги.

Задача 2. Ток в пробирке

Большинство стёкол состоят из SiO_2 , CaO и оксидов щелочных металлов (Na_2O или K_2O). Присутствие катионов щелочных металлов обеспечивает сла-

бую проводимость стекла. Но в отличие от электронов в металле, катионы в стекле не могут двигаться свободно: чтобы «перескочить» в новое место, катион должен обладать энергией большей, чем некоторый потенциальный барьер — энергия активации W_a . Количество подвижных катионов, то есть катионов с энергией большей W_a , при температуре порядка комнатной согласно закону Больцмана:

$$N \propto \exp\left(-\frac{W_a}{kT}\right),$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Проводимость стекла σ пропорциональна количеству подвижных катионов, соответственно, удельное сопротивление ρ — обратно пропорционально:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{W_a}{kT}\right), \quad (1)$$

где ρ_0 — некоторый постоянный коэффициент.

1. Снимите зависимость удельного сопротивления стекла пробирки $\rho(t)$ от температуры в диапазоне от $t_1 = 45^\circ\text{C}$ до $t_2 = 75^\circ\text{C}$ (не менее 15 точек).
2. Определите энергию активации W_a катионов в стекле пробирки и выразите её в электронвольтах. Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Примечание. Внутреннее сопротивление R_M мультиметра на различных диапазонах приведено в таблице. Погрешность R_M составляет 1%.

Диапазон	R_M , Ом
10 А	1
200 мА	10
20 мА	20
2000 мкА	100
200 мкА	10^3
Все диапазоны вольтметра V	10^6

Оборудование. Стеклянная пробирка (толщина стенок $\delta = 1,10 \pm 0,05$ мм), пластмассовый стакан, пенопластовая крышка, термометр, мультиметр, миллиметровая бумага, линейка, батарейка «Крона», клеммы, провод, горячая вода по требованию, салфетка.

Возможные решения

9 класс

Задача 1. Стратификация

1. Диаметр стержня измерим путём прокатывания стержня по линейке. Необходимо установить диаметр стержня с высокой точностью, так как иначе погрешность в определении плотности окажется велика.

Плотность материала стержня ρ_c найдем измерив масса стержня m_0 и его объём V . Для этого проведём непосредственное измерение длины стержня с помощью линейки.

2. Поставим «черный ящик» на весы, стрежень привяжем к нити. Линейку закрепим горизонтально на столе зажимами в углу стола. Нить перекинем через угол стола. В этом случае смещение нити по горизонтали равно глубине погружения h .

Снимем зависимость показаний весов m от глубины погружения стержня h .

Пусть верхний конец стержня находится в жидкости плотностью ρ_B , нижний конец — в жидкости плотностью ρ_H . При погружении стержня в жидкость на глубину Δh граница раздела жидкостей поднимается на высоту ΔH (рис. 3), а показания весов увеличиваются на массу вытесненной жидкости Δm .

Объём жидкости не меняется, поэтому величины Δh и ΔH связаны соотношением:

$$s\Delta h = (S_0 - s)\Delta H,$$

где s — площадь сечения стержня, S_0 — площадь сечения пробирки.

Увеличение объёма $\Delta V = s(\Delta H + \Delta h)$ вытесненной жидкости плотностью ρ_H приводит к увеличению показаний весов на величину $\Delta m_1 = \rho_H \Delta V$. Тот же объём ΔV занимает жидкость плотностью ρ_B , поэтому показания весов уменьшаются на $\Delta m_2 = \rho_B \Delta V$.

