

The 1st Gulf Physics Olympiad — Theoretical Competition

Riyadh, Saudi Arabia — Monday, March 21st 2016

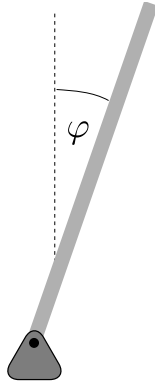
- The examination lasts for 5 hours. There are 3 problems worth in total 30 points. **Please note that the point values of the three theoretical problems are not equal.**
- **You must not open the envelope with the problems before the signal of the beginning of competition.**
- **You are not allowed to leave your working place without permission.** If you need any assistance (broken calculator, need to visit a restroom, etc), please raise your hand until an organizer arrives.
- Use only the front side of the sheets of paper.
- For each problem, there are **dedicated Solution Sheets** (see header for the number and pictogram). Write your solutions onto the appropriate Solution Sheets. For each Problem, the Solution Sheets are numbered; use the sheets according to the enumeration. **Always mark which Problem Part and Question you are dealing with.** Copy the final answers into the appropriate boxes of the **Answer Sheets**. There are also **Draft** papers; use these for writing things which you don't want to be graded. If you have written something that you don't want to be graded onto the Solution Sheets (such as initial and incorrect solutions), cross these out.
- If you need more paper for a certain problem, please raise your hand and tell an organizer the problem number; you are given two Solution sheets (you can do this more than once).
- **You should use as little text as possible:** try to explain your solution mainly with equations, numbers, symbols and diagrams. Though in some places textual explanation may be unavoidable.
- **After the signal signifying the end of examination you must stop writing immediately.** Put all the papers into the envelope at your desk. **You are not allowed to take any sheet of paper out of the room.** If you have finished solving before the final sound signal, please raise your hand.



Problem T1. Stabilizing unstable states (11 points)

Part A. Stabilization via feedback (3.5 points)

Let us study, how an initially unstable equilibrium position can be stabilized. First we consider a reversed pendulum: a thin long rod of homogeneous mass distribution and length l is fixed at its lowest point to a hinge so that it can freely rotate around the hinge. We describe the position of the rod via the angle φ between the rod and a vertical line. We shall assume that $\varphi \ll 1$ (φ is much smaller than 1). The free fall acceleration $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.



i. (1.5 pts) Express the angular acceleration of the rod $\ddot{\varphi}$ in terms of φ , and the parameters l and g . Show that the inclination angle φ as a function of time t is expressed as $\varphi(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$, where A and B are constants which depend on the initial position and initial angular speed of the rod, and τ is a characteristic time. Express τ in terms of l and g . (You may use dimensional analysis, but then you'll lose 0.5 pts.) *Hint:* for a rod of length l and mass m , the moment of inertia with respect to its endpoint is $\frac{1}{3}ml^2$.

ii. (0.5 pts) Now, a boy tries to keep a long thin rod standing vertically on his palm. For instance, as soon as the rod starts falling leftwards, he moves his palm to an even greater distance leftwards so that the rod's centre of gravity would be positioned rightwards from the rod's support point. Then, the torque of the gravity force would rotate the rod rightwards, decreasing the previously observed leftwards angular speed. Estimate, for which rod lengths the boy can keep the rod vertically if his reaction time is estimated as $\tau_r = 0.2 \text{ s}$. (The reaction time is the time lag between the command sent by brain to hands, and the corresponding motion of the hands.)

iii. (0.5 pts) Humans and birds keep their standing position similarly and move the support centre (the point at the bottom of their feet where the total normal force is applied), e.g. by adjusting the angle between a leg and the foot, so as to oppose the falling motion of the upper part of their body. A small bird of length $l_b = 6 \text{ cm}$ can stand on its feet; estimate the upper bound for its reaction time.

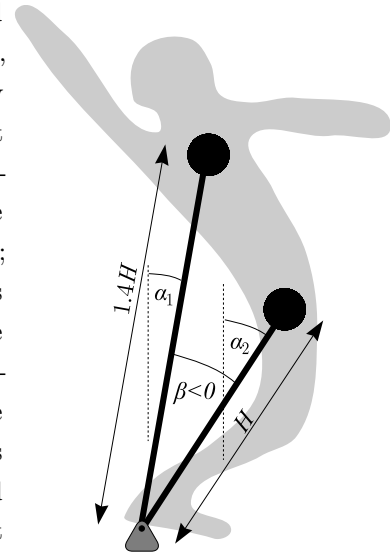
iv. (1 pt) Equilibrium on a bike is also kept by displacing the support centre which lies on the line connecting the wheel-ground contact points; that line can be conveniently displaced by turning the handlebar while driving forth. Estimate the minimal driving speed v_m of a bicyclist by which the equilibrium can be maintained in such a way. Assume that for the

bicyclist, the characteristic falling time is the same as for a rod of length $L = 2 \text{ m}$; the distance between the centres of the wheels $d = 1 \text{ m}$.

Part B. Tightrope walker (3.5 points)

A tightrope walker cannot move the support point in the direction perpendicular to the rope. His equilibrium is kept by displacing the centre of gravity, instead. Let us make a simple model of a man balancing on a rope.

Lower half of the body is modelled by a point mass m at height H , and the upper half of the body — by an equal point mass m at the height $1.4H$. The mutual position of these point masses can be changed by bowing right or left; for the sake of simplicity, let us assume that the distance of the point masses from the rope will remain unchanged, i.e. these behave as if being fixed to the endpoints of two thin rods of lengths H and $1.4H$ respectively, see figure. Let the rods form angles α_1 and α_2



with the vertical line (positive angles correspond to clock-wise rotation), so that the angle between the rods is $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. A tightrope walker can control the value of the angle β by bowing.

i. (1 pt) Let us assume that initially, the tightrope walker was standing in an almost perfect equilibrium ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Due to instability of this equilibrium, he **starts slowly falling clock-wise**, which he notices at $t = t_0$ when $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 > 0$. He bows rapidly to stop falling: assume that the angle β takes almost **instantaneously** a new value β_0 . Express the new values of the angles α_1 and α_2 in terms of β and α_0 .

ii. (0.5 pts) So, the tightrope walker is now bowing and keeps this body shape ($\beta = \beta_0$) for the time period T_b , upon which he straightens himself almost instantaneously and makes thereby $\beta = 0$. His aim is to resume the motionless standing position with $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Should he have bowed clock-wise ($\beta_0 > 0$) or counter-clock-wise? Motivate your answer.

iii. (1 pt) From now on, we assume that $\alpha_0 \ll \beta_0$. Immediately after he has straightened himself, neither his angular speed $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2$ nor angle α_1 are zero: zero values will be achieved much later. Which value (expressed in terms of H and g) should the ratio $\dot{\alpha}_1/\alpha_1$ take at that moment?

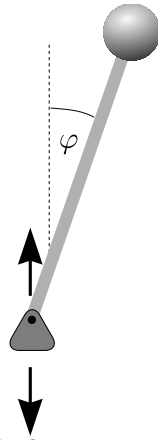
iv. (1 pt) Express the required duration T_b in terms of α_0 , β_0 , H , and g assuming that $\alpha_0 \ll \beta_0$.



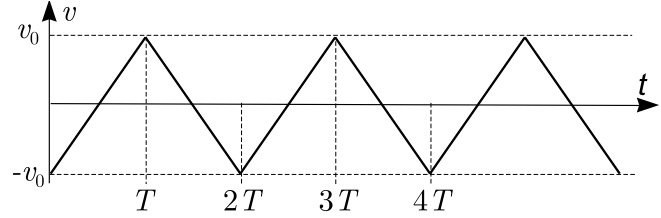
Part C. Kapitza's pendulum (4 points)

In 1908 Andrew Stephenson found that the upper position of a pendulum can be stable, if its suspension point oscillates with a high frequency. The explanation of this phenomenon was provided in 1951 by Russian physicist Pyotr Kapitza. In what follows we'll find the stability criterion of such a pendulum. Apart from being just a nice toy, the Kapitza's pendulum demonstrates the method of separating fast and slow processes which plays an important role in physics. High frequency oscillations can drive a slow motion in various systems, e.g. high frequency electric fields act on charges with an effective average force known as the ponderomotive force.

We consider a pendulum of length l , similar to that of Part-A-Question-i, but now the rod is massless, with a point mass at its end, and the suspension point oscillates vertically (see the figure). Let the velocity v of the suspension point depend on time t as shown in the graph below ($v > 0$ corresponds to upward motion); the oscillations' half-period $T \ll l/v_0$. We also assume that $v_0/T \gg g$ so that for questions i–ii you may ignore the free fall acceleration. In order to simplify calculations, you'll need to study this process in the frame of reference of the sus-

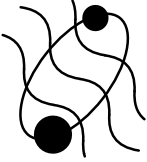


pension point (keep in mind: reference frame's acceleration \vec{a} gives rise to an inertial force $-M\vec{a}$ acting on a body of mass M).



