

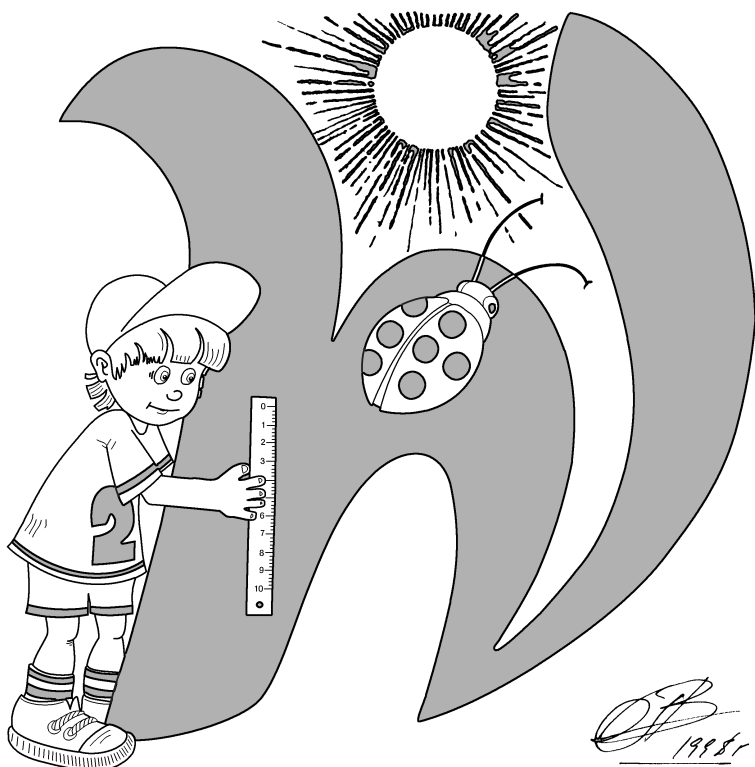
Федеральное агентство по образованию  
Центральный оргкомитет Всероссийских олимпиад  
Методическая комиссия по физике

## XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике

### Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Санкт-Петербург, 2007 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике  
Центрального оргкомитета Всероссийских олимпиад школьников  
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95, (477) 361-80-43.  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com), [vip@mail.mipt.ru](mailto:vip@mail.mipt.ru)

### Авторы задач

#### 9 класс

1. Фольклор
2. Слободянин В.
3. Соболев М.
4. Кóзел С.

#### 10 класс

1. Воробьёв И.
2. Фольклор
3. Кóзел С.
4. Плис В.
5. Кóзел С.

#### 11 класс

1. Кóзел С.
2. Воробьёв И.,  
Ершов А.
3. Дельцов В.
4. Малеев А.
5. Жак С.

Общая редакция — Кóзел С.

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Гуцин И.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.  
© Авторский коллектив  
Подписано в печать 11 марта 2008 г. в 13:18.

141700, Московская область, г. Долгопрудный  
Московский физико-технический институт

9 класс

**Задача 1. Шайба на льду**

По гладкой горизонтальной поверхности скользит пластинка, на которой отмечены 3 точки ( $A$ ,  $B$  и  $C$ ), лежащие в вершинах прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  при вершине  $B$  (рис. 1). Гипотенуза треугольника равна  $L$ . В некоторый момент времени скорость точки  $A$  равна по модулю  $v$  и направлена под углом  $30^\circ$  к катету  $BC$ . Известно также, что скорость точки  $B$  в этот момент времени направлена вдоль линии  $a_1a_2$ , параллельной катету  $AC$ .

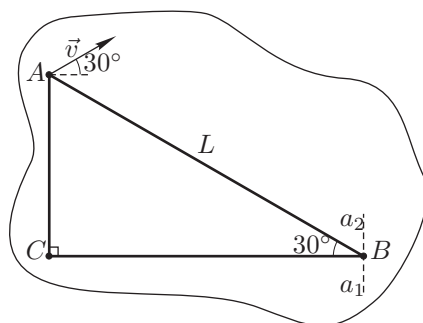


Рис. 1

Определите:

1. Модуль и направление скорости точки  $B$ .
2. Модуль и направление скорости точки  $C$ .
3. Положение точки  $O$ , скорость в которой в данный момент времени равна нулю.
4. Изобразите на чертеже векторы скоростей точек  $B$  и  $C$ , а также положение точки  $O$ .

**Задача 2. Случай на станции**

Пассажирский поезд длиной  $l$  стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Фёдор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади, как раз напротив первого вагона, появился Шарик (рис. 2). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно  $L$ . С какой минимальной скоростью  $v_0$  должен бежать пёс, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением  $\vec{a}$ ?

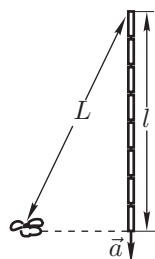


Рис. 2

**Задача 3. Отопление дачного домика**

Дачный домик отапливается с помощью электрических батарей. При температуре батарей  $t_{B1} = 40^\circ\text{C}$  и температуре наружного воздуха  $t_1 = -10^\circ\text{C}$  в домике устанавливается температура  $t = 20^\circ\text{C}$ . Во сколько раз надо увеличить силу тока в батареях, чтобы прежняя температура в комнате поддерживалась в холодные дни при температуре  $t_2 = -25^\circ\text{C}$ ? Какова при этом будет температура батарей  $t_{B2}$ ? Считать электрическое сопротивление нагревательных элементов не зависящим от температуры.

**Задача 4. «Чёрный ящик»**

В «чёрном ящике» с тремя выводами (рис. 3) находятся два резистора и нелинейный элемент (лампочка от карманного фонарика), вольт-амперная характеристика которого изображена на рис. 4 (график ВАХ Л). На том же рисунке изображены вольт-амперные характеристики «чёрного ящика», снятые между выводами 2–3 и 1–2.

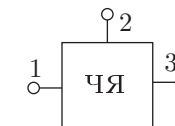


Рис. 3

1. Определите сопротивления обоих резисторов.
2. Нарисуйте схему соединения элементов «чёрного ящика» и укажите на ней значения сопротивлений резисторов.
3. Графически постройте вольт-амперную характеристику «чёрного ящика» между выводами 1–3.
4. Предполагая, что лампочка рассчитана на напряжение  $U_0 = 4,5\text{ В}$ , определите, какое напряжение нужно создать между выводами 1 и 3, чтобы она горела полным накалом.

*Примечание.* Необходимые построения следует производить непосредственно на приведённом рисунке.

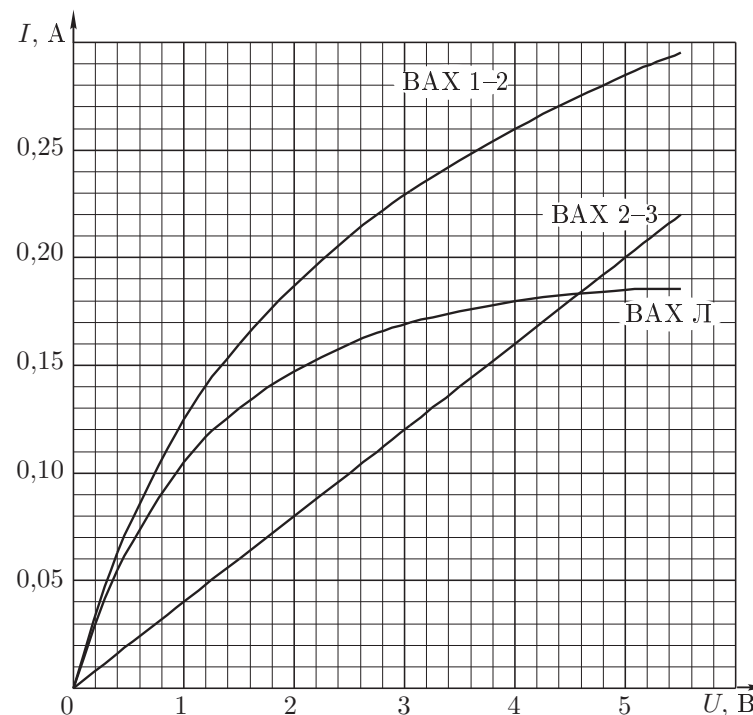


Рис. 4. ВАХ лампочки и «чёрного ящика».

10 класс

**Задача 1. Столкновение дисков**

На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых диска с гладкой боковой поверхностью. Первый покоился, а второму сообщили скорость  $v$ . Найдите скорости дисков после их упругого соударения, используя рисунок 5, где отмечены положение центра первого диска до столкновения ( $A$ ) и положения центров первого и второго дисков в один и тот же момент времени после столкновения (точки  $B$  и  $C$  соответственно). Трением пренебречь.

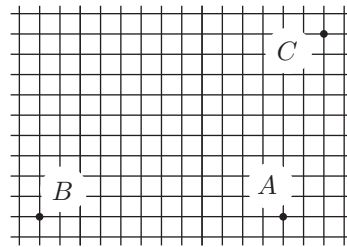


Рис. 5

**Задача 2. Кривизна траектории Луны**

В астрономии за единицу длины принято среднее расстояние  $R$  от Земли до Солнца, называемое астрономической единицей (1 а.е.). В геоцентрической системе отсчёта, связанной с Землёй, Луна вращается по круговой орбите радиуса  $r_{\text{л}} = 2,57 \cdot 10^{-3}$  а.е. В гелиоцентрической системе траектория нашего естественного спутника выглядит гораздо более сложно, поскольку Луна вращается вокруг Земли, которая в свою очередь вращается вокруг Солнца (вращение происходит в одну сторону). Вычислите радиусы кривизны  $r_{\text{н}}$  и  $r_{\text{н}}$  траектории Луны в гелиоцентрической системе отсчета во время полнолуния и новолуния. Ответ выразите в астрономических единицах. Отметьте качественно положение соответствующих центров кривизны ( $O_{\text{п}}$  и  $O_{\text{н}}$ ) на рисунке 6, на котором изображены Солнце и Земля. Отношение массы Земли к массе Солнца  $m_3/m_c = 3 \cdot 10^{-6}$ .

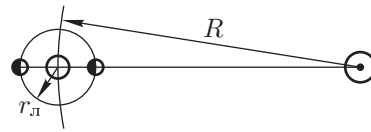


Рис. 6

**Задача 3. Скорость потока воды**

Для измерения скорости потока воды в отопительной системе используется устройство, изображенное на рисунке 7 (так называемый манометр Вентури). Скорость потока измеряется в трубе с диаметром  $d_1 = 2$  см; в месте установки манометра труба сужается до диаметра  $d_2 = 0.6$  см. В верхней части П-образной манометрической трубки содержится масло с плотностью  $\rho_M = 0.82$  г/см<sup>3</sup>. Вертикальные колена трубки врезаны в широкую и узкую части трубы с текущей водой. Рассматривая воду как идеальную несжимаемую жидкость, определите объём воды,

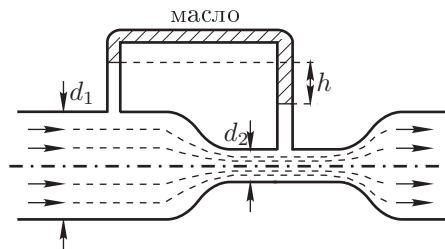


Рис. 7

протекающей через трубу в 1 с, если разность уровней воды в вертикальных коленах манометрической трубки  $h = 1,2$  см. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

*Примечание.* При течении идеальной несжимаемой жидкости по горизонтальной трубе переменного сечения  $p + \rho v^2/2 = \text{const}$  вдоль всей трубы. Здесь  $p$  — давление жидкости,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость течения.