Суммарное изменение показаний весов равно:

$$\Delta m = \Delta m_1 - \Delta m_2 = (\rho_H - \rho_B)(\Delta H + \Delta h)s = \frac{(\rho_H - \rho_B)s\Delta h}{1 - s/S_0}.$$

По коэффициенту наклона $k = \Delta m/\Delta h$ графика $m(h)$ (рис. 4) находим разность плотностей жидкостей, в которых при данной глубине h находятся нижний и верхний конец стрежня:

$$\rho_H - \rho_B = (1 - s/S_0) \cdot k/s.$$

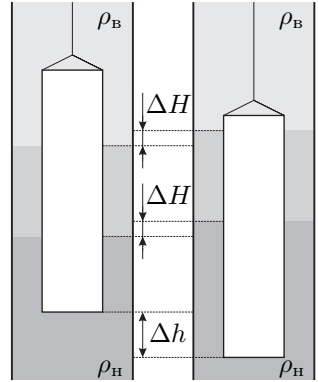


Рис. 3

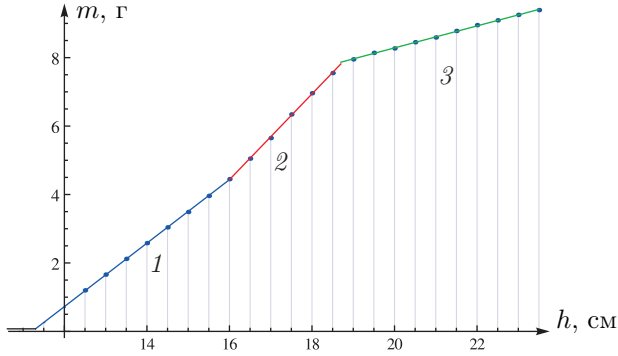


Рис. 4

Три наклонных участка на графике соответствуют двум жидкостям в пробирке: на участке 1 верхний конец стержня находится в воздухе, нижний — в первой жидкости плотностью ρ_1 ; на участке 2 верхний конец в воздухе, нижний — в жидкости плотностью ρ_2 ; на участке 3 верхний конец в жидкости плотностью ρ_1 , нижний — ρ_2 .

3. Объем жидкости равен произведению площади пробирки $\pi D^2/4$ на высоту жидкости. Высота первой жидкости равна изменению глубины погружения стержня на участке 1, высота второй жидкости — на участках 2 и 3.

Задача 2. Мостик

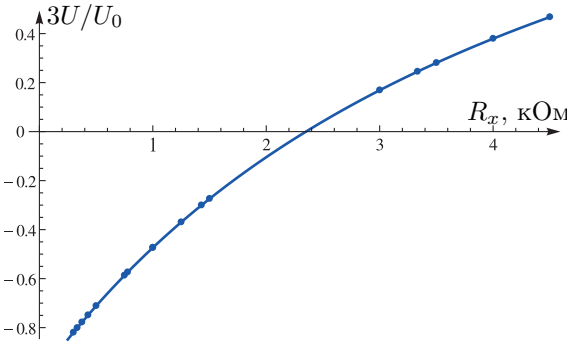


Рис. 5

1. Если выводы «серого ящика» оставить разомкнутыми, то по нижней ветви течёт ток, а вольтметр показывает падение напряжения U_1 на резисторе αR .

$$U_1 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} U_0.$$

Если теперь выводы замкнуть накоротко, то вольтметр покажет напряжение:

$$U_2 = \frac{1}{\alpha + 1} U_0.$$

Находим коэффициент $\alpha = U_1/U_2$, а затем напряжение $U_0 = U_2(\alpha + 1)$.

2. Для исследования зависимости подключаем резисторы, по разному соединённые между собой. С помощью трех различных резисторов возможно получить 17 различных сопротивлений R_x . Оказывается, что между 1,5 кОм

и 3 кОм нет промежуточных значений (рис. 5). В этой области необходимо провести интерполяцию. Для этого проанализируем зависимость теоретически и перейдём к другим переменным. Напряжение, которое показывает вольтметр при подключении произвольного резистора сопротивления R_x :

$$U = \frac{U_0}{\alpha + 1} - U_0 \frac{R_x}{R + R_x}, \quad (2)$$

причём заметим, что первое слагаемое соответствует измеренному ранее напряжению U_2 .