- i. (1.5 pts) Suppose that at $t = T/2$, the pendulum was motionless and inclined by a small angle φ_0 . Sketch the graph of the inclination angle φ as a function of time, and determine the angular displacement of the pendulum $\Delta\varphi$ for the moment $t = T$, i.e. $\Delta\varphi = \varphi(T) - \varphi(T/2)$. You may assume in your calculations that $\Delta\varphi \ll \varphi_0$ (this is valid because $T \ll l/v_0$).
- ii. (1.5 pts) Since we still neglect gravity, only inertial force exerts a torque on the pendulum. Determine the average value of this torque (with respect to the suspension point, averaged over the full period $2T$).
- iii. (1 pt) Now, let us take into account that there is also the gravity field of the Earth. Determine, which inequality must be satisfied for g , T , l and v_0 in order to ensure the stability of the vertical position of such a pendulum (some of these parameters may not be needed for your inequality).

PROBLEM 2



Problem T2. Gravitational waves (10 points)

Part A. Dipole radiation (2.4 points)

Static electric and gravity fields are described by identical set of equations — as long as we are far from black holes. However, if we add terms describing time variations of the fields, the equations become different. Therefore, expressions for electromagnetic waves cannot be directly carried over to gravitational waves. Still, for expressions given below, the difference will be only in the value of numerical prefactors.

Charges moving with acceleration lose kinetic energy by radiating electromagnetic waves; this radiation is known as **the dipole radiation**. The total radiation power is expressed as

$$P_{ed} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (1)$$

where $\ddot{\vec{d}}$ is the second time derivative of the dipole moment, c is the speed of light, and ϵ_0 — vacuum permittivity. Dipole moment for a system of charges q_i is defined as $\vec{d} = \sum_i \vec{r}_i q_i$, where \vec{r}_i is vector pointing from the origin to the position of i -th charge. For harmonically oscillating dipoles, the radiated wave frequency equals to the frequency of oscillations.

i. (1.4 pts) Consider an electron of charge $-e$ and mass m , circulating around an atomic nucleus of charge $+Ze$ at distance r ; neglect quantum mechanical effects. Express the total radiated power, and the wavelength λ of the radiated waves in terms of e , Z , m , r , and physical constants.

ii. (1 pt) Let us try to carry over Eq. (1) to gravitational waves; then, the total radiation power P_{gd} would be proportional to $\ddot{\vec{d}}_g^2$, where \vec{d}_g is the gravitational dipole moment, and two dots denote the second time-derivative. Analogously to the electrical dipole, gravitational dipole moment for a system of point masses m_i is defined as $\vec{d}_g = \sum_i \vec{r}_i m_i$. Show that always $P_{gd} = 0$.

Part B. Quadrupole radiation (7.6 points)

Let us consider a binary star consisting of two stars of equal mass M which rotate around a circular orbit of radius R with angular speed ω .

i. (1 pt) Express ω in terms of M , R , and constants.

ii. (0.8 pts) While there is no gravitational dipole radiation, there is a quadrupole one. In analogy with the dipole radiation, it should be proportional to squared time-derivatives of the quadrupole moment. For this problem, it is enough to know that for our binary star, the gravitational quadrupole moment components are of the order of MR^2 . So, we expect the total radiation power to have a form $P_{qg} = AM^2R^4$, where the factor A may depend on ω and physical constants (here ω is an independent parameter, though for a binary star it depends on M and R). Find expression for P_{qg} using dimensional analysis.

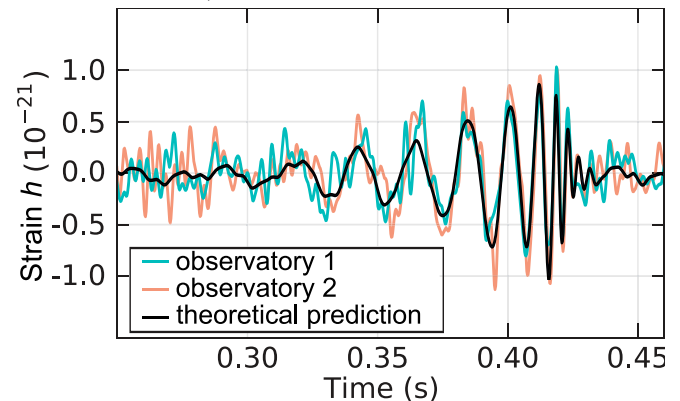
iii. (0.8 pts) The effect of gravitational waves is measured by strain $h = \Delta l/l$; here l is a distance between two points in space, and Δl is the change of that distance due to the wave. As usual for waves, the energy flux density S (radiation energy per unit time and unit area) is proportional to the squared wave amplitude: $S = Kh_0^2$ (h_0 denotes the wave amplitude). Based on dimensional arguments, express the factor K in terms of constants and the angular frequency of the wave ω .

iv. (1 pt) The dipole radiation is distributed over propagation directions anisotropically, but let us ignore this: for the sake of simplicity, assume isotropic radiation. Express the amplitude h_0 of gravitational waves at distance L in terms of M , R , and physical constants.

The energy of the binary star decreases in time due to the emission of gravitational waves. So, the distance R between the two stars decreases. This process will continue until the stars collide and merge (R becomes of the order of the radius of a star). In LIGO experiment (reported on 11th February 2016), gravitational waves emitted right before a merger of two black holes were observed. For the radius of a black hole, we'll use the Schwarzschild radius R_s which is defined as such a critical distance from a point mass M that light cannot escape due to gravitational pull from distances $r < R_s$. To derive properly an expression for R_s , theory of general relativity is needed.

v. (1 pt) Express R_s in terms of M and physical constants. Use the following fact: if we neglect general relativity and use special relativity together with Newtonian gravitation law, we obtain a result which is exactly half of the correct one.

vi. (1.5 pts) In LIGO experiment, using a 4-km-long laser interferometer, the strain h (see question iii) was measured as a function of time; the result is given in the graph below. Using this graph and assuming that the masses of the two black holes were equal, estimate the mass of each of them numerically. Gravitational constant $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$; $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

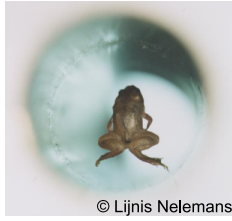


vii. (1.5 pts) Using the same data as for question vi, estimate the distance to these black holes.

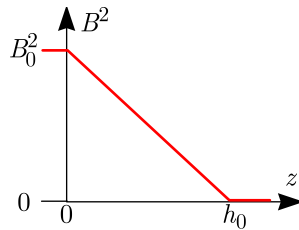
Problem T3. Magnetars (9 points)

Magnetic fields are everywhere around us. Some typical magnetic B-field values: Earth’s magnetic field: $25 - 60 \mu\text{T}$; at Sunspots: 0.3 T ; strong permanent magnets: around 1 T ; continuously maintained magnetic fields in laboratory: up to 45 T ; neutron stars and magnetars: up to 10^{11} T . In what follows we study few aspects of strong magnetic fields.

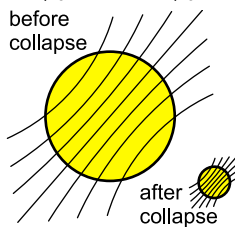
Magnetic field energy density $w = B^2 \frac{1}{2\mu\mu_0}$, where $\mu_0 \approx 1.3 \times 10^{-6} \text{ N/A}^2$ is the vacuum permeability, and μ — the relative permeability of the medium. System tries to move towards a lower energy state and so ferromagnetic materials with $\mu \gg 1$ are pulled towards regions with strong magnetic fields, and diamagnetic materials with $\mu < 1$ are pushed out. For diamagnetic materials, the magnetic susceptibility $\chi = \mu - 1$ is small, $|\chi| \ll 1$, and so the effect is small unless the field is strong. Water is a diamagnetic with $\chi = -9 \times 10^{-6}$ and animals are mostly made of water. So, a frog can levitate in a magnetic field if the field is strong enough, see the photo.



i. (1.5 pts) Let the frog height h_f be not more than $h_0 = 10 \text{ mm}$, and let us assume simplifyingly that the squared magnetic field depends linearly on height z , see figure. Find how strong magnetic field B_0 (in Teslas) is needed to keep this frog in levitation. Assume that the frog is made entirely of water (density $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$); free fall acceleration $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. *Hint:* for $|\chi| \ll 1$, we can write $w \approx B^2 \frac{1-\chi}{2\mu_0}$; hence, the energy density associated with the presence of water is $\Delta w = B^2 \frac{1-\chi}{2\mu_0} - B^2 \frac{1}{2\mu_0} = -B^2 \frac{\chi}{2\mu_0}$.



Stars are made of a plasma which is a good electrical conductor. Because of that, magnetic field lines behave as if being “frozen” into the moving plasma (this follows from the Faraday’s induction law and Kirchoff’s voltage law: due to the absence of electrical resistance, the voltage drop along a closed fictitious contour inside the plasma must be zero, hence the magnetic flux cannot change). If a star were to collapse into a neutron star, this effect would lead to an instantaneous increase of the magnetic field, see the sketch of the magnetic field lines before and after the collapse (recall that magnetic field strength is proportional to the density of field lines).