**Задача 4. Пузырёк воздуха в воде**

В высоком закрытом вертикально расположенном цилиндрическом сосуде сечением  $S$  и высотой  $h$  находится вода, занимающая весь объём сосуда, кроме маленького пузырька воздуха объёмом  $V$ , образовавшегося у дна (рис. 8). Давление воды в верхней части сосуда равно атмосферному давлению  $p_0$ . Определите, каким будет давление воды в верхней части сосуда после того, как пузырёк поднимется вверх. Процесс считать изотермическим. Модуль всестороннего сжатия жидкости равен  $K$ . Рассмотрите предельные переходы:

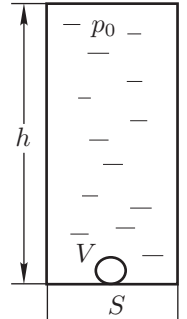


Рис. 8

1.  $V \rightarrow 0$ ,
2.  $K \rightarrow 0$  (сильно сжимаемая жидкость),
3.  $K \rightarrow \infty$  (несжимаемая жидкость).

Найдите численное решение для случая  $h = 3$  м,  $S = 10$  см<sup>2</sup>,  $V = 0,2$  см<sup>3</sup>,  $K = 2 \cdot 10^9$  Па, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Примечание.* Модуль всестороннего сжатия жидкости  $K$  определяется соотношением  $\Delta p = -K \Delta V_{\text{ж}}/V_{\text{ж}}$ , где  $\Delta p$  — изменение давления,  $|\Delta V_{\text{ж}}/V_{\text{ж}}| = \varepsilon$  — относительное изменение объёма жидкости.

**Задача 5. «Чёрный ящик»**

Школьнику Васе Незнайкину на олимпиаде по физике предложили разгадать схему «чёрного ящика» с тремя выводами (рис. 9), в котором по условию задачи находились два резистора и нелинейный элемент (автомобильная лампочка, рассчитанная на номинальное напряжение  $U_N = 12$  В и мощность  $P_N = 6$  Вт). Были приведены две вольт-амперные характеристики (рис. 10), снятые между выводами 1 и 2 (ВАХ 1–2) и выводами 2 и 3 (ВАХ 2–3).

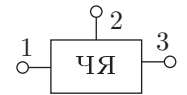


Рис. 9

Нужно было:

1. Проанализировать возможные схемы включения элементов чёрного ящика, совместимые с условием задачи.
2. Выбрать одну из возможных схем и определить для этой схемы сопротивление резисторов.
3. Построить вольт-амперную характеристику нелинейного элемента.
4. Построить вольт-амперную характеристику, снятую между выводами 1 и 3 (ВАХ 1–3).

Помогите Васе!

*Примечание.* Необходимые построения следует выполнять непосредственно на рисунке.

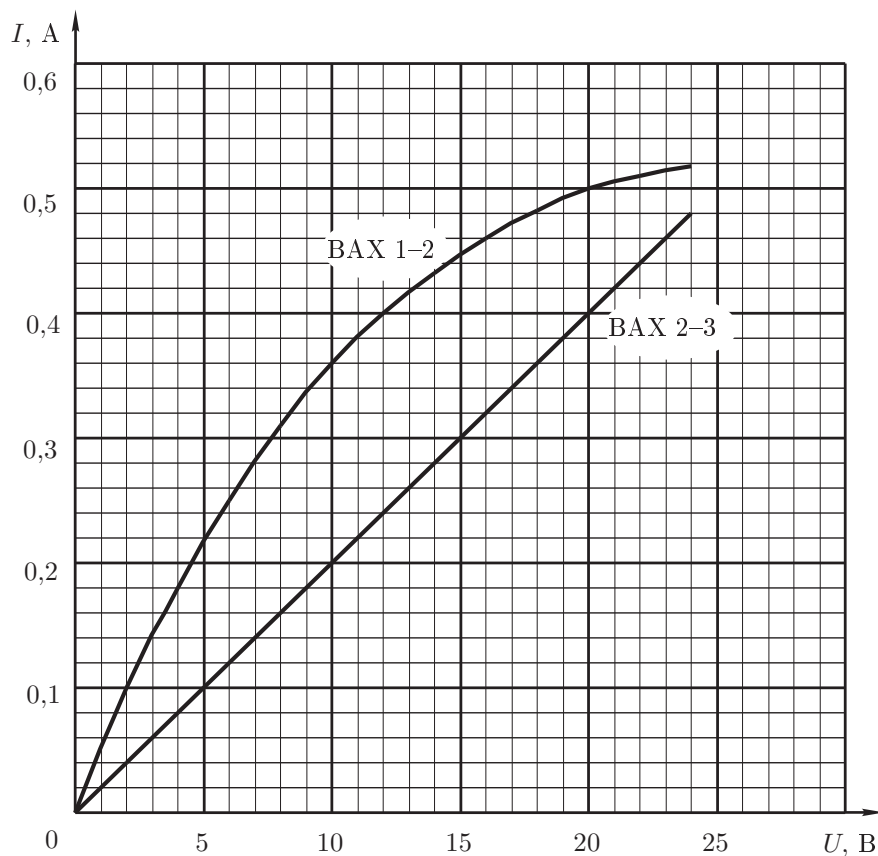


Рис. 10

**11 класс**

**Задача 1. Аннигиляция частиц**

В вакууме на расстоянии  $L = 10$  см друг от друга находятся протон  $p^+$  и антипротон  $p^-$ . Обе частицы имеют одинаковые массы  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг и одинаковые по модулю заряды  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл. В первый момент частицы неподвижны. При сближении частиц на расстояние  $l = 10^{-13}$  м происходит их аннигиляция с рождением  $\gamma$ -квантов.

1. Какие скорости будут иметь частицы при таком сближении?
  2. Через какое время произойдет аннигиляция частиц?
  3. Нужно ли при решении задачи учитывать гравитационные силы, действующие между частицами? Ответ поясните расчётом.
- Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Кл<sup>2</sup>/(Н · м<sup>2</sup>).  
 Гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>.

**Задача 2. Столкновение дисков**

На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения  $\mu$  находятся два одинаковых малых диска с гладкой боковой поверхностью. Первый диск покоился, а второй налетел на него со скоростью  $\vec{v}$  в момент удара. Считая столкновение дисков упругим, но не обязательно лобовым, найдите, на каком расстоянии окажутся диски к моменту их остановки, если первый диск остановился, пройдя расстояние  $x_1$ . Чему равно наибольшее и наименьшее возможные конечные расстояния между дисками при данных значениях модуля скорости  $v$  и коэффициента трения  $\mu$ ?

Размерами дисков пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ .

**Задача 3. Теплотрасса**

ТЭЦ снабжает жилой район горячей водой под высоким давлением, имеющей на выходе из котельной температуру  $t_0 = 120^\circ\text{C}$ . Вода течет по стальной трубе радиусом  $R = 20$  см, покрытой теплоизолирующим слоем минеральной ваты толщиной  $h = 4$  см и расположенной на открытом воздухе. Расход воды  $\mu = 100$  кг/с. Температура окружающего воздуха  $t_b = -20^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплопроводности ваты  $\chi = 0,08$  Вт/(м · К). Коэффициент теплопроводности стали на несколько порядков больше, чем у минеральной ваты. Найдите температуру воды  $t_k$  на конце теплотрассы в двух случаях:

1. Длина теплотрассы  $L_1 = 10$  км.
  2. Длина теплотрассы  $L_2 = 100$  км.
- Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · К).

*Примечание.* Количество теплоты  $\Delta q$ , проходящее через слой вещества площадью  $S$  и толщиной  $h$  за время  $\Delta t$  при разности температур  $\Delta T$  определяется соотношением  $\Delta q = \chi(S/h)\Delta T\Delta t$ , где  $\chi$  — коэффициент теплопроводности.

### Задача 4. Светодиоды

Между круглыми полюсами радиусом  $R = 5$  см большого электромагнита, создающего в зазоре однородное магнитное поле с индукцией  $B = 1$  Тл, перпендикулярно линиям магнитной индукции движется с постоянной скоростью  $v = 10$  м/с металлический стержень (рис. 11).

Концы стержня, длина которого больше  $2R$ , соединены гибкими проводами со схемой, включающей батарею с ЭДС  $\mathcal{E}_0 = 0,5$  В и два светодиода  $C_1$  и  $C_2$ , которые горят при напряжении  $U \geq 0,25$  В и определённой полярности, указанной на рисунке. Будем считать, что в начальный момент времени стержень касается окружности (т.е. начинает пересекать при своем движении линии магнитной индукции). Определите напряжение  $U(t)$  на светодиодах и найдите моменты времени их зажигания и гашения на интервале времени движения стержня в магнитном поле ( $0 \leq t \leq 2R/v$ ). Качественно постройте график зависимости  $U(t)$  и укажите на нем интервалы зажигания светодиодов  $C_1$  и  $C_2$ .

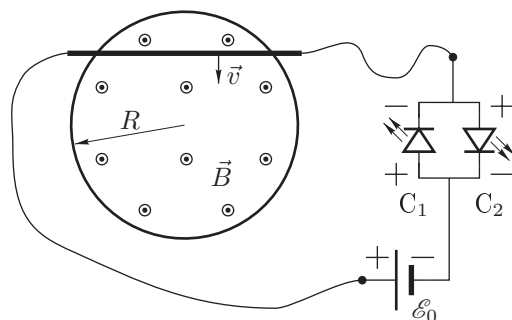


Рис. 11

Определите напряжение  $U(t)$  на светодиодах и найдите моменты времени их зажигания и гашения на интервале времени движения стержня в магнитном поле ( $0 \leq t \leq 2R/v$ ). Качественно постройте график зависимости  $U(t)$  и укажите на нем интервалы зажигания светодиодов  $C_1$  и  $C_2$ .

### Задача 5. Параметрические колебания

В схеме изображенной на рисунке 12 ёмкость конденсатора  $C$  периодически изменяется путем механического перемещения пластин. Допустим, что вследствие некоторого возмущения в схеме возникли малые колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе порядка нескольких милливольт. В момент времени, когда напряжение на конденсаторе максимально, его ёмкость скачкообразно уменьшают на долю  $\varepsilon = |\Delta C|/C$ . Через четверть периода  $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$  ёмкость скачком увеличивают до прежнего значения; ещё через четверть периода ёмкость вновь скачкообразно уменьшают на долю  $\varepsilon$  и т.д. При определённых условиях в схеме могут возбудиться незатухающие электрические колебания.

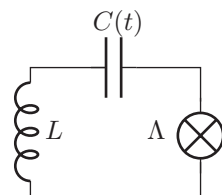


Рис. 12

В схему включен нелинейный элемент (лампочка накаливания  $\Lambda$ ), вольт-амперная характеристика которой представлена на рисунке 13.

1. Найдите минимальное значение  $\varepsilon_{\min}$ , при котором в схеме возбуждаются незатухающие колебания, если  $L = 0,1$  Гн,  $C = 10^{-7}$  Ф.

2. Найдите амплитуду установившихся колебаний напряжения на лампочке, если  $\varepsilon = 3\%$ .

Примечание. Необходимые построения следует выполнять непосредственно на рисунке.