Перепишем выражение (2) в виде:

$$\frac{U_0}{U_2 - U} = \frac{R}{R_x} + 1.$$

Построим график зависимости $U_0/(U_2 - U)$ от $1/R_x$, и по угловому коэффициенту наклона графика (рис. 6) определим искомое значение R . При $U = 0$ мост сбалансирован, откуда путём интерполяции находим искомое значение R_{x0} .

Также можно определить R исходя из того, что сопротивление $R = \alpha R_{x0}$.

3. Найти сопротивление R можно теоретически при любом R_x , рассчитав напряжение U для несбалансированного моста. Для повышения точности рассчитанные R необходимо усреднить.

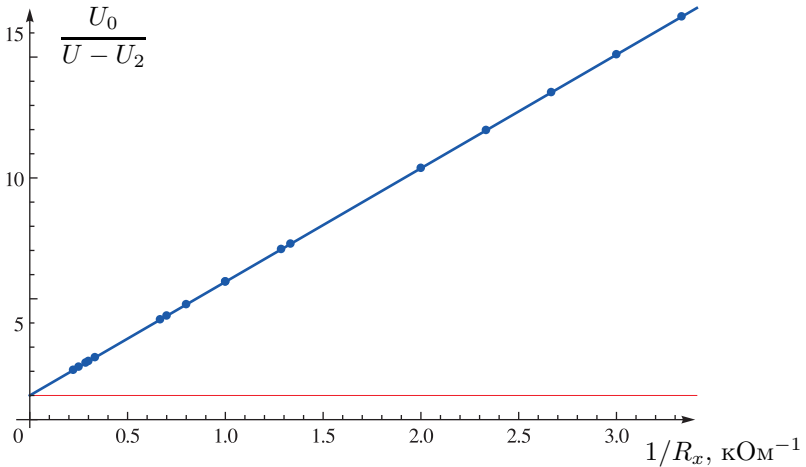


Рис. 6

10 класс

Задача 1. Конденсаторы

Задача 2. Диффузия гелия

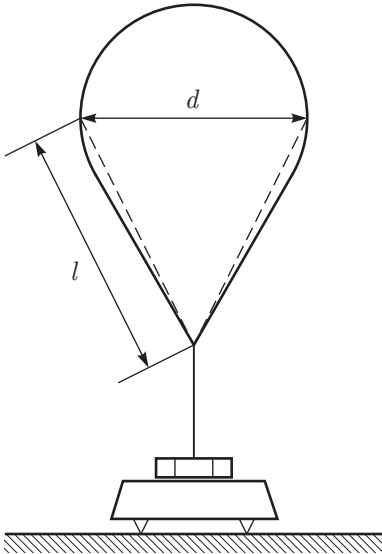


Рис. 7

1. Пусть S — площадь поверхности шарика, V — его объём, ρ_0 — плотность воздуха, ρ_{He} — плотность гелия. За время t через поверхность шарика в атмосферу выйдет

$$\Delta N = jSt = \frac{DSnt}{\delta} = \frac{DSNt}{V\delta}$$

молекул гелия (внутри шарика концентрация $n = N/V$, вне шарика концентрацию гелия считаем равной нулю: $n_0 = 0$). За небольшое время относительное уменьшение объёма $\Delta V/V = \Delta N/N = DS t/V\delta$. Соответственно, относительное уменьшение подъёмной силы $F_{\text{п}} = (\rho_0 - \rho_{\text{He}})Vg$ равно: $\Delta F_{\text{п}}/F_{\text{п}} = \Delta V/V = S D t/V\delta$. Тогда $\Delta F_{\text{п}} = DS F_{\text{п}} t/V\delta = DS(\rho_0 - \rho_{\text{He}})gt/\delta$. Последняя формула даёт закон изменения (уменьшения) подъёмной силы с течением времени: $\Delta F_{\text{п}} = \Delta F_{\text{п}}(t)$.