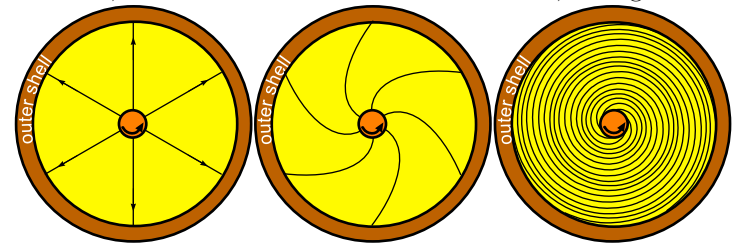


ii. (1 pt) Assuming that the polar magnetic field of a star is $B_s = 100 \mu\text{T}$ and its average density $\rho_s = 1400 \text{ kg/m}^3$, what would be its polar magnetic field strength B_c after its collapse into a neutron star due to the compression of mag-

netic field lines as depicted above? The neutron star density $\rho_n = 5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

iii. (1 pt) In reality, magnetic fields of neutron stars are generated differently. Let us consider a very simplified model. Interior part of the star has collapsed to a neutron star’s size and density, but the exterior parts remains of the same size. Assume that before the collapse, the star was rotating as a solid body with angular speed ω_s . Express the new angular speed of the interior part of the star ω_n in terms of ω_s , ρ_s and ρ_n .

iv. (1.5 pts) Rotation speeds of the inner- and outer parts are different, hence the field lines will be stretched, see figure.



For the sake of simplicity: (a) we use 2-dimensional geometry, i.e. consider stars as being cylindrical; (b) while the initial field was a dipole field, we assume that it was cylindrically symmetric as shown in figure; (c) endpoints of field lines are attached to the inner cylinder (the neutron star) and to the outer cylindrical shell (the remnant of the original star). Let the initial magnetic field at the outer shell be B_0 . Express the magnetic field B as a function of time t in the region where field lines are being stretched for $t \gg 1/\omega_n$ in terms of B_0 and ω_n .

v. (1 pt) So, the energy is converted during the star collapse as follows: gravitational energy is converted into kinetic one (let us neglect thermal energy), which is later on converted into the magnetic one. Based on this scenario, estimate the maximal strength of the magnetic field B_{max} for a neutron star of mass $M_n = 4 \times 10^{30} \text{ kg}$ and radius $R_n = 13 \text{ km}$. Recall that $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$.

vi. (1 pt) Very strong magnetic fields affect chemical properties of matter by changing the shape of electron orbits. This happens when the Lorentz force acting on an orbital electron becomes stronger than the Coulomb force due to the atomic nucleus. Estimate the strength of the magnetic field B_H needed to distort the electron orbit of an hydrogen atom which has radius $R_H = 5 \times 10^{-11} \text{ m}$. Note that $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ m/F}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, and electron mass $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

vii. (2 pts) In very strong magnetic fields, atomic electron clouds take cylindrical shape. Estimate the length-to-diameter ratio $\kappa = l/d$ of such electron clouds for hydrogen atoms near a neutron star, in magnetic field $B_n = 10^8 \text{ T}$. Note that the Planck’s constant $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. *Hint:* the radius of the cyclotron orbit for an electron in quantum-mechanical ground state can be estimated using uncertainty principle.

PROBLEM 1



Problem T1. Stabilizing unstable states (11 points)

Part A. Stabilization via feedback (3.5 points)

i. (1.5 pts) The moment of inertia of the rod is

$$I = \frac{ml^2}{3}. \quad \text{The torque is } mg\frac{\varphi l}{2}.$$

so that the Newton's 2nd law is written as

$$I\ddot{\varphi} = mg\frac{\varphi l}{2}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l}\varphi. \quad (1)$$

If we take $\varphi = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$, then

$$\ddot{\varphi} = \frac{A}{\tau^2}e^{\frac{t}{\tau}} + \frac{B}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\varphi}{\tau^2}. \quad (0.3 \text{ pts})$$

Substituting this into the equation of motion (1) we get

$$\frac{\varphi}{\tau^2} = \frac{3g}{2l}\varphi$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{3g}}. \quad (0.4 \text{ pts})$$

This means that $\varphi = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ is the solution for the equation of motion.

ii. (0.5 pts) The boy has to react before the rod falls over the angle $\frac{\pi}{2}$. Boy notices that the rod is falling, and tries to react. If the rod falls faster than his reaction time, he cannot keep it in balance. In the expression $\varphi = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$, the dominating term is the first one (the second one decays in time), so we can put $\varphi = Ae^{\frac{t}{\tau}}$, where A is the angle at $t = 0$. Hence, the falling time $t = \tau \ln(\pi/2A)$ depends on the initial angle A , but logarithmic dependence is very slow — the logarithm remains always of the order of unity. So we can estimate the falling time just as the characteristic time of the rod. This means that

$$\tau_r \approx \sqrt{\frac{2l_r}{3g}} \quad (0.3 \text{ pts})$$

$$l_r = \tau_r^2 \frac{3g}{2} = 0.59 \text{ m} \quad (0.2 \text{ pts})$$

iii. (0.5 pts) The bird won't be able to rebalance itself when it has fallen over $\frac{\pi}{2}$. Similarly to the previous question, we can say that the bird's reaction time must be equal to the characteristic time τ_b . (0.3 pts)

Then we get

$$\tau_b \approx \sqrt{\frac{2l_b}{3g}} = 0.065 \text{ s} \quad (0.2 \text{ pts})$$

iv. (1 pt) The cyclist is able to balance himself by turning the handlebar so that the line connecting the wheels will move to the desired direction. For that line to move, the bike must move forward to a distance which is of the order of inter-wheel separation. So we can require $v_m \tau \approx d$, where τ is bike's characteristic falling time. (0.5 pts)

Note that with this equation we neglect the cyclist's reaction time (which makes balancing more difficult) but on the other hand the line connecting the wheels moves slightly already at a twice smaller forward-displacement of the bike (which makes balancing easier). Anyway, we are only making an estimate, so a mistake by a factor of 2 is perfectly OK.

Then we get

$$d = v_m \tau = v_m \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (0.2 \text{ pts})$$

$$v_m = d \sqrt{\frac{3g}{2L}} = 2.7 \text{ m/s} \quad (0.3 \text{ pts})$$

Part B. Tightrope walker (3.5 points)

i. (1 pt) From the conservation of angular momentum

$$m(1.4H)^2 \frac{d\alpha_1}{dt} + mH^2 \frac{d\alpha_2}{dt} = \text{Const.}$$

(0.3 pts)

Partial credit 0.2 pts if the conservation is mentioned without writing equation. This process is instantaneous, i.e. $\frac{d\alpha_1}{dt}$ and $\frac{d\alpha_2}{dt}$ are very large, much larger than that constant at the right-hand-side (which is defined by the initial falling speed), hence we can put $\text{Const} = 0$.

(0.2 pts)

This simplifies into

$$1.96\Delta\alpha_1 = -\Delta\alpha_2 \quad (2)$$

(0.1 pts)

We also have

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = (\alpha_0 + \Delta\alpha_1) - (\alpha_0 + \Delta\alpha_2) = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 \quad (3)$$

(0.2 pts)

Solving the equations (1) and (2) we get

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\beta}{2.96} \quad (0.1 \text{ pts})$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{1.96}{2.96}\beta \quad (0.1 \text{ pts})$$

ii. (0.5 pts) In order to be able to straighten himself, the walker's centre of mass has to move leftwards, by a negative

PROBLEM 1



angle. **(0.1 pts)**

By changing the upper body's angle by $\Delta\alpha_1$, the lower body's angle will change by $\Delta\alpha_2 = -1.96\Delta\alpha_1$. The centre of mass will then move by

$$1.4H\Delta\alpha_1 + H\Delta\alpha_2 = 1.4H\Delta\alpha_1 - 1.96H\Delta\alpha_1 = -0.56H\Delta\alpha_1$$

(0.3 pts)

Because the centre of mass will have to move by a negative angle, $\Delta\alpha_1$ needs to be positive, which means that the walker has to bow clockwise. **(0.1 pts)**

iii. **(1 pt)** We can write the equation of motion

$$2.96\ddot{\alpha}_1 H = 2.4g\alpha_1$$

Similarly to the question i. in part A, the solution for this differential equation is $\alpha_1(t) = Ae^{\frac{t}{\tau}} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$, where $\tau = \sqrt{\frac{2.96 H}{2.4 g}}$. **(0.2 pts)**

Because the time it takes to get to the vertical position is infinite, the component $Ae^{\frac{t}{\tau}}$ needs to be 0, meaning that $\alpha_1(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}$. **(0.3 pts)**

By taking time derivative, we obtain

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau}Be^{-\frac{t}{\tau}}.$$

(0.3 pts)

For the instance when the boy straightened himself, $t = 0$, the equations take form $\alpha_1 = B$ and $\dot{\alpha}_1 = -\frac{B}{\tau}$. So, $\dot{\alpha}_1 = -\frac{\alpha_1}{\tau}$, which can be rewritten as

$$\frac{\dot{\alpha}_1}{\alpha_1} = -\frac{1}{\tau} = -\sqrt{\frac{2.4 g}{2.96 H}}$$

(0.2 pts)

iv. **(1 pt)** After the walker has straightened himself, the angle which he is at is still α_0 , because during stage where he is bowing, the torque is much larger than when he is straightened, meaning that the change in angular speed is much larger than the change in the angle. **(0.1 pts)**

As found in the previous subquestion, the speed before and after the bowing are $\frac{\alpha_0}{\tau}$ and $-\frac{\alpha_0}{\tau}$ respectively. Then the change in the angular momentum is

$$\Delta L = -5.92mH^2 \frac{\alpha_0}{\tau}$$

(0.3 pts)

Because during the falling stage the change in angle is minuscule, we can express the change in angular momentum as $\Delta L = MT_b$, where M is the torque during bowing stage. **(0.2 pts)**

During the bowing stage, the angles of the body segments are

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{2.96} \approx \frac{\beta_0}{2.96}$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 - \frac{1.96}{2.96}\beta_0 \approx \frac{1.96}{2.96}\beta_0$$

The torque can be expressed as

$$M = 1.4mgH\alpha_1 + mgH\alpha_2 = \frac{1.4}{2.96}\beta_0 mgH - \frac{1.96}{2.96}\beta_0 mgH = -\frac{0.56}{2.96}\beta_0 mgH$$

(0.3 pts)

Writing out $\Delta L = MT_b$ we get

$$-5.92mH^2 \frac{\alpha_0}{\tau} = -\frac{0.56}{2.96}\beta_0 mgHT_b$$

$$T_b = 31.29 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{H}{\tau g} = 31.29 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{H}{g} \sqrt{\frac{2.4 g}{2.96 H}} = 28.18 \frac{\alpha_0}{\beta_0} \sqrt{\frac{H}{g}}$$

(0.1 pts)

Part C. Kapitza's pendulum (4 points)

Throughout the entire problem, we use the system of reference of the suspension point.

i. **(1.5 pts)** During these periods of time when the suspension point accelerates upwards (and force of inertia is downwards), the equation of motion of the pendulum can be written as

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{a_0}{l}\varphi,$$

where $a_0 = 2v_0/T$ is the frame's acceleration. **(0.4 pts)**

Incomplete attempts at writing Newton second law will be partially credited (0.2 pts).