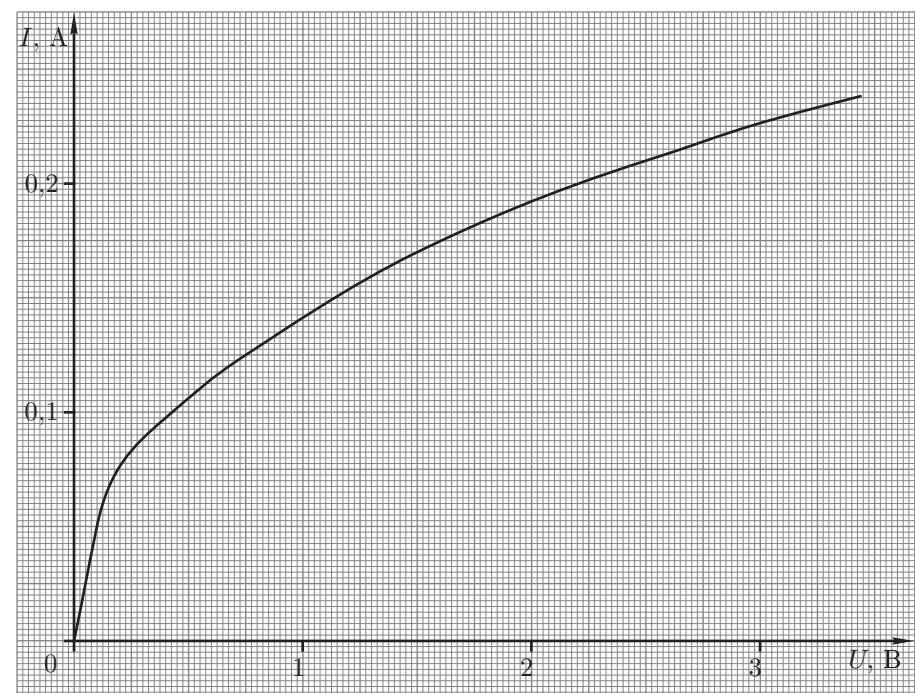


Рис. 13. Вольт-амперная характеристика лампочки.

## Возможные решения 9 класс

### Задача 1. Шайба на льду

1. Проекция скоростей  $v_A$  и  $v_B$  на гипотенузу  $AB$  треугольника должны быть одинаковыми и равными  $v_0/2$  (рис. 14). Следовательно,  $v_B = v_A = v_0$ . Вектор скорости  $\vec{v}_B$  направлен вертикально вниз.

2. Поскольку проекция скорости  $\vec{v}_B$  на катет  $CB$  равна нулю, вектор скорости  $\vec{v}_C$  также должен быть направлен перпендикулярно катету  $CB$  и иметь проекцию на катет  $AC$  такую же, как и проекция скорости точки  $A$ . Отсюда следует, что  $v_C = v_0/2$ .

3. Точка  $O$ , скорость которой в данный момент времени равна нулю, лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_C$ . Как видно из построений (рис. 14), эта точка лежит на катете  $BC$  на расстоянии  $l = L \sin 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,3L$ .

#### Критерии оценивания

- Модуль и направление скоростей точек  $B$  и  $C$  (по 2,5 балла за точку) . . . . . 5
- Определение положения точки  $O$  . . . . . 3
- Изображение на чертеже точки  $O$  и скоростей точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  . . . . . 2

### Задача 2. Случай на станции

По теореме Пифагора первоначальное расстояние между Шариком и путём, по которому движется поезд, равно  $x = \sqrt{L^2 - l^2}$ . Ясно, что пёс должен двигаться по прямой (рис. 15). Тогда расстояние, пройденное Шариком, равно

$$s = \sqrt{\left(\frac{at^2}{2} - l\right)^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{at^2}{2} - L\right)^2 + a(L-l)t^2},$$

где  $t$  — время движения Шарика. Скорость Шарика

$$v = \frac{s}{t} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}t - \frac{L}{t}\right)^2 + a(L-l)}.$$

Она минимальна, когда  $at/2 - L/t = 0$ . При этом  $v_0 = v_{\min} = \sqrt{a(L-l)}$ .

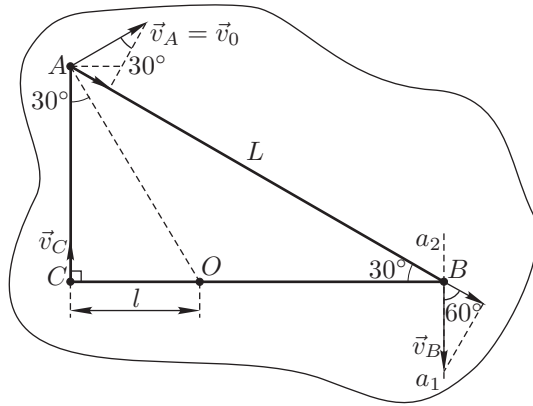


Рис. 14

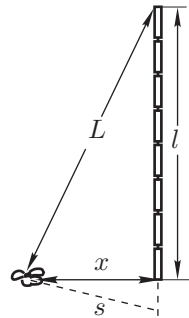


Рис. 15

#### Критерии оценивания

- Формула для пути, пройденного Шариком . . . . . 3
- Определение условия минимальности скорости . . . . . 4
- Выражение минимальной скорости . . . . . 3

### Задача 3. Отопление дачного домика

Количество теплоты  $Q_1$ , уходящее за 1 с через стенки домика, равно количеству теплоты, поступающему в домик от батарей отопления, то есть равно мощности батарей  $W_1$ :

$$Q_1 = k_1(t_{B1} - t) = k_2(t - t_1) = W_1,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты пропорциональности. Отсюда

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{t - t_1}{t_{B1} - t}.$$

Во втором случае

$$Q_2 = k_1(t_{B2} - t) = k_2(t - t_2) = W_2,$$

$$t_{B2} = t + \frac{k_2}{k_1}(t - t_2) = t + \frac{(t_{B1} - t)(t - t_2)}{t - t_1} = 50^\circ\text{C}.$$

Во втором случае количество теплоты, отдаваемое батареями в домике возросло в  $n$  раз:

$$n = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{t_{B2} - t}{t_{B1} - t} = 1,5.$$

Мощность нагревательных элементов пропорциональна квадрату силы тока (при неизменном сопротивлении), следовательно,

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{W_2}{W_1}} \approx 1,22.$$

#### Критерии оценивания

- Нахождение  $t_{B2}$  . . . . . 5
- Нахождение отношения сил токов . . . . . 5

### Задача 4. «Чёрный ящик»

1. Вольт-амперная характеристика ВАХ 2–3 изображается прямой линией. Это значит, что между выводами 2–3 в «чёрном ящике» включен резистор с постоянным сопротивлением. Обозначим это сопротивление  $R_1$ . По наклону графика находим:  $R_1 = 25$  Ом.

2. Обратим внимание на то, что график ВАХ 1–2 расположен выше ВАХ Л. Это означает, что между выводами 1–2 нелинейный элемент (лампочка) включен параллельно второму резистору  $R_2$ . Вольт-амперную характеристику резистора  $R_2$  можно найти, приняв во внимание, что вертикальный отрезок между графиками ВАХ 1–2 и ВАХ Л выражает ток, текущий при каждом значении напряжения  $U$  через резистор  $R_2$ . Вычитая по точкам один график из другого, строим вольт-амперную характеристику резистора  $R_2$  (ВАХ  $R_2$ ). По наклону характеристики определяем:  $R_2 = 50$  Ом.

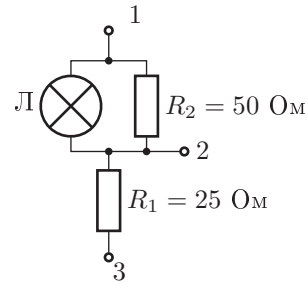


Рис. 16

3. Таким образом, схема соединений элементов в «чёрном ящике» имеет вид, показанный на рисунке 16.

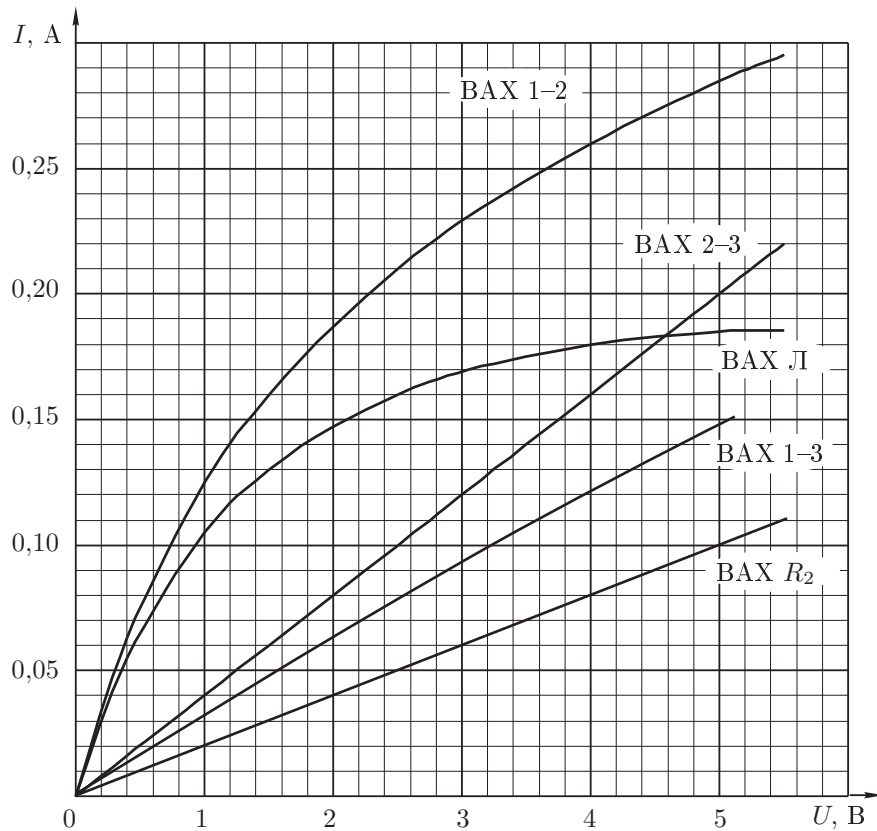


Рис. 17

4. Пусть между выводами 1–3 «чёрного ящика» создано постоянное напряжение  $U_{13}$ . Тогда по закону Ома будем иметь:  $U_{13} = U_{12} + I_{13}R_1 = U_{12} + U_{23}$ , где  $I_{13}$  — сила тока, протекающего по резистору  $R_1$  (то есть между выводами 1–3). С помощью приведённой формулы можно графически (по точкам) построить вольт-амперную характеристику между выводами 1–3 (ВАХ 1–3) (рис. 17). Для этого нужно при каждом значении силы тока  $I = I_{13}$  просуммировать напряжения, соответствующие вольт-амперным характеристикам ВАХ 1–2 и ВАХ 2–3. Обратим внимание, что ВАХ 1–3 мало отличается от ВАХ линейного резистора с сопротивлением приблизительно 33 Ом.

5. Лампочка горит полным накалом при напряжении  $U_0 = 4,5$  В и токе  $I_0 = 0,183$  А  $\approx 0,18$  А (номинальный режим). При таком напряжении на лампочке через резистор  $R_2$  будет протекать ток  $I_2 = U_0/R_2 \approx 0,09$  А. Следовательно, сила тока между выводами 1–3 будет равна  $I_1 = I_0 + I_2 = 0,27$  А. Такой ток создаёт на резисторе  $R_1$  напряжение  $U_{23} = I_1R_1 = 6,75$  В. Таким образом, чтобы создать на лампочке напряжение  $U_0 = 4,5$  В, к выводам 1–3 нужно приложить напряжение  $U = U_0 + U_{23} = 11,25$  В.

*Критерии оценивания*

Нахождение $R_1$ .....	1
Нахождение $R_2$ .....	2
Схема «чёрного ящика» .....	2
Построение ВАХ 1–3 .....	4
Определение напряжения 1–3 для создания полного накала .....	1

10 класс

**Задача 1. Столкновение дисков**

Закон сохранения импульса в случае равных масс дисков даёт  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ , где  $v_1$  и  $v_2$  — векторы скорости дисков после удара, а  $v$  — вектор скорости налетевшего диска до удара. Поэтому векторы скорости составляют треугольник, указанный на рисунке 18.