2. Прикрепим к шарика, заполненному гелием, груз и взвесим его на весах (рис. 7). Сила тяжести груза превышает подъёмную силу шарика. Груз давит на весы с силой равной разности силы тяжести, действующей на груз, оболочку и нить, и подъёмной силы шарика $F = m_{\text{г}}g - F_{\text{п}}$. Поскольку с течением времени подъёмная сила уменьшается, то показания весов увеличиваются по закону

$$m(t) = \frac{F}{g} = m_0 + \beta t, \quad \text{где} \quad \beta = DS(\rho_0 - \rho_{\text{He}})/\delta.$$

Коэффициент β можно определить экспериментально по наклону графика $m(t)$. Зная β , коэффициент D рассчитываем по формуле

$$D = \beta\delta/S(\rho_0 - \rho_{\text{He}}).$$

Толщина δ измеряется делением массы растягивающейся поверхности на её площадь и на плотность резины:

$$\delta = m_{\text{об}}/S\rho_{\text{рез}}.$$

3. По данным из таблицы 1 строим график зависимости показаний весов от времени (рис. 8) и по угловому коэффициенту наилучшей прямой определяем величину β :

$$\beta = 11,2 \cdot 10^{-5} \text{ г/с}.$$

m , г	6,27	6,31	6,34	6,34	6,38	6,39	6,40	6,39	6,44
t , мин	0	2	4	6	8	10	12	15	20
m , г	6,49	6,52	6,56	6,59	6,61	6,64	6,67	6,69	
t , мин	25	30	35	40	45	50	55	60	

Таблица 1: экспериментальные данные.

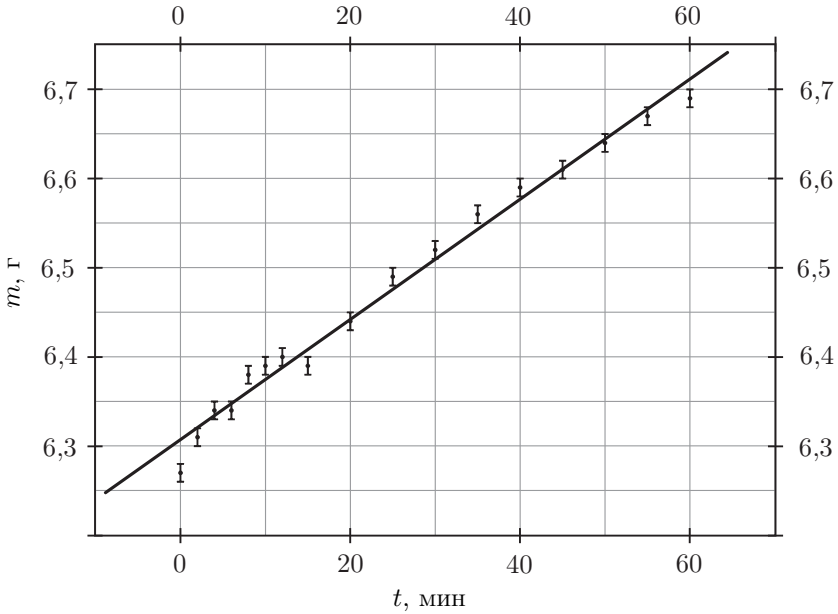


Рис. 8

4. Площадь поверхности шара оценим, приближая её полусферой и конусом: $S = (\pi d^2 + \pi ld)/2$, где d — диаметр обхвата шарика, l — длина ребра. Результаты измерений:

$$\pi d = 70,0 \text{ см}, \quad l = 22,0 \text{ см},$$

откуда $S = 0,155 \text{ м}^2$. Для оценки толщины резины δ измеряем массу растягиваемой части шарика $m = 2,30 \text{ г}$ и делим на площадь и плотность (объём резины при растяжении считаем неизменным), получаем $\delta = 0,0141 \text{ мм}$. Нужно также учесть, что хвостик шарика не растягивается в ходе эксперимента, поэтому его надо отрезать при измерении массы второго шарика. Плотность воздуха $\rho_0 = \mu_v p_0 / RT = 1,16 \text{ кг/м}^3$. Плотность гелия $\rho_{\text{He}} = 0,16 \text{ кг/м}^3$. Искомый коэффициент диффузии

$$D = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}.$$

5. Чтобы убедиться в том, что в шарик не попадает воздух, достаточно оценить объём шарика в конце эксперимента. Если воздух не проникал в шарик в ходе эксперимента, то подъёмная сила, вычисленная по формуле для силы Архимеда (в предположении, что в шарике гелий) и измеренная экспериментально, должны быть равны. Объём шарика рассчитаем, разбив его на полусферу и конус: $V = \pi d^2(d + \sqrt{l^2 - (d/2)^2})/12$.

Учитывая предыдущие значения, а также вычисляя по теореме Пифагора высоту конуса, находим: $V = 53,6 \cdot 10^2 \text{ см}^3$.

Величину подъёмной силы измерить просто — достаточно придержать шарик, чтобы измерить массу груза. Она равна 10,00 г. Масса пустого шарика — 3,00 г. Тогда подъёмная сила в конце эксперимента (через 1,5 часа) равна 6,31 г. Если учесть, что разница плотностей примерно равна 1 г/л, то в пределах погрешности шарик по-прежнему заполнен только гелием.

11 класс

Задача 1. Эксцентричная струна

Задача 2. Ток в пробирке

1. Удельное сопротивление стекла ρ можно определить, измеряя сопротивление системы вода–пробирка–вода (рис. 9). Убедимся, опустив в воду клеммы мультиметра в режиме омметра что удельное сопротивление воды достаточно мало. Растворённые в воде соли делают её идеальным проводником по сравнению со стеклом, поэтому сопротивление такой системы будет равно сопротивлению пробирки R :

$$R = \rho \frac{\delta}{S}, \quad (3)$$

где δ — толщина стекла пробирки, а S — площадь поверхности пробирки.

Как известно, стекло плохо проводит ток, поэтому разумно ожидать, что сопротивление R окажется большим. Действительно, прямые измерения мультиметром в режиме омметра даже на самом большом диапазоне не позволяют определить сопротивление пробирки (мультиметр зашкаливает). Можно заключить, что $R > 1$ МОм.

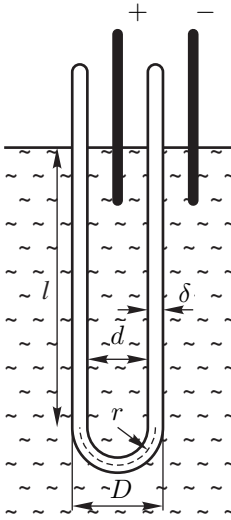


Рис. 9

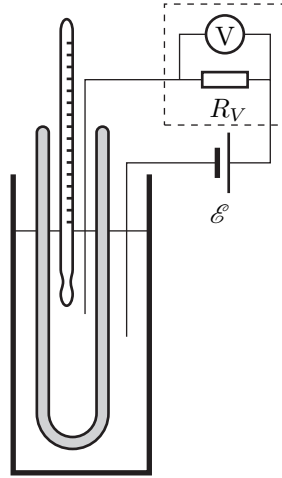


Рис. 10

Если мы подключим к электродам батарейку с $\mathcal{E} = 9$ В, то сила тока, протекающего через стекло:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} < 10 \text{ мкА},$$

что нельзя измерить мультиметром в режиме миллиамперметра.