The relative change of φ is assumed to be small, so we can approximate $\varphi \approx \varphi_0$ to obtain

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2v_0}{Tl}\varphi_0.$$

(0.2 pts)

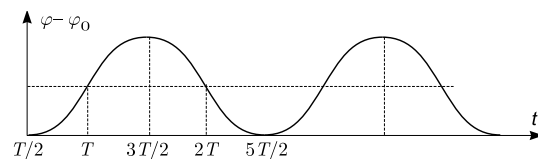
During the rest of the time, the same equation can be used if a_0 is changed to $-a_0$. **(0.2 pts)**

Therefore, the graph consists of parabolic segments, as depicted in the Figure. **(0.4 pts)**

The amplitude is found as

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4} \frac{v_0 T}{l} \varphi_0.$$

(0.3 pts)



ii. **(1.5 pts)**

The average torque $\langle M \rangle = \langle mla(t)\varphi(t) \rangle$. **(0.3 pts)**

Let us note that $\langle a(t)\langle\varphi\rangle \rangle = \langle a(t)\rangle\langle\varphi\rangle = 0$. **(0.3 pts)**

Therefore we can rewrite the average torque as

PROBLEM 1



$$\langle M \rangle = \langle mla(t)[\varphi(t) - \langle \varphi \rangle] \rangle = -ml \frac{2v_0}{T} \langle |\varphi(t) - \langle \varphi \rangle| \rangle \quad (0.2 \text{ pts})$$

(0.3 pts; if wrong sign 0.2 pts)

It is easy to see that the average of $|\varphi - \langle \varphi \rangle|$ over the entire period equals to the average over the time interval $0 < t < \tau$. Straightforward integration yields

$$\langle |\varphi - \langle \varphi \rangle| \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \Delta\varphi \left(1 - \frac{4t^2}{T^2}\right) dt = \frac{2}{3} \Delta\varphi = \frac{1}{6} \frac{v_0 T}{l} \varphi_0.$$

(0.4 pts)

Upon substituting this result into the previous expression we obtain

$$\langle M \rangle = -\frac{1}{3} m v_0^2 \varphi_0.$$

iii. (1 pt) Gravity field does not affect the expression for the average torque of the force of inertia. So, we can use the result of the previous question. However, it gives rise to an additional contribution to the average torque, equal to $glm\varphi_0$. **(0.4 pts)** Therefore, the equation of motion can be written as

$$l^2 \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2} = \left(gl - \frac{1}{3} v_0^2 T^2 \right) \varphi_0.$$

(0.4 pts)

The stability is ensured if the factor at the right-hand-side is negative, i.e. if $3gl < v_0^2$. **(0.2 pts)**

PROBLEM 2

Problem T2. Gravitational waves (10 points)

Part A. Dipole radiation (2.4 points)

For the sake of convenience, let us denote $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

i. (1.4 pts) The total dipole moment can be expressed as

$$\vec{d} = -\vec{r}_1 e + \vec{r}_2 Z e, \quad (0.2 \text{ pts})$$

where \vec{r}_1 and \vec{r}_2 are the position vectors of the electron and nucleus respectively. Then $\ddot{\vec{d}} = -\ddot{\vec{r}}_1 e + \ddot{\vec{r}}_2 Z e = -\frac{\vec{F}}{m} e - \frac{\vec{F}}{m_1} Z e,$

$$(0.1 \text{ pts})$$

but because the mass of the nucleus m_1 is much larger than m , we can neglect the second term. Then

$$|\ddot{\vec{d}}| = \left| -\frac{\vec{F}}{m} e \right| = \frac{k Z e^3}{m r^2}$$

$$(0.3 \text{ pts})$$

$$P_{ed} = \frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \left(\frac{k Z e^3}{m r^2} \right)^2 \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$(0.2 \text{ pts})$$

We can express λ as $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi r c}{v}.$

$$(0.2 \text{ pts})$$

We get v from the relation $\frac{m v^2}{r} = k \frac{Z e^2}{r^2}$, then $v = e \sqrt{\frac{k Z}{m r}}.$

$$(0.3 \text{ pts})$$

Finally

$$\lambda = \frac{2\pi r c}{v} = \frac{2\pi r c}{e} \sqrt{\frac{m r}{k Z}}$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

ii. (1 pt) We know that $\vec{d}_g = \sum_i \vec{r}_i m_i$. Let us recall that the distance to centre of mass is

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Then

$$(0.3 \text{ pts})$$

$$\vec{d}_g = \sum_i \vec{r}_i m_i = \vec{r}_{cm} \sum_i m_i$$

$$(0.2 \text{ pts})$$

(Equivalently one can notice that $\dot{\vec{d}}_g = \sum_i \vec{v}_i m_i$ the net momentum.) \vec{r}_{cm} is constant because there aren't any external forces acting on the system. (0.3 pts)

This means that $\ddot{\vec{d}}_g = 0$ and $P_{gd} = 0.$ (0.2 pts)

Part B. Quadrupole radiation (7.6 points)

i. (1 pt) The force acting on one of the stars is

$$F = G \frac{M^2}{4R^2} = \frac{M v^2}{R}$$

$$(0.6 \text{ pts})$$

From here we can express the star's speed v . We can express the star's angular speed from the relation $\omega = \frac{v}{R}.$ (0.2 pts)

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

$$(0.2 \text{ pts})$$

ii. (0.8 pts) The dimensions for A need to be

$$W \frac{1}{\text{kg}^2 \text{m}^4} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3} \frac{1}{\text{kg}^2 \text{m}^4} = \frac{1}{\text{s}^3 \text{m}^2 \text{kg}}$$

$$(0.2 \text{ pts})$$

A can only consist of the gravitational constant G , speed of light c and angular velocity $\omega.$ (0.2 pts)

We can write a system of equations for every unit, m, s and kg. If we take the power of G , c and ω to be a , b and c respectively, we can write out for metres

$$3a + b = -2,$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

for seconds

$$-2a - b - c = -3,$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

and finally for kilograms

$$-a = -1.$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

Solving the equations we get $a = 1$, $b = -5$ and $c = 6$, which means that

$$A = G \frac{\omega^6}{c^5}$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

iii. (0.8 pts) The solution for this subquestion is the same as for the previous one. The units for K are

$$\frac{W}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^3}$$

$$(0.2 \text{ pts})$$

K can only depend on G , c and $\omega,$ (0.2 pts)

if we take their powers to be a , b and c respectively, we can write out for metres

$$3a + b = 0$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

for seconds

$$-2a - b - c = -3$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

and finally for kilograms

$$-a = 1$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

Solving the equations we get $a = -1$, $b = 3$ and $c = 2$, which means that

$$K = \frac{c^3 \omega^2}{G}$$

$$(0.1 \text{ pts})$$

PROBLEM 2

iv. (1 pt) The flux at distance L is $S = \frac{P_{qg}}{4\pi L^2}$, (0.4 pts)
on the other hand we can express flux as $S = Kh_0^2$. This means
that

$$Kh_0^2 = \frac{P_{qg}}{4\pi L^2} = \frac{AM^2 R^4}{4\pi L^2} \quad (0.4 \text{ pts})$$

and finally

$$h_0 = \sqrt{\frac{AM^2 R^4}{K4\pi L^2}} = \sqrt{\frac{G\omega^6}{c^5} \frac{G}{c^3\omega^2} \frac{M^2 R^4}{4\pi L^2}} = \frac{G\omega^2 MR^2}{2\sqrt{\pi}c^4 L} = \frac{G^2 M^2}{8\sqrt{\pi}c^4 LR} \quad (0.2 \text{ pts})$$

v. (1 pt) At distance R_s from the black hole, it takes all
the energy mc^2 for an object to overcome the potential energy
 $-G\frac{Mm}{R_s}$. This means that

$$mc^2 = G\frac{Mm}{R_s} \quad (0.7 \text{ pts})$$

(If non-relativistic energy $mc^2/2$ is used, deduct 0.3 pts.) From
here we can express R_s

$$R_s = \frac{GM}{c^2} \quad (0.1 \text{ pts})$$

This answer is 2 times smaller than the correct one, which
means that

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (0.2 \text{ pts})$$

vi. (1.5 pts) We can estimate the mass of the black holes by
finding the orbital frequency and then using the expression we
found in the first subquestion (Kepler's III law). (0.3 pts)