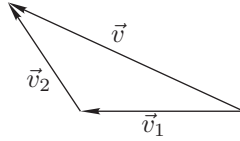


Рис. 18

Сохранение энергии при упругом столкновении даёт  $v_1^2 + v_2^2 = v^2$ , то есть сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей. Отсюда следует, что угол между конечными скоростями прямой.

Скорость  $\vec{v}_1$  первого диска после удара направлена по прямой  $AB$ . С другой стороны, она приобретает под действием силы, направленной по нормали к поверхности дисков в точке соприкосновения, то есть лежит на прямой, соединяющей центры дисков в момент удара.

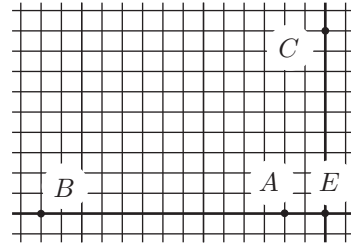


Рис. 19

Поскольку угол между конечными скоростями прямой, то скорость второго диска  $\vec{v}_2$  лежит на прямой, перпендикулярной  $AB$  и проходящей через точку  $C$ . Тогда пересечение этих прямых — точка  $E$  — даёт положение центра налетавшего диска в момент удара (рис. 19).

Длина отрезка  $AB$  равна  $L_1 = v_1 T$ , а длина отрезка  $EC$  равна  $L_2 = v_2 T$ , где  $T$  — время, прошедшее с момента удара. Поскольку  $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ , то

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \frac{L_1^2}{L_1^2 + L_2^2} = \frac{12^2}{12^2 + 9^2} = \frac{16}{25}, \quad \text{и} \quad \frac{v_2^2}{v^2} = \frac{L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} = \frac{9^2}{12^2 + 9^2} = \frac{9}{25}.$$

Значит,  $v_1 = 0,8v$  и  $v_2 = 0,6v$ .

*Критерии оценивания*

Закон сохранения импульса .....	1
Закон сохранения энергии .....	1
Обоснование того, что угол между скоростями прямой .....	2
Определение положения точки $E$ .....	2
Ответ для $v_1$ .....	2
Ответ для $v_2$ .....	2

**Задача 2. Кривизна траектории Луны**

Пусть  $v_3$  — скорость Земли в гелиоцентрической системе отсчёта,  $v_{\text{л}}$  — скорость Луны в геоцентрической системе отсчёта. Тогда справедливы следующие выражения для центростремительных ускорений Земли  $a_3$  в гелиоцен-

трической системе отсчёта и Луны  $a_{\text{л}}$  в геоцентрической системе отсчёта:

$$a_3 = \frac{v_3^2}{R} = G \frac{m_{\text{с}}}{R^2}, \quad a_{\text{л}} = \frac{v_{\text{л}}^2}{r_{\text{л}}} = G \frac{m_3}{r_{\text{л}}^2}, \quad (1)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная. Отсюда получаем

$$v_{\text{л}} = v_3 \sqrt{\frac{m_3 R}{m_{\text{с}} r_{\text{л}}}}. \quad (2)$$

В гелиоцентрической системе имеем

$$\frac{(v_3 + v_{\text{л}})^2}{r_{\text{н}}} = G \left( \frac{m_{\text{с}}}{(R + r_{\text{л}})^2} + \frac{m_3}{r_{\text{л}}^2} \right), \quad \frac{(v_3 - v_{\text{л}})^2}{r_{\text{н}}} = G \left( \frac{m_{\text{с}}}{(R - r_{\text{л}})^2} - \frac{m_3}{r_{\text{л}}^2} \right).$$

С учётом (1) и (2) получаем:

$$r_{\text{н}} = R \frac{\frac{r_{\text{л}}}{R} \left( \sqrt{\frac{r_{\text{л}}}{R}} + \sqrt{\frac{m_3}{m_{\text{с}}}} \right)^2}{\left( \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^2 + \frac{m_3}{m_{\text{с}}} \left( 1 + \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^2} \approx 0,73 \text{ а.е.},$$

$$r_{\text{н}} = R \frac{\frac{r_{\text{л}}}{R} \left( \sqrt{\frac{r_{\text{л}}}{R}} - \sqrt{\frac{m_3}{m_{\text{с}}}} \right)^2}{\left( \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^2 - \frac{m_3}{m_{\text{с}}} \left( 1 - \frac{r_{\text{л}}}{R} \right)^2} \approx 1,70 \text{ а.е.}$$

Схематическое положение соответствующих центров кривизны показано на рисунке 20. Следует заметить, что траектория Луны в гелиоцентрической системе всюду выпукла.

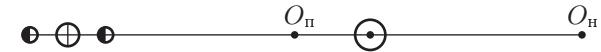


Рис. 20

*Критерии оценивания*

Выражение для $a_3$ .....	1
Выражение для $a_{\text{л}}$ .....	1
Связь между $r_{\text{п}}$ , $v_3$ и $v_{\text{л}}$ .....	1
Связь между $r_{\text{н}}$ , $v_3$ и $v_{\text{л}}$ .....	1
Окончательная формула для $r_{\text{п}}$ .....	1
Окончательная формула для $r_{\text{н}}$ .....	1
Численное значение $r_{\text{п}}$ .....	1
Численное значение $r_{\text{н}}$ .....	1
Положение $O_{\text{п}}$ и $O_{\text{н}}$ на рисунке .....	2



**Задача 3. Скорость потока воды**

Скорости потока в широкой и узкой частях трубы обозначим  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Запишем уравнение Бернулли и условие несжимаемости жидкости:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления, а  $S_1$  и  $S_2$  — площади сечения широкой и узкой частей трубы. Отсюда следует

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 S_1^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right), \quad \text{и} \quad V = v_1 S_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_2^{-2} - S_1^{-2})}},$$

где  $V$  — объём воды, протекающей по трубе за 1 с. Найдём разность  $p_1 - p_2$ :

$$p_1 = p_3 + \rho g y_1, \quad p_2 = p_3 + \rho g y_2 + \rho_M g h,$$

где  $p_3$  — давление в масле на уровне  $y_1$  (рис. 21). Выражая площади  $S_1$  и  $S_2$  через диаметры  $d_1$  и  $d_2$ , получим окончательно:

$$V = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{gh}{2} \cdot \frac{1 - \rho_M/\rho}{d_2^{-4} - d_1^{-4}}} = 5,9 \text{ см}^3/\text{с}.$$

*Критерии оценивания*

Уравнение Бернулли .....	1
Уравнение непрерывности .....	1
Выражение для расхода воды через разность давлений .....	2
Определение $p_1 - p_2$ .....	2
Формула для расхода воды .....	3
Численный ответ .....	1

**Задача 4. Пузырёк воздуха в воде**

Давление воздуха в пузырьке у дна сосуда  $p_1 = p_0 + \rho g h$ . Пусть после подъёма пузырька вверх давление воздуха стало равным  $p_2 = p_0 + \Delta p$ , а объём  $V_2 = V + \Delta V$ . Поскольку  $\Delta V_{ж} = -\Delta V$ , то  $\Delta p = -K \Delta V_{ж}/V_{ж} = K \Delta V/V_{ж}$ . Так как процесс изотермический,  $(p_0 + \rho g h)V = (V + \Delta V)(p_0 + K \Delta V/V_{ж})$ . Обозначая отношение  $\Delta V/V$  через  $\varepsilon$ , получим:

$$\rho g h = p_0 \varepsilon + K \varepsilon \frac{V}{V_{ж}} + K \frac{V}{V_{ж}} \varepsilon^2.$$

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$\varepsilon = \frac{-p_0 - K \frac{V}{V_{ж}} \pm \sqrt{(p_0 + K \frac{V}{V_{ж}})^2 + \frac{4KV\rho gh}{V_{ж}}}}{2K \frac{V}{V_{ж}}}.$$

Давление в верхней части сосуда

$$p_2 = p_0 + K \frac{V}{V_{ж}} \varepsilon = \frac{p_0 - K \frac{V}{V_{ж}} + \sqrt{(p_0 + K \frac{V}{V_{ж}})^2 + \frac{4KV\rho gh}{V_{ж}}}}{2}.$$

(Мы учли, что объём пузырька не может стать меньше нуля, и поэтому одно из решений не подходит.)

Числовой расчёт даёт для  $p_2$  значение  $p_2 = 1,17 \cdot 10^5$  Па.

Таким образом, при подъёме пузырька давление во всём сосуде возрастёт на величину  $p_2 - p_0 = 0,17 \cdot 10^5$  Па. При этом давление в пузырьке изменится на  $\Delta p = p_2 - p_1 = -0,13 \cdot 10^5$  Па. Следовательно,  $|\Delta p|/p_1 = 0,1$ . В предельных случаях расчёт даёт следующие результаты:

1. Из  $V \rightarrow 0$  следует  $p_2 \rightarrow p_0$ .
2. Из  $K \rightarrow 0$  следует  $p_2 \rightarrow p_0$ .
3. Из  $K \rightarrow \infty$  следует  $p_2 \rightarrow p_1 = p_0 + \rho g h$ .

*Примечание.* Так как относительное изменение давления в пузырьке при его подъёме достаточно мало, можно было воспользоваться приближённой формулой, связывающей изменения давления и объёма воздуха в пузырьке при его подъёме:  $p \Delta V + V \Delta p = 0$ . Из этой формулы следует  $\Delta p = -p_1 \Delta V/V$ . Формула для  $p_2$  приобретает следующий приближённый вид:

$$p_2 = p_1 \frac{VK + V_{ж} p_0}{VK + V_{ж} p_0 + V_{ж} \rho g h} \approx 1,15 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Предельные переходы дают те же результаты, что и при точном решении.

Приближённое решение будет рассматриваться как полное решение задачи при условии обоснованности его применимости ( $\frac{|\Delta p|}{p_1} \ll 1$ ).

*Критерии оценивания*

Уравнение Бойля–Мариотта с учетом сжимаемости воды .....	2
Выражение для давления в пузырьке при его подъёме .....	3
Предельный переход $V \rightarrow 0$ .....	1
Предельный переход $K \rightarrow 0$ .....	1
Предельный переход $K \rightarrow \infty$ .....	1
Численный ответ для изменения давления воды при подъёме пузырька .....	1
Оценка отношения $\frac{ \Delta p }{p_1}$ для воздуха при подъёме пузырька .....	1

**Задача 5. «Чёрный ящик»**

1. Вольт-амперная характеристика, снятая между выводами 2 и 3, является прямой линией. Следовательно, между выводами 2 и 3 включен резистор с постоянным сопротивлением. Обозначим это сопротивление через  $R_1$ . Из наклона графика находим  $R_1 = 50$  Ом.

Между выводами 1 и 2 (или 1 и 3) включены (параллельно или последовательно) неизвестное сопротивление  $R_2$  и лампочка. Обратим внимание на то, что при номинальном напряжении  $U_N = 12$  В между выводами 1 и 2 сила протекающего тока  $I$  меньше номинального значения тока  $I_N = P_N/U_N = 0,5$  А. Кроме того, вольт-амперная характеристика ВАХ 1–2 располагается на графике выше ВАХ 2–3. Из этих соображений следует, что обе схемы с параллельным включением лампы и второго резистора невозможны.

Остаются схемы «чёрного ящика», изображённые на рисунках 22, 23 и 24. Схема б) также не соответствует условию задачи, так как номинальное значение силы тока  $I_N = 0,5$  А в цепи по условию достигается при  $U_{12} = 20$  В. В схеме б) при  $U_{12} = 20$  В сила тока  $I_{12} < 20/50 = 0,4$  А, так как последовательно с лампой Л в цепи 1–2 включено сопротивление  $R_1 = 50$  Ом. Схема в) эквивалентна схеме а) при условии:  $R_2^b = R_2^a$ ,  $R_1^b + R_2^b = R_1^a$ . Далее решение будет проведено для схемы а).