Чтобы измерить очень малый ток воспользуемся тем фактом, что в режиме милливольтметра у мультиметра внутреннее сопротивление $R_V = 1,0$ МОм. Тогда подключив его последовательно с пробиркой (рис. 10), можно по его показаниям U найти значение тока и, следовательно, сопротивление пробирки:

$$I = \frac{U}{R_V}, \quad \text{откуда} \quad R = \frac{\mathcal{E} - U}{I} = \frac{\mathcal{E} - U}{U} R_V = \frac{\mathcal{E}}{U} R_V, \quad (4)$$

так как $U \ll \mathcal{E}$.

Соберём установку, поместим термометр внутрь пробирки, нальём горячую воду и будем снимать зависимость показаний мультиметра в режиме милливольтметра U от температуры t по мере остывания. Значение R найдём по формуле (4), предварительно определив точное значение \mathcal{E} мультиметром. Стоит обратить внимание на то, чтобы часть пробирки, не погружённая в воду, оставалась сухой. Водная плёнка на поверхности пробирки может заколотить схему, и измеряемое сопротивление будет значительно меньше.

Чтобы получить значения удельного сопротивления, зная R , необходимо измерить геометрические параметры пробирки. Толщина δ дана в условии, а внешний диаметр можно получить прокатив пробирку по миллиметровке. Если пробирка совершила n оборотов и прошла расстояние L_D , то внешний диаметр:

$$D = \frac{L_D}{\pi n}.$$

Площадь S можно оценить, представив пробирку как тонкостенный цилиндр длины l со средним радиусом $r = (D - \delta)/2$ с полусферическим дном того же радиуса. В этом случае площадь поверхности:

$$S = 2\pi r l + 2\pi r^2. \quad (5)$$

Окончательно, найдём значения ρ с использованием формул (3), (4) и (5) для разных значений температуры:

$$\rho = \frac{\mathcal{E}}{U} R_V \frac{2\pi r(l+r)}{\delta}.$$

2. Чтобы определить значение энергии активации, прологарифмируем (1):

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{W_a}{kT}.$$

Таким образом, график зависимости $\ln \rho(T^{-1})$ должен быть линейен (рис. 11), причём значение линейного коэффициента $\alpha = W_a/k$. Зная значение коэффициента α , найдём энергию активации W_a в электронвольтах:

$$W_a = \alpha \frac{k}{e}.$$

Для стекла пробирок, участвовавших в эксперименте, значение энергии активации составляло $W_a = 0,85 \pm 0,03$ эВ.

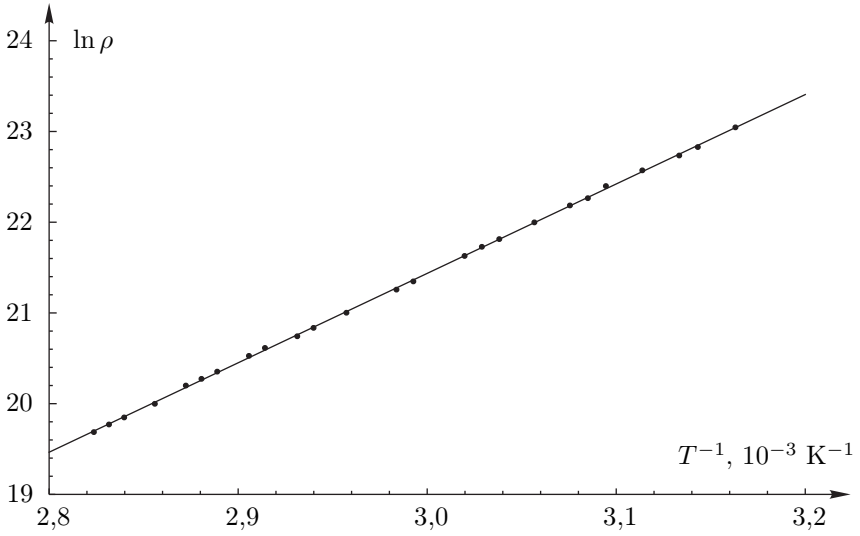


Рис. 11