The strain is maximal when the orbital radius for the black
holes is R_s . (0.3 pts)

Reading from the graph, we get that the orbital period is
 $T \approx 0.006$ s (0.3 pts)

and frequency $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1000$ rad/s. Then

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{R_s^3}}; \quad (0.2 \text{ pts})$$

substituting R_s we obtain

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{GM \frac{c^6}{8G^3 M^3}} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}GM} \quad (0.2 \text{ pts})$$

The mass of a black hole is

$$M = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\omega G} = 1.45 \times 10^{32} \text{ kg} = 72 M_\odot \quad (0.2 \text{ pts})$$

In reality the masses of the black holes were $36 M_\odot$ and $29 M_\odot$,
where M_\odot is the mass of Sun.

vii. (1.5 pts) As mentioned previously the maximal strain is
when the black hole's orbital radius is R_s , reading from the
graph we get that the strain is $h_0 \approx 0.9 \times 10^{-21}$. (0.4 pts)

Then, using the result of question iv,

$$h_0 = \frac{G^2 M^2}{8\sqrt{\pi}c^4 LR_s}; \quad (0.4 \text{ pts})$$

Substituting R_s we obtain

$$h_0 = \frac{G^2 M^2}{8\sqrt{\pi}c^4 L} \frac{c^2}{2GM} = \frac{GM}{16\sqrt{\pi}c^2 L} \quad (0.3 \text{ pts})$$

The distance to the black hole is

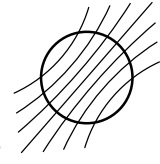
$$L = \frac{GM}{16\sqrt{\pi}c^2 h_0}; \quad (0.2 \text{ pts})$$

numerically

$$L = 4.21 \times 10^{24} \text{ m}. \quad (0.2 \text{ pts})$$

This can be also expressed in megaparsecs, $L = 136$ Mpc. In
reality, the distance was $L = 410 \text{ Mpc} \pm 170 \text{ Mpc}$.

PROBLEM 3



Problem T3. Magnetars (11 points)

i. (1.5 pts) If we change the frog's height by Δh , the change in potential energy needs to be smaller than the change in magnetic energy. (0.2 pts)

Note that for every point in frog, the change in magnetic energy is the same, thus we can express it as

$$\Delta E = -V \frac{\Delta(B^2)\chi}{2\mu_0} = V \frac{B_0^2 \chi \Delta h}{2h_0 \mu_0} \quad (0.6 \text{ pts})$$

The change in potential energy is

$$\Delta \Pi = V \rho g \Delta h$$

Then

$$\Delta E + \Delta \Pi < 0 \quad (0.3 \text{ pts})$$

$$V \frac{B_0^2 \chi \Delta h}{2h_0 \mu_0} + V \rho g \Delta h < 0 \quad (0.2 \text{ pts})$$

This means that

$$B_0 > \sqrt{-\frac{2h_0 \mu_0 \rho g}{\chi}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

and numerically

$$B_0 = 5.32 \text{ T.}$$

(0.1 pts)

ii. (1 pt) Let us observe a piece of the star with a volume V_0 before the collapse and volume V_1 after the collapse. The mass before and after are same. This means that

$$V_0 \rho_s = V_1 \rho_n$$

(0.1 pts)

The radius of the star scales as $V^{1/3}$,

(0.1 pts)

and the cross-sectional area as $V^{2/3}$.

(0.1 pts)

The total magnetic field through the volume is also the same before and after the collapse:

$$B_s V_0^{2/3} = B_n V_1^{2/3}$$

(0.4 pts)

Now we can express B_n

$$B_n = B_s \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{2/3} = B_s \left(\frac{\rho_n}{\rho_s} \right)^{2/3}$$

(0.2 pts)

and numerically

$$B_n = 5.0 \times 10^5 \text{ T}$$

(0.1 pts)

iii. (1 pt) During the collapse there is no torque on the star, this means that the angular momentum remains constant.

Thus

$$\frac{2}{5} M R_s^2 \omega_s = \frac{2}{5} M R_n^2 \omega_n \quad (0.6 \text{ pts})$$

Recall that R_s is inversely proportional to $\rho_s^{1/3}$. (0.2 pts)

Now we can express ω_n

$$\omega_n = \omega_s \frac{R_s^2}{R_n^2} = \omega_s \left(\frac{\rho_n}{\rho_s} \right)^{2/3} \quad (0.2 \text{ pts})$$

iv. (1.5 pts) After time t , the neutron star has turned by an angle $\beta = \omega_n t$. (0.2 pts)

The magnetic fields pass any radial line from the centre of the neutron star on average $N = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\omega_n t}{2\pi}$ times. (0.3 pts)

The total magnetic flux entering the outer shell remains constant, and thus is always equal to $\Phi = 2\pi R_0 B_0$, (0.3 pts)

where R_0 is the radius of the outer shell. This means that the flux through any radial line is ΦN . (0.4 pts)

Then

$$B R_0 = 2\pi R_0 B_0 N = R_0 B_0 \omega_n t$$

(0.2 pts)

And finally

$$B = B_0 \omega_n t$$

(0.1 pts)

v. (1 pt) We can find the gravitational energy by integrating: we imagine removing the material layers of thickness dx one by one, starting from the outermost one. The potential energy for a hollow sphere with a thickness dx in the gravity field of the matter inside it is

$$d\Pi = -G \frac{(4\pi x^2 dx \rho_n) \frac{4}{3} \pi x^3 \rho_n}{x} = -\frac{16\pi^2}{3} G \rho_n^2 x^4 dx$$

(0.2 pts)

Integrating from $x = 0$ to $x = R_n$ we get

$$\Pi = -\frac{16\pi^2}{15} G \rho_n^2 R_n^5 = -\frac{3}{5} \frac{GM_n^2}{R_n}$$

(0.3 pts)

A partial credit of 0.2 pts is given if integration is substituted by a simplifying product.

This potential energy is equal to the magnetic energy

$$\Pi = \frac{4}{3} \pi R^3 B_n^2 \frac{1}{2\mu_0} = \frac{3}{5} \frac{GM_n^2}{R_n}$$

(0.3 pts)

PROBLEM 3

Solving for B_n we get

$$B_n = 3 \frac{M}{R^2} \sqrt{\frac{\mu_0 G}{10\pi}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

and numerically

$$B_n = 1.18 \times 10^{14} \text{ T} \quad (0.1 \text{ pts})$$

vi. (1 pt) The electron orbit will get distorted when the Lorentz force becomes in the same order of magnitude as Coulomb force.

The Coulomb force is

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_H^2} \quad (0.2 \text{ pts})$$

On the other hand,

$$F_1 = \frac{m_e v^2}{R_H} \quad (0.2 \text{ pts})$$

We can express the velocity of electron

$$v = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_H m_e}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

Then the Lorentz force is

$$F_2 \approx evB \quad (0.2 \text{ pts})$$

Upon substituting v we obtain

$$F_2 = e^2 \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_H m_e}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

From the condition $F_1 \approx F_2$ we can express the magnetic field strength

$$B = \sqrt{\frac{m_e}{4\pi\epsilon_0 R_H^3}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

and numerically

$$B = 2.56 \times 10^5 \text{ T} \quad (0.1 \text{ pts})$$

vii. (2 pts) Perpendicularly to the magnetic field, the Lorentz force is much larger than the Coulomb force since the magnetic field B_n is much larger than the magnetic field found in the previous question. This means that in the perpendicular plane, the electrons move along a circular cyclotron orbit. **(0.2 pts)**

Then we can write

$$\frac{m_e v^2}{R_1} = evB_n, \quad (0.2 \text{ pts})$$

where $R_1 = d/2$ is the orbit's radius. Now we apply the uncer-

tainty principle. The uncertainty of the momentum is

$$\Delta p = 2m_e v \quad (0.3 \text{ pts})$$

and uncertainty of the coordinate

$$\Delta x = 2R_1 \quad (0.2 \text{ pts})$$

So we have

$$4m_e v R_1 \approx \hbar \quad (0.2 \text{ pts})$$

Substituting $m_e v = \frac{\hbar}{4R_1}$ to the first equation we get

$$\frac{\hbar}{R_1^2} = 4eB_n \quad (0.1 \text{ pts})$$

Then

$$R_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{4eB_n}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

The length of the cylinder will still remain in the order of magnitude of R_H because the Lorentz force doesn't act on the electron in that axis (parallel to the magnetic field). **(0.5 pts)**

Then the ratio of the length and diameter is approximately

$$\kappa = \frac{R_H}{R_1} = 2R_H \sqrt{\frac{eB_n}{\hbar}} \quad (0.1 \text{ pts})$$

and numerically

$$\kappa = 39 \approx 40. \quad (0.1 \text{ pts})$$

Note that if we were to make calculations for magnetars with $B = 1 \times 10^{11} \text{ T}$, the orbital electrons would be ultrarelativistic.