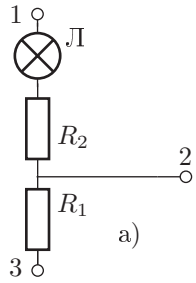


Рис. 22

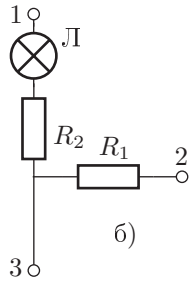


Рис. 23

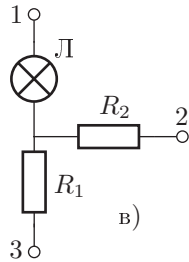


Рис. 24

2. Как видно из ВАХ 1–2, номинальный ток  $I_N = 0,5$  А будет протекать через лампу при  $U_{12} = 20$  В. При таком токе падение напряжения на резисторе  $R_2$  равно  $U_{R_2} = 8$  В. Отсюда следует  $R_2 = 16$  Ом.

3. Построим на графике ВАХ  $R_2$ . При каждом значении тока  $I$ , текущего через последовательно соединённые  $R_2$  и Л, падение напряжения на Л равно  $U_L = U_{12} - IR_2$ . Это соотношение позволяет графически построить ВАХ нелинейного элемента путём вычитания при заданном токе  $I$  напряжений, соответствующих ВАХ 1–2 и ВАХ  $R_2$  (рис. 25).

4. Аналогичным образом строится ВАХ 1–3. При каждом значении тока  $I$ , текущего между выводами 1 и 3,  $U_{13} = U_{12} + IR_1$ . Таким образом, задача сводится к суммированию напряжений, соответствующих ВАХ 1–2 и ВАХ 2–3, при каждом значении тока  $I$ . Обратим внимание на то, что нелинейность ВАХ 1–3 выражена достаточно слабо.

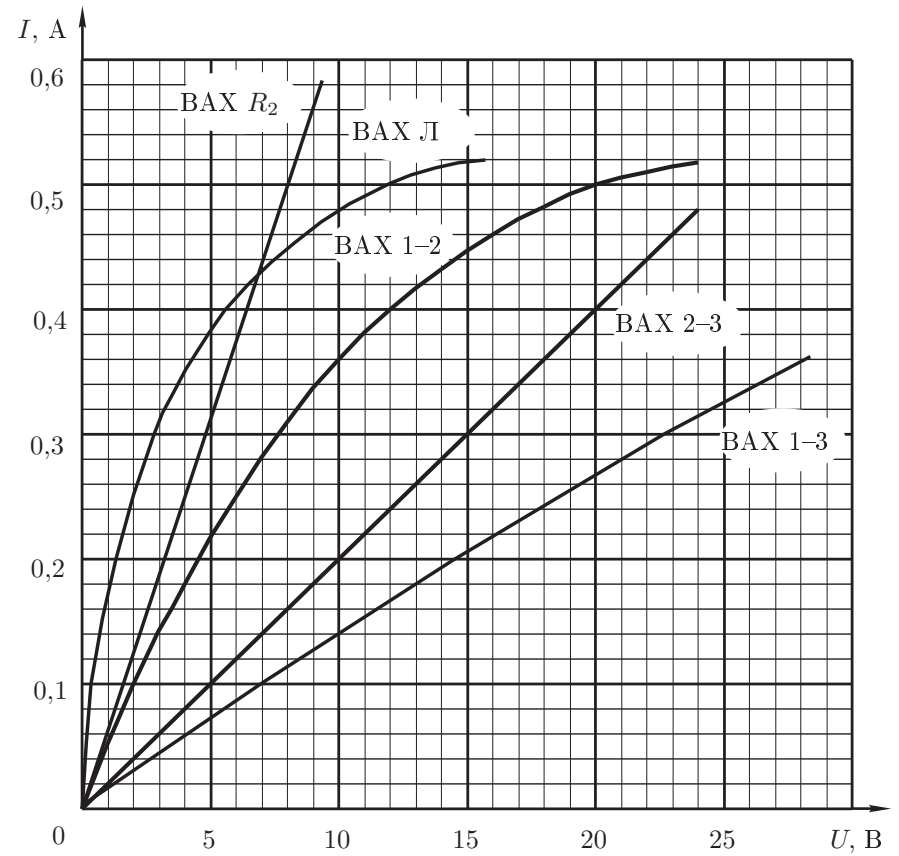


Рис. 25

Критерии оценивания

Анализ возможных схем.....	2
Выбор схемы и определение сопротивления резисторов.....	3
Построение ВАХ нелинейного элемента.....	3
Построение ВАХ 1–3.....	2

11 класс

**Задача 1. Аннигиляция частиц**

1. Задачу удобно решать, совместив начало координат с центром масс системы (точка  $O$ , рис. 26). Сила притяжения протона и антипротона, находящихся на одинаковых расстояниях от точки  $O$ , равна



Рис. 26

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2}.$$

Таким образом, сила, действующая на каждую частицу, пропорциональна  $1/r^2$ , где  $r$  — расстояние от неподвижной точки  $O$ . Следовательно, потенциальная энергия  $E_p$  каждой частицы выражается формулой

$$E_p = \frac{-e^2}{16\pi\epsilon_0 r}.$$

Знак  $(-)$  означает, что частицы притягиваются к точке  $O$ . Запишем теперь закон сохранения энергии для каждой частицы:

$$-\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0(L/2)} = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0(x/2)} + \frac{mv^2}{2}.$$

Принимая во внимание, что  $L \gg x$ , получим

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 xm}} = 1,17 \cdot 10^6 \text{ м/с} \ll c,$$

где  $c$  — скорость света.

2. Траектории частиц можно рассматривать как вырожденные эллипсы с большой полуосью  $L/4$ . Время  $t$ , через которое произойдет столкновение протона и антипротона и их аннигиляция, равно половине периода обращения по такому эллипсу. По третьему закону Кеплера период обращения частицы по эллипсу равен периоду обращения по круговой орбите радиуса  $L/4$ .

Условие вращения по окружности радиуса  $L/4$  вокруг точки  $O$  запишется в виде

$$\frac{mv_0^2}{L/4} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2 \cdot L/4)^2},$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi L/4}{v_0}\right)^2 = \frac{\epsilon_0 m (\pi L)^3}{e^2},$$

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 m (\pi L)^3}{e^2}} \approx 67 \text{ мс}.$$

3. Отношение  $F_{\text{гр}}/F_{\text{эл}}$  гравитационной и электрической силы, действующих между частицами, равно

$$\frac{F_{\text{гр}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{4\pi\epsilon_0 G m^2}{e^2} \approx 10^{-36} \ll 1.$$

Таким образом, гравитационные силы принимать в расчёт не следует.

*Критерии оценивания*

Выражения для силы и для энергии ..... 1  
 Закон сохранения энергии ..... 1  
 Окончательное выражение для скорости ..... 1  
 Численный ответ и проверка на отсутствие релятивистских эффектов ..... 1  
 Идея движения по вырожденной эллиптической траектории ..... 2  
 Условие вращения по окружности ..... 1  
 Выражение для времени ..... 1  
 Численный ответ ..... 1  
 Оценка вклада гравитационной силы ..... 1

**Задача 2. Столкновение дисков**

1. Сохранение импульса в случае равных масс дисков даёт  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ , где  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  — векторы скорости дисков после удара, а  $\vec{v}$  — вектор скорости налетевшего диска до удара. Таким образом, векторы составляют треугольник, указанный на рис. 27.

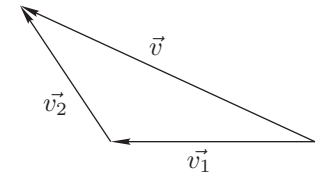


Рис. 27

Сохранение энергии при упругом столкновении даёт  $v_1^2 + v_2^2 = v^2$  (сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей). Отсюда следует, что угол между конечными скоростями прямой. Прямым будет и угол между отрезками  $x_1$  и  $x_2$ , пройденными дисками после столкновения.

Первый диск проходит до остановки расстояние  $x_1$ , откуда  $v_1^2 = 2\mu g x_1$ . Для второго диска имеем  $v_2^2 = 2\mu g x_2$ . Из закона сохранения энергии можно получить  $x_1 + x_2 = L = \frac{v^2}{2\mu g}$ . По теореме Пифагора квадрат расстояния между дисками после их остановки

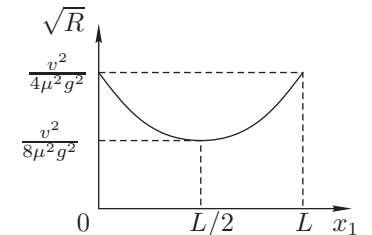


Рис. 28

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 = 2x_1^2 - 2Lx_1 + L^2 = 2x_1^2 - \frac{x_1 v^2}{\mu g} + \frac{v^4}{4\mu^2 g^2}.$$

2. Для ответа на второй вопрос рассмотрим это выражение как функцию  $x_1$  (рис. 28). Понятно, что  $L \geq x_1 \geq 0$ . На концах интервала  $R^2$  принимает наибольшее значение, тогда  $R = L = v^2/(2\mu g)$ . Наименьшее значение достигается

при  $x_1 = L/2$ , тогда

$$R^2 = \frac{L^2}{2}, \quad R = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{v^2}{2\sqrt{2}\mu g}.$$

Случай  $x_1 = 0$  соответствует скользящему столкновению, случай  $x_1 = L$  — лобовому.

*Критерии оценивания*

Векторная запись закона сохранения импульса ..... 2  
 Обоснование того, что угол между скоростями прямой ..... 2  
 Формулы для расстояний, пройденных дисками ..... 2  
 Формула квадрата расстояния между дисками после их остановки ..... 1  
 Исследование экстремальных значений расстояния ..... 3

**Задача 3. Теплотрасса**

Рассмотрим малый участок трубы  $\Delta x$  (рис. 29). В выделенный участок трубы вода втекает при температуре  $t$ , а вытекает при температуре  $t + \Delta t$  ( $\Delta t < 0$ ). Таким образом, за время  $\Delta \tau$  протекающая вода отдаёт на участке  $\Delta x$  количество теплоты  $\Delta Q = -c\mu\Delta t\Delta \tau$ , где  $c$  — удельная теплоемкость воды. Такое же количество теплоты в стационарном режиме передается через теплоизолирующий слой окружающему воздуху.