The 2nd Gulf Physics Olympiad — Theoretical Competition

Riyadh, Saudi Arabia — Sunday, April 2nd 2017

- The examination lasts for 5 hours. There are 3 problems worth in total 30 points. **Please note that the point values of the three theoretical problems are not equal.**
- **You must not open the envelope with the problems before the signal of the beginning of competition.**
- **You are not allowed to leave your working place without permission.** If you need any assistance (broken calculator, need to visit a restroom, etc), please raise your hand until an organizer arrives.
- Use only the front side of the sheets of paper.
- For each problem, there are **dedicated Solution Sheets** (see header for the number and pictogram). Write your solutions onto the appropriate Solution Sheets. For each Problem, the Solution Sheets are numbered; use the sheets according to the enumeration. **Always mark which Problem Part and Question you are dealing with.** Copy the final answers into the appropriate boxes of the **Answer Sheets**. There are also **Draft** papers; use these for writing things which you don't want to be graded. If you have written something that you don't want to be graded onto the Solution Sheets (such as initial and incorrect solutions), cross these out.
- If you need more paper for a certain problem, please raise your hand and tell an organizer the problem number; you are given two Solution sheets (you can do this more than once).
- **You should use as little text as possible:** try to explain your solution mainly with equations, numbers, symbols and diagrams. Though in some places textual explanation may be unavoidable.
- **After the signal signifying the end of examination you must stop writing immediately.** Put all the papers into the envelope at your desk. **You are not allowed to take any sheet of paper out of the room.** If you have finished solving before the final sound signal, please raise your hand.

Problem T1. Main sequence stars (11 points)

In all your subsequent calculations you may use the following physical constants and their numerical values.

Stefan-Boltzmann constant $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$

(Note that σT^4 gives the black body thermal radiation power per unit area at temperature T .)

Boltzmann constant $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

The rest mass of a proton $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Rest energy of a proton $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$,

where $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$.

Rest energy of a helium nucleus $m_{\text{He}} c^2 = 3727 \text{ MeV}$.

Rest energy of an electron and positron $m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$.

Speed of light $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$,

Universal gas constant $R_g = 8.31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Avogadro's number $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Part A. Lifetime of Sun (3 points)

For this Part, the following values can be also used.

The mass of Sun $M_{\odot} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

The radius of Sun $R_{\odot} = 7 \times 10^8 \text{ m}$.

Surface temperature of Sun $T_{\odot} = 6 \times 10^3 \text{ K}$.

i. (0.7 pts) The Sun emits thermal radiation as a perfectly black body. Determine the total radiation power of the Sun (in watts).

ii. (0.5 pts) The Sun maintains its temperature owing to the fusion reaction, the net effect of which can be written as $4p^+ \rightarrow {}^4\text{He}^{2+} + 2e^+ + 2\nu_e$, where p^+ denotes a proton, ${}^4\text{He}^{2+}$ — a helium nucleus, e^+ — a positron, and ν_e — an electron neutrino of negligible rest energy. Show that the energy released by such a fusion of four protons is $W_0 = 24 \text{ MeV}$.

iii. (0.5 pts) Antimatter cannot co-exist with matter: upon meeting, a positron and an electron disappear by producing two photons. How much energy per each fusion of four protons into a helium nucleus must leave Sun (carried away by photons and neutrinos) in order to keep it at a thermal equilibrium?

iv. (1.3 pts) Assuming that only the central part of the Sun (the Sun's nucleus) which makes $\frac{1}{8}$ of the total mass of the Sun is hot enough for fusion reaction to take place, and neglecting the energy carried away by neutrinos, estimate the total lifetime of the Sun. Note that there is no convection in the central parts of the Sun, and therefore the particles inside the Sun's nucleus remain trapped therein. Based on your result, comment on the current age of Sun, $\tau_{\odot} = 5 \times 10^9 \text{ y}$.

Part B. Mass-luminosity relationship of stars (4.5 points)

Inside the nuclei of the so-called main sequence stars (such as our Sun), the fusion reaction takes place in a stable regime: if fluctuations were to increase the reaction rate slightly, the increased thermal output would lead to an increase of the pres-

sure, to a thermal expansion of the fusion plasma, and as a result, to a decrease of the reaction rate. The reaction rate grows very rapidly with temperature and because of that, even if the reaction rates in different stars of different masses may differ considerably, the interior temperatures remain fairly similar. In what follows, you may assume that **the temperature of the nuclei of stars is independent of the stellar mass and equal to**

$$T_c = 1.8 \times 10^6 \text{ K};$$

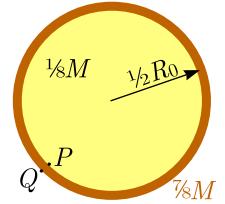
this approximation holds particularly well for stars larger than Sun.

In order to make our next calculations mathematically easier, we make the following additional approximations.

(a) The mass of the stellar core is $\frac{M}{8}$ and its radius is $\frac{R_0}{2}$, where M is the total mass of the star and R_0 — the radius of the star.

(b) The mass density ρ_c , pressure p_c , and temperature T_c inside the stellar core **can be approximately taken to be constant throughout its volume**.

(c) For tasks i–iv, we assume also that all the mass $\frac{7}{8}M$ of the outer layers of the star is concentrated into a very narrow spherical layer of radius $\frac{R_0}{2}$ around the core, see figure. In reality, this is certainly not true — the layer is not narrow. However, this approximation will have only a minor effect on the expression for the pressure (in task iv).



i. (0.4 pts) Express the free fall acceleration immediately above the narrow spherical layer (point Q in figure) in terms of M and R_0 .

ii. (0.4 pts) Express the free fall acceleration immediately beneath the narrow spherical layer (point P in figure).

iii. (0.4 pts) Express the gravity force acting on a small piece of the narrow spherical layer in terms of its surface area A , M and R_0 .

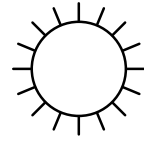
iv. (0.4 pts) Express the pressure p_c in terms of the radius R_0 and mass M of the star; (we overestimate it only by a factor which is less than two).

v. (1 pt) Derive another expression for the pressure p_c , this time in terms of R_0 , M , and the core temperature T_c . Assume that the nucleus of a star is made of a fully ionised hydrogen, i.e. there are free protons and free electrons, **both of which** can be described as an ideal gas.

vi. (0.4 pts) Based on your previous results, express the radius R_0 of a star in terms of its mass M and temperature T_c .

vii. (1.5 pts) The radiative power of a star is limited by at which rate the produced heat can travel through the outer layers of the star and reach the surface. The heat conductivity κ is defined as the proportionality coefficient between the heat flux

PROBLEM 1



density (thermal power per unit area) and temperature gradient $\frac{dT}{dr}$, where r is the distance from the centre of the star. For a plasma, the heat conductivity is inversely proportional to its density, $\kappa = f(T)/\rho$. Assume simplifyingly that κ is constant throughout the bulk of a star, up to the near-surface regions at $r = R_0$ where the temperature $T \ll T_c$, and is equal to $\kappa = f(T_c)/\rho_c$. Show that the total radiative power P of a star is proportional to M^γ , and find the exponent γ .

Part C. Proton-proton fusion chain (3.5 points)

We say that a constant is fundamental if it cannot be expressed in terms of other fundamental constants; for instance, the Stefan-Boltzmann constant can be expressed in terms of k_B , speed of light c , and Planck's constant \hbar . However, majority of the fundamental constants are created artificially by physicists due to a non-fundamental way of choosing the units. For instance, SI system of units needs electrostatic constant k_e , but for Gauss system of units, charge units are such that $k_e = 1$. So, majority of the "fundamental" constants are not really that fundamental, and depend on our (essentially arbitrary) choice of units. However, there are also dimensionless combinations of physical constants, which can be considered as the parameters of our Universe, and which define the way in which matter and fields evolve.

i. (1.5 pts) Find a dimensionless combination α^{-1} and calculate its value using the following subset of fundamental constants (it may happen that only few constants will enter the expression for α^{-1}):

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s},$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s},$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C},$$

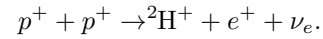
$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}.$$

Note that any power of α is also dimensionless; you are asked to find the simplest combination of constants which yields $\alpha^{-1} > 1$.

Hint: before applying dimensional analysis, all units need to

be expressed using the base units (m, s, A, K, kg, mol).

ii. (1 pt) The first and limiting step in the fusion of four protons into a helium atom inside a star of sub-solar mass is the fusion of two protons,



This process is obstructed, however, by a coulomb repulsion of two protons. You may assume that until the distance between the centres of two protons remains larger than the proton radius $r_p = 0.85 \times 10^{-15} \text{ m}$, there is only a Coulomb force; at distances smaller than r_p , an attractive strong force steps into play and dominates over the Coulomb force. Estimate the temperature T' required for the fusion of two protons if there were no quantum-mechanical effects. Compare this result with the value of $T_c \approx 1.8 \times 10^6 \text{ K}$.

iii. (1 pt) What enables the fusion of stellar hydrogen is the quantum-mechanical tunnel effect. With this task, you'll learn that the fusion reaction rate depends on the dimensionless parameter α , thus we can say that the parameter α defines the production rate of heavier nuclei in our Universe. (It appears that in a slightly different Universe with a slightly different value of α , no carbon nuclei necessary for the existence of life would have been produced¹.)

It appears that a particle can tunnel through an energy barrier (a region in space where the potential energy $\Pi(r)$ is larger than the total energy W) with probability

$$p \approx \exp\left\{-2\hbar^{-1} \int \sqrt{2m[\Pi(r) - W]} dr\right\},$$

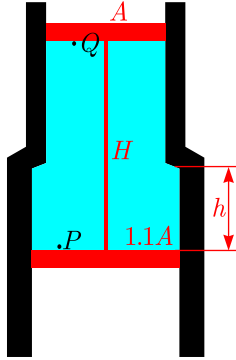
where the integral is to be taken over the range at which $\Pi(r) > W$. Express the tunnelling probability for the proton-proton fusion reaction for head-on collision of two counter-moving protons of speed v in terms of α , v and c . You may assume that the proton radius r_p is much smaller than the radius r_* at which the proton "dives into the tunnel" [$\Pi(r_*) = W$], and make use of the equality $\int_0^a \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{a}$.

¹J. Barrow and F. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Oxford, (1988)



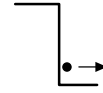
Problem T2. Water tube (8 points)

Consider a tube which is obtained when two metallic cylinders are welded together as shown in the figure. Upper cylinder has internal cross-sectional area $A = 10 \text{ cm}^2$, and the lower one — $1.1A = 11 \text{ cm}^2$. Two pistons are connected with a narrow (rigid but light) steel bar of length $H = 30 \text{ cm}$; the distance from the lower piston to the welding area is $h = 10 \text{ cm}$. The space between the pistons is filled with water of density $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ and temperature $T = 20^\circ\text{C}$. The mass of each of the pistons $\frac{m}{2} = 50 \text{ g}$ (neglect the mass of the rod connecting them) free fall acceleration $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ and the atmospheric pressure $p_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$. The tube stands vertically on a solid horizontal surface; the pistons can move freely up and down, friction force can be neglected. The distance between the bottom of the lower piston and the horizontal surface is more than 20 cm .



- i. (0.5 pts) Let p_P denote the pressure at a point P at the bottom of the water column, and p_Q — at a point Q at the bottom. Find $p_P - p_Q$.
- ii. (1.5 pts) Consider the two pistons, steel bar, and water column as a single compound body. Make a sketch and mark on it all the forces acting on this compound body by arrows (denote them by letters — \vec{F}_1, \vec{F}_2 , etc.). Determine the values of all these forces.
- iii. (1.2 pts) Determine the values of p_P and p_Q .
- iv. (0.8 pts) Determine the tension force T in the steel bar.
- v. (1 pt) Now, the whole system is slowly raised to a height $L = 25 \text{ cm}$ (this is the distance between the horizontal surface and the bottom edge of the tube), and released. The system falls due to gravity, hits the surface (assume the impact to be plastic, i.e. the kinetic energy of the metallic tube is converted into heat), remains standing vertically on the horizontal surface for a brief period of time τ , and jumps up into air. Why does it jump? Provide a qualitative explanation.
- vi. (3 pts) Find the duration τ during which the tube remains standing on the surface (after falling and before jumping).

PROBLEM 3



Problem T3. Accelerating shock wave (11 points)

In interstellar space, shock waves can accelerate charged particles to very high energies. We shall use an idealized model of a shock wave, and assume that it is a potential barrier of a constant height $-V_0$ which moves with a constant velocity w along the x -axis:

$$\begin{aligned} V(x, y, z, t) &= -V_0 & \text{if } x < wt; \\ V(x, y, z, t) &= 0 & \text{if } x > wt. \end{aligned}$$

In the frame where the shock wave is at rest, the energy of an electron is conserved. This means that as long as the kinetic energy of an electron of mass m and charge $-e$ moving towards the shock wave is insufficient ($\frac{1}{2}mu^2 < eV_0$, where u denotes the speed with which the electron is approaching the shock wave), it is reflected back from the shock wave **in the same way as an elastic ball bounces from a rigid wall. In what follows, unless otherwise mentioned, we assume that the electron is bounced elastically by the shock wave.** You can always use the parameters e , V_0 , m , B , and w to express your answers. Unless otherwise specified, the velocity of the electron is assumed to be non-relativistic.

- i. (1 pt)** Let the initial speed of the electron be $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, with $v_x < w$. Determine the velocity \vec{v}' (i.e. the components v'_x, v'_y, v'_z) of the electron after being hit by the shock wave.
- ii. (1 pt)** Now, there is also an homogeneous magnetic field of induction B , parallel to the z -axis. At the beginning, electron rests at the origin, and at $t = 0$ is hit by the shock wave. Sketch qualitatively the trajectory drawn by the electron; cover the time period from $t = 0$ until at least $t = \frac{\pi m}{Be}$.
- iii. (0.5 pts)** Find the curvature radius of the electron's trajectory immediately after its first collision with the shock wave.
- iv. (1 pt)** The electron undergoes soon, at $t = t_2$, a second impact; write down an equation for determining t_2 . Use numerical calculation to obtain an expression for t_2 .
- v. (0.5 pts)** Determine the average x -directional velocity v_x of the electron (averaged over the time interval τ between two subsequent collisions of the electron with the shock wave).
- vi. (1.5 pts)** As time goes on, the electron undergoes many collisions with the shock wave. Show that during its motion, $v_y + kx = \text{const}$, where k is a constant; express k in terms of e ,

m and B .

vii. (1 pt) From now on, let us consider the limit $t \gg \frac{2\pi m}{Be}$. Determine the average y -directional acceleration a_y of the electron (express it in terms of e , m and B or constant k introduced by task vi).

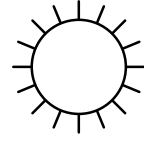
viii. (1 pt) It appears that at the limit $t \gg \frac{2\pi m}{Be}$, the time interval τ between subsequent collisions becomes shorter and shorter, hence we can assume that $\tau \ll \frac{2\pi m}{Be}$. This means that during a time interval between two subsequent collisions the velocity vector of the electron will change only by a very small angle and hence, its acceleration vector $\vec{a} = (a_x, a_y)$ can be assumed to be constant.

Let us use now *the shock wave's frame of reference*, and consider the electron's *phase diagram*, i.e. a diagram which describes the state of the electron as a point in the $x' - p'_x$ -plane, where the vertical axis $p'_x = m(v_x - w)$ corresponds to the x' -component of the momentum, and $x' = \int (v_x - w) dt$ denotes the distance from the shock wave. Depict qualitatively the electron's *phase trajectory*, i.e. the curve drawn in phase diagram during one period (between two subsequent collisions of the electron with the shock wave). Grades for this task are based purely on the shape of the curve.

ix. (1.5 pts) As time goes on, the width and height of the phase trajectory will change; however, it appears that the surface area of the region surrounded by the phase trajectory (referred to as the *adiabatic invariant*) will remain constant with a very good precision. For an initially resting electron, the adiabatic invariant appears to be approximately equal to $\frac{1.36(mw)^2}{Be}$. Determine the total kinetic energy W_f of the electron when it falls behind the shock wave; express it in terms of e , V_0 , and ε , which is defined as $\varepsilon \equiv \frac{2eV_0}{mw^2}$; assume that $\varepsilon \gg 1$.

x. (2 pts) *This final task is independent from the previous tasks.* Consider the propagation of a shock wave as described before, but under the absence of a magnetic field. A relativistic electron moves parallel to the front (in the laboratory frame, the perpendicular component of its velocity is strictly zero). Assuming that $mw^2 < eV_0$ and $w \ll c$ (with c denoting the speed of light), what should be the relativistic energy of the electron so that it could fall behind the shock wave? You can use any reasonable approximations.

PROBLEM 1



Problem T1. Main sequence stars (11 points)

Part A. Lifetime of Sun (3 points)

i. (0.7 pts) Since the Sun behaves as a perfectly black body it's total radiation power can be expressed from the Stefan-Boltzmann law as

$$P = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 = 4.5 \times 10^{26} \text{ W.}$$

(Formula 0.5, nuber 0.1, units 0.1 pts.)

ii. (0.5 pts) From the energy conservation law

$$4m_p c^2 = m_{He} c^2 + 2m_e c^2 + W_0$$

(0.2 pts). Then

$$W_0 = 4m_p c^2 - m_{He} c^2 - 2m_e c^2 = 24 \text{ MeV.}$$

(Formula 0.1, nuber 0.1, units 0.1 pts.)

iii. (0.5 pts) The fusion of four protons creates two positrons which in turn annihilate with two electrons meaning that an additional energy of $W_1 = 4m_e c^2 = 2.0 \text{ MeV}$ is released. Then the total energy released is $W_2 = W_0 + W_1 = 26 \text{ MeV}$. (Noticing that 4 particles annihilate per one He atom 0.2, formula 0.1, number 0.1, units 0.1 pts.)

iv. (1.3 pts) Over the course of Sun's lifetime the central part of the Sun will undergo fusion and release energy. The total number of reactions that will take place is

$$N = \frac{M_{\odot}}{8} \frac{1}{4m_p}$$

(0.3 pts). And thus, the total energy released is

$$E = NW_2 = \frac{1}{8} M_{\odot} \frac{W_2}{4m_p} = 1.56 \times 10^{44} \text{ J}$$

(0.3 pts). The total lifetime of the Sun can be approximated as

$$\tau = \frac{E}{P} = 1.1 \times 10^{10} \text{ y.}$$

(Formula 0.4, nuber 0.1, units 0.1 pts.)

The current age of the sun $\tau_{\odot} = 5 \times 10^9 \text{ y}$ is approximately two times smaller than the calculated theoretical age (0.1 pts).