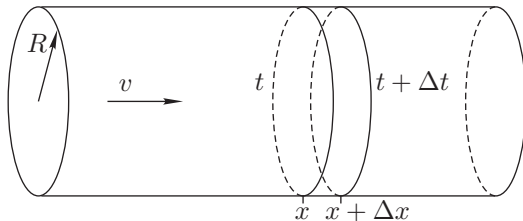


Рис. 29

$$\Delta Q = \chi \frac{2\pi R \Delta x}{h} (t - t_b) \Delta \tau.$$

Приравнявая эти выражения и в пределе, заменяя  $\Delta t$  и  $\Delta x$  на  $dt$  и  $dx$ , можно записать

$$\frac{dt}{t - t_b} = -A dx, \tag{3}$$

где  $A = \chi \frac{2\pi R}{c\mu h}$  — постоянный множитель. При вычислении численного значения  $A$  следует учесть поправку на толщину теплоизолирующего слоя и вместо значения  $R = 20$  см подставлять  $(R + h/2) = 22$  см. Тогда

$$A = \frac{0,08 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,22}{4200 \cdot 100 \cdot 0,04} = 6,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1}.$$

Интегрируя левую часть уравнения (3) в пределах от  $t_0$  до  $t_k$ , а правую, соответственно, от 0 до  $L$ , получим

$$\ln \frac{t_k - t_b}{t_0 - t_b} = -AL,$$

$$t_k = t_b + (t_0 - t_b)e^{-AL}.$$

1. Для теплотрассы длиной  $L_1 = 10$  км  $t_{k1} = -20 + (120 + 20)e^{-0,0654} \approx 111^\circ\text{C}$

2. Для теплотрассы длиной  $L_2 = 100$  км  $t_{k2} = -20 + (120 + 20)e^{-0,654} \approx 53^\circ\text{C}$

*Примечание.* При длине теплотрассы  $L_1 = 10$  км температура понизилась незначительно, поэтому в этом случае задачу можно решить приближенно без интегрирования уравнения, предполагая, что теплообмен с окружающим воздухом во всей трубе идет при разности температур  $(t_0 - t_b)$ , как на начальном участке теплотрассы. Это приводит к уравнению

$$-c\mu(t_{k1} - t_0) = \chi \frac{2\pi RL_1}{h} (t_0 - t_b).$$

Выражая  $t_{k1}$ , получим

$$t_{k1} = t_0 - AL_1(t_0 - t_b) \approx 111^\circ\text{C}.$$

Подсчет температуры  $t_{k2}$  подобным методом приводит к ошибочному результату:  $t_{k2} \approx 28^\circ\text{C}$ . Однако, можно предположить, что теплообмен вдоль всей теплотрассы происходит при некоторой средней температуре воды  $(t_0 + t_k)/2$ . В этом случае

$$t_{k2} = \frac{t_0 - AL_2(t_0/2 - t_b)}{1 + AL_2/2} \approx 50^\circ\text{C},$$

что является уже вполне приличным приближением.

*Критерии оценивания*

Выражение для теплоотдачи ..... 2  
 Идея разделения переменных ..... 2  
 Учет толщины теплоизолирующего слоя ..... 1  
 Интегрирование уравнения ..... 2  
 Выражение конечной температуры в явном виде ..... 1  
 Численный ответ для случая 1 ..... 1  
 Численный ответ для случая 2 ..... 1

**Задача 4. Светодиоды**

При движении стержня в магнитном поле в нем возникает ЭДС индукции  $|\mathcal{E}^{\text{инд}}| = \Delta\Phi/\Delta t$ , модуль которой зависит от времени. Знак  $\mathcal{E}^{\text{инд}}$  может быть определён либо из выражения для силы Лоренца, либо из закона электромагнитной индукции Фарадея. В итоге приходим к эквивалентной схеме замкнутой электрической цепи (рис. 30). Обратим внимание на то, что  $\mathcal{E}^{\text{инд}}$  и  $\mathcal{E}_0$  включены в цепь навстречу друг другу.

Найдем теперь зависимость  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  от времени. По условию в начальный момент стержень касался границы области магнитного поля. К моменту времени  $t$  он пролетит расстояние  $|CD| = vt$  (рис. 31). Из геометрических соображений найдем длину хорды  $|AB|$ .

$$|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{R^2 - (R - vt)^2} = 2\sqrt{vt(2R - vt)}.$$

Изменение магнитного потока за малое время  $\Delta t$  равно  $\Delta\Phi = B \cdot |AB| \cdot v\Delta t$ . Отсюда находим

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}| = 2Bv\sqrt{vt(2R - vt)}.$$

Максимальное значение  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  достигается при  $t = R/v$

$$|\mathcal{E}_{\text{инд}}|_{\text{max}} = 2BvR = 1 \text{ В}.$$

Напряжение на светодиодах равно  $U = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_{\text{инд}}$ . Качественно зависимость  $U(t)$  может быть представлена графически (рис. 32). Из приведенного графика следует, что светодиод  $C_2$  будет светиться при  $U \geq 0,25 \text{ В}$ , то есть на интервалах времени  $[0, t_1]$  и  $[t_4, t_0]$ , где  $t_0 = 2R/v$ . Светодиод  $C_1$  будет светиться при  $U < -0,25 \text{ В}$ , то есть на интервале времени  $[t_2, t_3]$ .

Найдём моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Моменты времени  $t_3$  и  $t_4$  находятся из симметрии графика:  $t_3 = t_0 - t_2$ ,  $t_4 = t_0 - t_1$ .

Для  $t_1$  и  $t_4$

$$\mathcal{E}_0 - 2Bv\sqrt{vt_{1,4}(2R - vt_{1,4})} = 0,25 \text{ В} = \frac{1}{4}|\mathcal{E}_{\text{инд}}|_{\text{max}} = \frac{1}{2}BvR.$$

Принимая во внимание  $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}|\mathcal{E}_{\text{инд}}|_{\text{max}} = BvR$ , приходим к квадратному уравнению

$$t_{1,4}^2 - \frac{2R}{v}t_{1,4} + \frac{1}{16}\frac{R^2}{v^2} = 0,$$

откуда  $t_{1,4} = \frac{R}{v} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{15}{16}} \right) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (1 \pm 0,97) \text{ с}$ . Таким образом,  $t_1 = 150 \text{ мкс}$ ,  $t_4 = 9,85 \text{ мс}$ .

Аналогично для  $t_2$  и  $t_3$

$$t_{2,3}^2 + \frac{2R}{v}t_{2,3} + \frac{9}{16}\frac{R^2}{v^2} = 0,$$

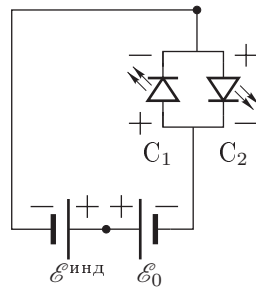


Рис. 30

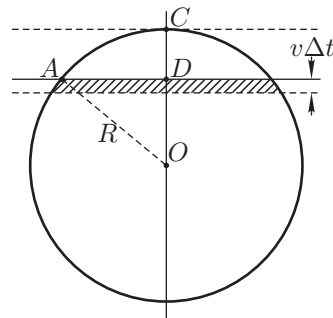


Рис. 31

$$t_{2,3} = \frac{R}{v} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{7}{16}} \right) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (1 \pm 0,66) \text{ с}.$$

$$t_2 = 1,8 \text{ мс} \quad t_3 = 8,3 \text{ мс}.$$

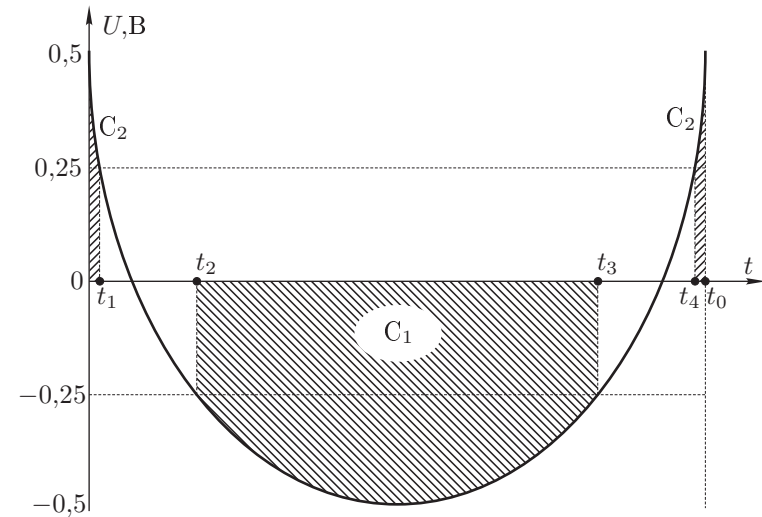


Рис. 32

### Критерии оценивания

Выражение для $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и эквивалентная схема	2
Определение $ \mathcal{E}_{\text{инд}} _{\text{max}}$	1
Формула для напряжения на светодиодах	1
Построение графика зависимости напряжения на светодиодах от времени	2
Определение моментов времени зажигания и гашения светодиода $C_1$	2
Определение моментов времени зажигания и гашения светодиода $C_2$	2

### Задача 5. Параметрические колебания

1. За период колебаний  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  внешние силы дважды совершают положительную работу по раздвижению пластин конденсатора в моменты максимального значения  $U_m$  напряжения. Эта работа затрачивается на увеличение энергии конденсатора

$$A = \Delta W = 2\Delta \left( \frac{q^2}{2C} \right) = -\frac{q^2}{C^2}\Delta C = \varepsilon CU_m^2.$$

Здесь  $q = CU_m$  — заряд конденсатора,  $\Delta C < 0$  — изменение ёмкости конденсатора,  $\varepsilon = -\Delta C/C$  — относительное изменение ёмкости (по модулю). При

скачкообразном увеличении ёмкости до прежнего значения внешние силы работы не совершают, так как в эти моменты напряжение на конденсаторе равно нулю. При колебаниях тока в цепи часть энергии выделяется в виде джоулева тепла на лампочке, которая является инерционным нелинейным элементом. Она будет вести себя как резистор, сопротивление которого при малых колебаниях определяется наклоном касательной к вольт-амперной характеристике в начале координат.

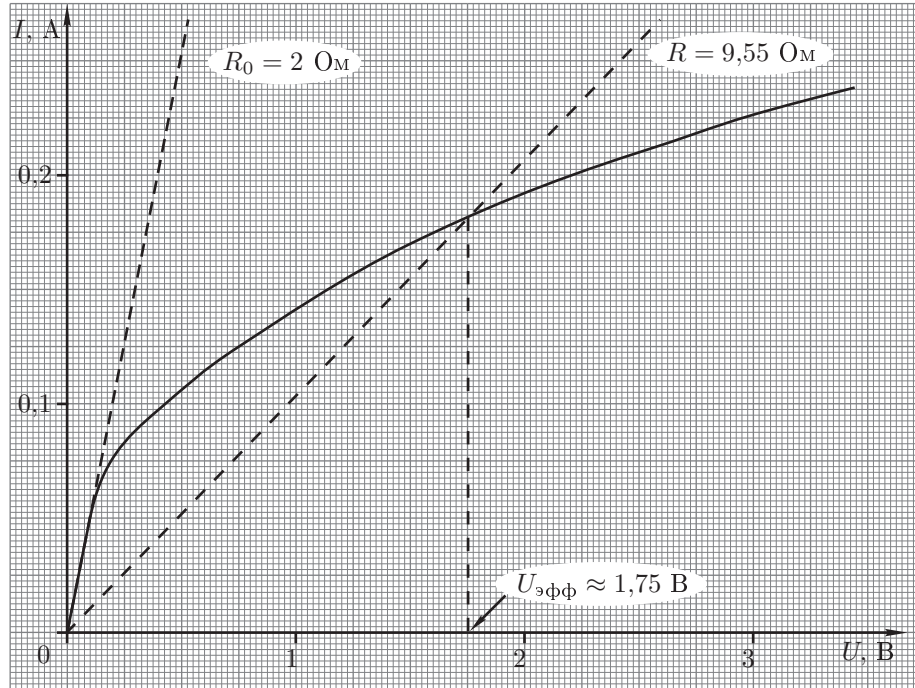


Рис. 33. Вольт-амперная характеристика лампочки.

Из приведённого графика (рис. 33) следует  $R_0 = 2$  Ом.

Таким образом, на лампочке за период колебаний  $T$  будет рассеиваться энергия

$$\Delta Q = \frac{R_0 I_m^2 T}{2} = \frac{R_0 T}{2} \omega^2 C^2 U_m^2.$$

Здесь  $I_m = \omega C U_m$  — амплитуда колебаний тока на лампочке. Условие возбуждения незатухающих параметрических колебаний запишется в виде

$$\Delta W \geq \Delta Q, \quad \text{или} \quad \varepsilon C U_m^2 \geq \frac{R_0 T}{2} \omega^2 C^2 U_m^2.$$

Принимая во внимание  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$ , получим для  $\varepsilon_{\min}$ :

$$\varepsilon_{\min} = \frac{R_0 T}{2} \omega^2 C = \frac{R_0}{2} \cdot 2\pi\sqrt{LC} \cdot \frac{1}{LC} \cdot C = \pi R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Подстановка числовых значений даёт  $\varepsilon_{\min} = 6,3 \cdot 10^{-3} = 0,63\%$ .

2. Период колебаний  $T = 2\pi\sqrt{LC} = 6,3 \cdot 10^{-4}$  с. Температура нити лампочки за период не успеваеет измениться, поэтому лампочка ведёт себя просто как резистор. Как следует из пункта 1, её сопротивление в установившемся режиме при  $\varepsilon = 3\%$  равно  $R = (\varepsilon/\pi)\sqrt{L/C} = 9,55$  Ом. Проведём на вольт-амперной характеристике прямую, соответствующую этому значению сопротивления. Точка пересечения прямой с вольт-амперной характеристикой лампочки определяет эффективное напряжение на лампочке  $U_{\text{эфф}} = 1,75$  В. Следовательно,  $U_0 = \sqrt{2}U_{\text{эфф}} \approx 2,5$  В.

*Примечание.* Из-за неточности графического определения  $R_0$  и  $U_{\text{эфф}}$  численные значения этих величин могут отличаться приблизительно на 5%.

*Критерии оценивания*

Работа внешних сил за период колебаний.....	1
Графическое определение $R_0$ .....	1
Выражение для потерь энергии за период.....	1
Условие возбуждения незатухающих колебаний.....	2
Определение $\varepsilon_{\min}$ .....	2
Определение $R$ в стационарном режиме колебаний (при $\varepsilon = 3\%$ ).....	1
Графическое определение $U_{\text{эфф}}$ на лампочке в стационарном режиме.....	1
Определение амплитуды стационарных колебаний.....	1

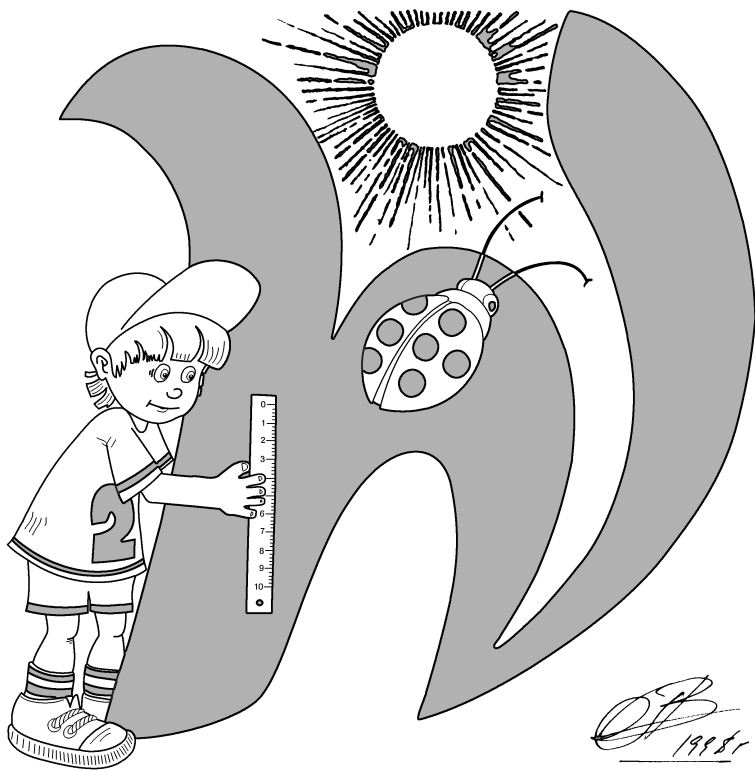
Методическая комиссия по физике  
при центральном оргкомитете  
Всероссийских олимпиад школьников

# XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Экспериментальный тур

Методическое пособие



Санкт-Петербург, 2007 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике  
при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников  
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com)

## Авторы задач

9 класс	10 класс	11 класс
1. ,	1.	1.
2. Бутиков Е.	2. ,	2.

Общая редакция —

Оформление и вёрстка — Ерофеев И., Гуцин И., Гусихин П.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ .  
© Авторский коллектив  
Подписано в печать 15 апреля 2009 г. в 08:08.

141700, Московская область, г. Долгопрудный  
Московский физико-технический институт

**9 класс**

**Задача 1. Определение внутреннего диаметра иглы**

Определите диаметр канала иглы шприца.

*Оборудование.* Шприц, игла от шприца, секундомер, линейка, вода, салфетка.

*Примечание.*

1. Воду из шприца на поверхность стола и на пол при необходимости лить можно.

2. Рекомендуется не набирать в шприц более 4 мл воды за один раз.

**Задача 2. Показатель преломления**

Определите показатель преломления материала, из которого изготовлена прозрачная призма.

*Оборудование.* Прозрачная призма с параллельными боковыми гранями, лист бумаги, линейка, карандаш.

*Примечание.* При падении луча света на поверхность границы раздела двух сред (рис. 1) углы, которые составляют падающий и преломлённый луч с нормалью, связаны следующим соотношением с их показателями преломления:  $n_\alpha \sin \alpha = n_\beta \sin \beta$ .

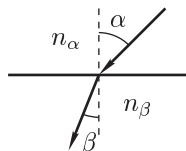


Рис. 1

**10 класс**

**Задача 1. Неизвестный газ**

1. Найдите отношение весов трёх выданных шариков в воздухе.

2. Найдите относительную молекулярную массу неизвестного газа.

*Оборудование.* Три воздушных шарика: ненадутый, наполненный воздухом и наполненный неизвестным газом, четыре отрезка нити, линейка, проволока, груз известной массы, небольшое количество воды.

*Примечание.*

1. Молекулярная масса воздуха  $M_0 = 29$  г/моль, атмосферное давление —  $1,01 \cdot 10^5$  Па

2. Считать, что массы оболочек всех трёх шариков равны с точностью 2%.

3. По окончании эксперимента оставьте оборудование на рабочем месте в том виде, в котором оно использовалось для проведения измерений.

**Задача 2. Определение внутреннего диаметра иглы**

Определите диаметр канала иглы шприца.

*Оборудование.* Шприц, игла от шприца, секундомер, нить, груз, вода, салфетка.

*Примечание.*

1. Период малых колебаний груза на длинной нити рассчитывается по формуле  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , где  $l$  — длина нити, и  $g$  — ускорение свободного падения.

2. Воду из шприца на поверхность стола и на пол при необходимости лить можно.

3. Рекомендуется не набирать в шприц более 4 мл воды за один раз.

**11 класс**

**Задача 1. Исследование резинового шнура**

Исследуйте экспериментально и постройте графики следующих зависимостей:

1. Зависимость относительного удлинения резинового шнура от силы натяжения (до двукратного растяжения).

2. Зависимость скорости распространения поперечной волны в шнуре от силы натяжения

*Оборудование.* Исследуемый шнур (тонкий цветной), вспомогательный шнур (толстый чёрный), груз известной массы ( $m = 100$  г), лента измерительная, скоба с фиксаторами, зажим для вспомогательного шнура («крокодил»), две канцелярские клипсы, миллиметровая бумага (для графиков).

*Примечание.* Считайте, что скорость распространения поперечной волны в вспомогательном шнуре не зависит от частоты колебаний. Основная частота колебаний вспомогательного шнура при исходном натяжении (белая риска должна находиться ровно на краю скобы)  $f_0 = 30 \pm 1$  Гц.

**Задача 2. Электрические свойства бумаги**

Определите диэлектрическую проницаемость бумаги  $\epsilon$ , а также толщину  $d$  и удельное сопротивление  $\rho$  листа миллиметровой бумаги в поперечном направлении (или хотя бы оцените  $\rho$  сверху или снизу).

*Оборудование.* Миллиметровая бумага, мультиметр (Master Tech M890C+), батарейка, контактные пластины, четыре прищепки, вспомогательный конденсатор, ножницы.

*Примечание.* При решении задачи вам могут понадобиться следующие характеристики мультиметра:

В режиме омметра:

Диапазон	Точность
200 Ом	$\pm 0,8\%$ от измеряемой величины $\pm 3$ единицы последнего разряда
2 кОм	$\pm 0,8\%$ от измеряемой величины $\pm 1$ единица последнего разряда
20 кОм	
200 кОм	
2 МОм	$\pm 1\%$ от измеряемой величины $\pm 2$ единицы последнего разряда
20 МОм	
200 МОм	$\pm 5\%$ от (измеряемая величина – 10 единиц) $\pm 10$ единиц последнего разряда

Точность измерения ёмкости на всех диапазонах  $\pm 2,5\%$  от измеряемой величины  $\pm 5$  единиц последнего разряда.

Входное сопротивление в режиме вольтметра ( $10,0 \pm 0,1$ ) МОм для всех диапазонов.

Значение электрической постоянной  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.



## Возможные решения

### 9 класс

#### Задача 1. Определение внутреннего диаметра иглы

Для определения диаметра канала иглы шприца можно выливать из него воду с постоянной скоростью, измеряя время вытекания. Пусть диаметр канала иглы шприца равен  $d$ . Тогда при скорости вытекания воды  $v$  за время  $t$  из него вытечет объём

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v \cdot t, \quad \text{откуда} \quad d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi vt}}.$$

Для определения скорости расположим шприц так, чтобы струя била вертикально вверх, и оценим диапазон высот, для которых мы можем поддерживать стабильную скорость струи. Наберём в шприц объём воды  $V$  и измерим время, в течение которого струя бьёт на высоту  $l$ , которую измеряем с помощью линейки. По закону сохранения энергии  $v = \sqrt{2gl}$ . Окончательно получаем

$$d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi t\sqrt{2gl}}}.$$

#### Критерии оценивания

Метод определения диаметра через скорость струи и время вытекания . . . . .	2
Метод определения скорости струи через высоту подъёма . . . . .	2
Определение скорости струи . . . . .	2
Определение объёма $V$ и времени его вытекания $t$ . . . . .	2
Получение верного численного значения . . . . .	2

#### Задача 2. Показатель преломления

Используем то, что после прохождения светового луча через параллельные грани призмы он будет смещён относительно своего положения до прохождения через призму.

Проведём с помощью линейки на бумаге прямую линию  $AA'$  и расположим на листе призму так, как показано на рисунке 2. Затем посмотрим на призму сбоку так, чтобы видеть линию через параллельные боковые грани. Отметим на бумаге, где видимое продолжение линии выходит из призмы, а саму призму обведём по контуру.

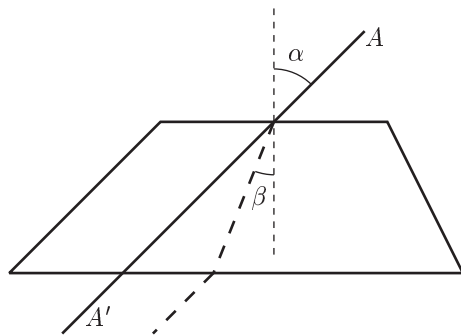


Рис. 2

С помощью призмы находим перпендикуляр к одной из её параллельных граней. Мы смотрим вдоль линии, проведённой вдоль одной из параллельных граней, сквозь призму и находим такое её положение, при котором видимое изображение линии остаётся прямой. В этом случае грань призмы перпендикулярна линии.

Получив перпендикуляр, мы вычисляем  $\sin \alpha$  и  $\sin \beta$  по измеренным с помощью линейки катету и гипотенузе. Получаем для показателя преломления

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Опыт повторяем для нескольких значений угла  $\alpha$  и усредняем результаты. Численное значение показателя преломления  $n \approx 1,6 \pm 0,1$ .

#### Критерии оценивания

Метод определения показателя преломления . . . . .	4
Проведение измерений . . . . .	3
Получение верного численного значения . . . . .	3

10 класс

Задача 1. Неизвестный газ

1. Соорудим весы. Для этого изогнём проволоку, как показано на рисунке 3. Заметим, что для большей чувствительности центр масс коромысла должен быть как можно ближе к оси вращения. Меняя точки подвеса шаров, добьёмся равновесия. По правилу рычага, отношение действующих на коромысла сил (весов шариков)  $F_a/F_b = b/a$ .

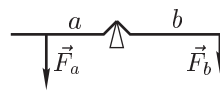


Рис. 3

Отсюда найдём  $\alpha = F_{\text{неизв.}}/F_{\text{пуст.}}$ ,  $\beta = F_{\text{возд.}}/F_{\text{пуст.}}$ .  
 2. Из-за упругости резиновой оболочки давление внутри шара больше атмосферного давления  $p$  на величину  $\Delta p$ . Определим её следующим образом: положим на шарик линейку, закрепим груз на одном из её концов, а другой будем удерживать рукой. Тогда суммарная сила давления  $F$  на шарик равна сумме веса груза и силы, с которой мы удерживаем линейку,  $F_p$  (её найдём по правилу рычагов). Площадь соприкосновения  $S$  можно измерить непосредственно с помощью самой линейки (рис. 4). (При этом удобно слегка смочить поверхность шарика водой для улучшения видимости.) Тогда избыточное давление в шарике  $\Delta p = F/S$ , и количество газа в шарике в  $(p + \Delta p)/p$  раз больше, чем в том же объёме атмосферного воздуха.

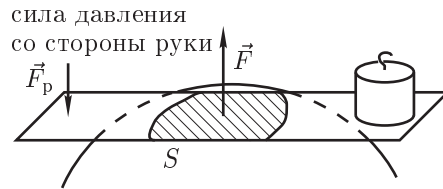


Рис. 4

Пусть  $m$  — масса оболочки шарика,  $F_A$  — сила Архимеда, действующая на шар с воздухом,  $M_x$  и  $V_x$  — молярная масса и объём неизвестного газа,  $M_0$  и  $V_0$  — молярная масса и объём воздуха. Тогда

$$F_{\text{пуст.}} = mg, \quad F_{\text{возд.}} = mg + \frac{p + \Delta p}{p} F_A - F_A,$$

$$F_{\text{неизв.}} = mg + \frac{M_x}{M_0} \frac{p + \Delta p}{p} \left( \frac{V_x}{V_0} F_A \right) - \left( \frac{V_x}{V_0} F_A \right).$$

$V_x/V_0 \approx 1$ , но это значение можно уточнить, измерив отношение обхватов  $l$  шариков по диаметру. Тогда  $V_x/V_0 \approx (l_x/l_0)^3$ . Отсюда находим:

$$\frac{M_x}{M_0} = \frac{p}{p + \Delta p} \frac{V_0}{V_x} \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\beta - 1} \frac{\Delta p}{p} \right).$$

В качестве неизвестного газа был взят аргон (молярная масса  $M_x = 40$  г/моль).

Критерии оценивания

Метод определения отношения весов шариков .....	1
Конструкция весов .....	2
Определение верного численного значения $\alpha$ .....	2
Определение верного численного значения $\beta$ .....	2
Метод определения молярной массы неизвестного газа .....	2
Метод определения избыточного давления в шаре .....	2
Проведение измерений $\Delta p$ .....	2
Получение верного численного значения $M_x$ .....	2

Задача 2. Определение внутреннего диаметра иглы

Для определения диаметра канала иглы шприца можно выливать из него воду с постоянной скоростью, измеряя время вытекания. Пусть диаметр канала иглы шприца равен  $d$ . Тогда при скорости вытекания воды  $v$  за время  $t$  из него вытечет объём

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v \cdot t, \quad \text{откуда} \quad d = 2\sqrt{\frac{V}{\pi vt}}.$$

Для определения скорости расположим шприц так, чтобы струя била вертикально вверх, и оценим диапазон высот, для которых мы можем поддерживать стабильную скорость струи. Возьмём теперь нить с длиной  $l$ , попадающей в данный диапазон, наберём в шприц объём воды  $V$  и измерим время, в течение которого струя бьёт на высоту, равную длине нити. Длину нити найдём, привязав к ней снизу груз и измерив период  $T$  малых колебаний полученного маятника.

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

По закону сохранения энергии  $v = \sqrt{2gl}$ . Окончательно получаем

$$d = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2V}}{gtT}}.$$

Критерии оценивания

Метод определения диаметра через скорость струи и время вытекания .....	2
Метод определения скорости струи через высоту подъёма .....	2
Измерение высоты подъёма струи с помощью нити .....	2
Определение длины нити по периоду колебаний .....	2
Определение скорости струи .....	2
Определение объёма $V$ и времени его вытекания $t$ .....	2
Получение верного численного значения .....	3

**11 класс**

**Задача 1. Исследование резинового шнура**

1. Для того, чтобы измерить зависимость относительного напряжения от приложенной силы, соберём установку, показанную на рисунке 5. Обозначим через  $2l_0$  начальную длину шнура, тогда

$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1.$$

Сила натяжения шнура  $T$  определяется из условия равновесия груза:

$$T = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{mgl}{2h}.$$

Меняя угол  $\alpha$ , построим несколько точек графика  $T(\varepsilon_l)$ .

2. Воспользуемся формулой  $v = f\lambda$ , где  $v$  — скорость распространения поперечной волны,  $f$  — частота колебаний,  $\lambda$  — длина волны.

Если между закрепленными концами шнура укладывается целое число полуволн (в простейшем случае одна), возникает стоячая волна. Когда два шнура настроены в резонанс (их собственные частоты равны или кратны друг другу), колебания одного шнура будут возбуждать колебания другого. Будем изменять натяжения исследуемого шнура небольшими шагами, вытягивая шнур через фиксатор и наблюдая его отклик на колебания вспомогательного шнура, частота колебаний которого известна.

Относительное удлинение шнура удобно найти, вытягивая его за свободный конец, не трогая фиксатор. Тогда, когда фиксатор вот-вот начнёт отходить от скобы, относительное удлинение шнура будет такое же, как и у его части, закреплённой в скобе. Таким образом, определим его относительное удлинение, а следовательно, и силу натяжения. Скорость распространения волны в шнуре составит  $v = f\lambda = 2L_0f$ , где  $L_0$  — длина скобы.

Вторую точку можно определить следующим образом: не меняя натяжения вспомогательного шнура, уменьшим его длину при помощи зажима (рис. 6). Частота колебаний возрастёт обратно пропорционально длине волны.

Будем увеличивать натяжение исследуемого шнура, пока не наступит резонанс. Таким образом, найдём значение скорости распространения волны при большем натяжении. Уберём зажим и вытянем вспомогательный шнур, чтобы он вошёл в резонанс. Тогда его частота будет  $f_1 = f_0 \cdot L_0/L_1$ , где  $L_1$  —

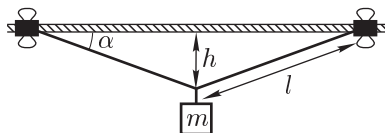


Рис. 5

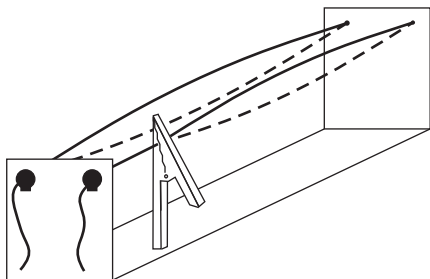


Рис. 6

расстояние от края скобы до зажима. Повторяя это действие, получим частоты вспомогательного шнура  $f_n = f_0 \cdot (L_0/L_1)^n$ . Подбирая натяжение шнура, получим значения скоростей в этих точках.

Для получения точек при меньших натяжениях можно наблюдать резонанс, когда на скобе укладывается две полуволны (вторая мода).

*Критерии оценивания*

Зависимость относительного удлинения от приложенной силы.....	5
Идея резонанса.....	2
Связь скорости распространения волны с её длиной.....	1
Определение скорости распространения волны при $f_0$ .....	3
Получение точек при больших натяжениях.....	2
Получение точек при меньших натяжениях.....	2

**Задача 2. Электрические свойства бумаги**

1. Для определения  $\varepsilon$  бумаги соберём из контактных пластин конденсатор, проложив между ними бумагу (можно сделать размер бумажной прокладки чуть больше, чем пластины) и зажав конструкцию прищепками. (Вообще говоря, результаты будут меняться при различных способах зажима, поэтому следует запомнить/зарисовать способ крепления прищепок и в последующих измерениях придерживаться именно его). Ёмкость полученного конденсатора измерим непосредственно (нужно отсоединить щупы во время измерения ёмкости). С другой стороны, ёмкость равна

$$C_0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d},$$

где  $S$  — площадь пластин, которая находится при помощи миллиметровой бумаги.

Теперь вырежем из бумажной прокладки квадратное отверстие площади  $s$ , существенной по сравнению с площадью пластин, но тем не менее такой, чтобы отверстие не заходило в области прижатия прищепок. Тогда не сложно убедиться, что новая ёмкость составит

$$C_1 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S - s}{d} + \varepsilon_0 \frac{s}{d},$$

следовательно,  $\varepsilon$  найдётся как

$$\varepsilon = \left( 1 - \frac{S}{s} \left( 1 - \frac{C_1}{C_0} \right) \right)^{-1}.$$

2. Толщина  $d$  найдётся из тех же соображений:

$$d = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{C_0}.$$

Для заметок

3. Электрическое удельное сопротивление определяется по формуле  $\rho = RS/d$ . Попытавшись измерить сопротивление  $R$  напрямую, можно заметить, что оно больше, чем максимальный предел измерения мультиметра в режиме омметра (200 МОм). Поэтому для того, чтобы измерить сопротивление бумаги между пластинами, соберём измерительную схему (рис. 7).

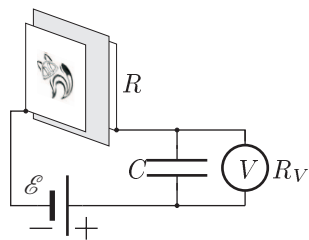


Рис. 7

Вольтметр покажет напряжение на конденсаторе, при котором ток разряда через вольтметр равен току заряда через сопротивление бумаги.

$$\frac{U_C}{R_V} = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}, \quad R = R_V \frac{\mathcal{E} - U_C}{U_C} \approx R_V \frac{\mathcal{E}}{U_C}.$$

Минимальное значение напряжения, измеряемое вольтметром равно  $10^{-4}$  В, следовательно, мы можем измерять сопротивления до  $10^{12}$  Ом.

Предложенный метод измерения можно описать другим способом. Известно, что вольтметр можно использовать в качестве амперметра с ценой деления  $c_A = c_V/R_V$ . Для нашего мультиметра  $c_V = 10^{-4}$  В,  $c_A = 10^{-11}$  А.

Конденсатор играет вспомогательную роль — шунтирует вольтметр по переменному току, так как при малых токах, текущих в цепи, электромагнитные помехи приводят к хаотичности показаний при малейшем движении проводов.

Сопротивление предлагаемого листа миллиметровой бумаги сильно зависит от влажности. В среднем, сопротивление  $R \approx 2 \cdot 10^9$  Ом, а удельное сопротивление  $\rho \approx 2 \cdot 10^9$  Ом · м.

Площадь контакта может быть меньше площади пластин, поэтому найденное значение является верхней границей.

Критерии оценивания

Сборка бумажного конденсатора и измерение его ёмкости . . . . .	3
Проведение измерений с разными площадями бумажной прокладки . . . . .	3
Определение $\epsilon$ . . . . .	2
Определение $d$ . . . . .	2
Схема измерения больших сопротивлений . . . . .	3
Определение $\rho$ . . . . .	2