Part B. Mass-luminosity relationship of stars (4.5 points)

i. (0.4 pts) Since all of the star's mass is below the point Q , the gravitational acceleration is the same as that of a point mass with a mass of M (0.2 pts). Then

$$a_Q = \frac{GM}{\left(\frac{R_0}{2}\right)^2} = \frac{4GM}{R_0^2}$$

(0.2 pts).

ii. (0.4 pts) By applying Gauss's law for gravity for a sphere surrounding the stellar core (0.2 pts).

$$4\pi \left(\frac{R_0}{2}\right)^2 a_P = 4\pi G \frac{M}{8} \quad (0.2 \text{ pts}).$$

(0.2 pts);

$$a_P = \frac{GM}{2R_0^2}$$

(0.2 pts).

iii. (0.4 pts) Since the gravitational acceleration decreases linearly along the thickness of the spherical layer, the average acceleration experienced by the spherical layer is $a_{\text{avg}} = \frac{a_P + a_Q}{2} = \frac{9GM}{4R_0^2}$ (0.1 pts). Furthermore, a piece of the small spherical layer with an area A has a mass of

$$m = \frac{A}{4\pi \left(\frac{R_0}{2}\right)^2} \frac{7M}{8} = \frac{7}{8\pi} \frac{MA}{R_0^2}$$

(0.1 pts). From the Newton's second law

$$F = ma_{\text{avg}} = \frac{63}{32\pi} \frac{GM^2 A}{R_0^4}$$

(0.2 pts).

iv. (0.4 pts) The previously calculated force acting on the small piece of the narrow spherical layer can also be expressed as

$$F = Ap_c = \frac{63}{32\pi} \frac{GM^2 A}{R_0^4}$$

(0.3 pts). Then

$$p_c = \frac{63}{32\pi} \frac{GM^2}{R_0^4}$$

(0.1 pts).

v. (1 pt) From the ideal gas law

$$p_c \frac{4\pi \left(\frac{R_0}{2}\right)^3}{3} = nR_g T_c$$

where n is the number of moles of protons and electrons inside the stellar core (0.6 pts; 0.4 if electrons are forgotten). Since the mass of an electron is negligible compared to the mass of a proton, $n = \frac{2M}{8m_p N_a} = \frac{M}{4m_p N_a}$ (0.3 pts). Then

$$p_c \frac{\pi R_0^3}{6} = \frac{MR_g T_c}{4m_p N_a} = \frac{Mk_B T_c}{4m_p}$$

and

$$p_c = \frac{3}{2\pi} \frac{Mk_B T_c}{R_0^3 m_p}$$

(0.1 pts).

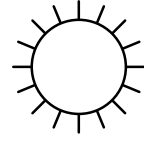
vi. (0.4 pts) Combing both expressions for p_c , one gets

$$\frac{63}{32\pi} \frac{GM^2}{R_0^4} = \frac{3}{2\pi} \frac{Mk_B T_c}{R_0^3 m_p}$$

(0.2 pts).

$$R_0 = \frac{21}{16} \frac{GMm_p}{k_B T_c}$$

PROBLEM 1



vii. (1.5 pts) Writing out the energy balance for a spherical shell with a radius of x and thickness dx concentric to the star

$$-4\pi x^2 \frac{dT}{dx} \kappa = P$$

(0.4 pts) and rearranging the terms, one gets

$$-4\pi \kappa dx T = P \frac{dx}{x^2}$$

(0.2 pts). Integrating from $x = \frac{R_0}{2}$ to $x = R_0$ yields

$$\begin{aligned} -4\pi \kappa \int_{T_c}^{T(R_0)} dT &= P \int_{\frac{R_0}{2}}^{R_0} \frac{dx}{x^2} \\ -4\pi \kappa (T(R_0) - T_c) &= -P \left(\frac{1}{R_0} - \frac{2}{R_0} \right) \\ 4\pi \kappa T_c &= \frac{P}{R_0} \end{aligned}$$

(0.2 pts). Then

$$P = 4\pi \kappa T_c R_0$$

(0.3 pts). When similar expression is obtained without integration (leading to a wrong factor), only 0.2 for integration is lost.

Substituting $\kappa = \frac{f(T_c)}{\rho_c}$, $\rho_c = \frac{3M}{4\pi R_0^3}$ and $R_0 = \frac{21}{16} \frac{GMm_p}{k_B T_c}$, we ultimately end up with

$$P = \left(\frac{21}{8} \frac{Gm_p}{k_B} \right)^4 \frac{\pi^2 T_c^3 f(T_c)}{3} M^3$$

(0.3 pts). Thus $\gamma = 3$ (0.1 pts).

Part C. Proton-proton fusion chain (3.5 points)

i. (1.5 pts) First, we must convert the units to base units:

$$[c] = \text{m/s},$$

$$[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

$$[k_B] = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (0.1 \text{ pts}),$$

$$[N_A] = \text{mol}^{-1},$$

$$[\hbar] = \text{m}^2 \cdot \text{kg/s} \quad (0.1 \text{ pts}),$$

$$[e] = \text{C},$$

$$[k_e] = \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{C}^{-2} \text{s}^{-2} \quad (0.1 \text{ pts}).$$

Let $\alpha = [c]^\beta [G]^\gamma [k_B]^\delta [N_A]^\epsilon [\hbar]^\mu [e]^\phi [k_e]^\omega$. Then we can create an equation for each unit:

$$\text{m: } \beta + 3\gamma + 2\delta + 2\mu + 3\omega = 0$$

$$\text{s: } -\beta - 2\gamma - 2\delta - \mu - 2\omega = 0$$

$$\text{kg: } -\gamma + \delta + \mu + \omega = 0$$

$$\text{K: } -\delta = 0$$

$$\text{mol: } -\epsilon = 0$$

C: $\phi - 2\omega = 0$.

(0.1 pts for each equation.) After solving the system of equations and setting $\omega = 1$, we get $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0$, $\mu = -1$, $\phi = 2$, and $\omega = 1$ (apart from δ and ϵ , 0.1 pts for each value). Thus

$$\alpha = \frac{k_e e^2}{c \hbar} = 7.3 \times 10^{-3}.$$

(0.1 pts for the numerical value.)

ii. (1 pt) Let the distance to the centre of mass for both protons be x . Then the force acting on one of the protons is $F(x) = \frac{k_e e^2}{4x^2}$ and thus the potential energy is

$$\Pi = \int_{\infty}^x F(x) dx = \frac{k_e e^2}{4} \int_{\infty}^x \frac{dx}{x^2} = \frac{k_e e^2}{4x}.$$

(0.3 pts out which 0.1 goes for correctly treating the distance to the centre of mass and distance between the protons.) By applying the energy conservation law at $x = \frac{r_p}{2}$ and $x = \infty$, we get

$$\frac{k_e e^2}{2r_p} = \frac{m_p v^2}{2}$$

(0.2 pts). Furthermore

$$\frac{m_p v^2}{2} = \frac{3k_B T'}{2}$$

(0.3 pts). T' can be expressed as

$$T' = \frac{k_e e^2}{3k_B r_p} = 6.5 \times 10^9 \text{ K}$$

(0.1 pts for formula). This is around $\frac{T'}{T_c} = 3600$ times larger than the actual temperature of the stellar core (0.1 pts).

iii. (1 pt) The total energy of a proton moving at speed v is $W = \frac{m_p v^2}{2}$ and the potential energy, as expressed in the last sub-task, is $\Pi(r) = \frac{k_e e^2}{2r} = \frac{\alpha c \hbar}{2r}$. The moment at which the proton "dives into the tunnel" happens when $W = \Pi(r) = \Pi(r_*) = \frac{\alpha c \hbar}{2r_*}$ (0.3 pts). Thus $r_* = \frac{\alpha c \hbar}{m_p v^2}$ (0.1 pts). Then the probability of the tunnelling taking place is

$$p \approx \exp \left[-2\hbar^{-1} \int_0^{r_*} \sqrt{m_p \alpha c \hbar \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_*} \right)} dr \right] =$$

(0.3 pts)

$$= \exp \left(-2\hbar^{-1} \sqrt{m_p \alpha c \hbar} \frac{\pi \sqrt{r_*}}{2} \right) = \exp \left(-\frac{\pi \alpha c}{v} \right)$$

(0.3 pts).

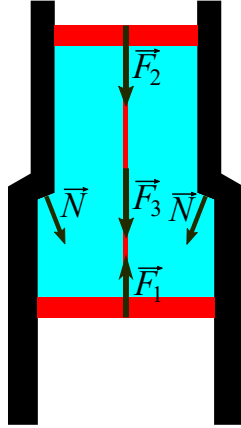
PROBLEM 2



Problem T2. Water tube (8 points)

i. (0.5 pts) There is a water column of height H between points P and Q creating an additional pressure of $p_P - p_Q = \rho g H = 3000 \text{ Pa}$. (Formula 0.3 pts, value 0.1 pts, units 0.1 pts.)

ii. (1.5 pts) The external forces acting on the system are sketched on the figure to the right. $F_2 = A p_0 = 100 \text{ N}$ (formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts) and $F_1 = 1.1 A p_0 = 110 \text{ N}$ (formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts) is the atmospheric pressure acting on the pistons. $F_3 = (M + m)g = 4.1 \text{ N}$ (formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts) is the gravitational force acting on the water-piston system, where $M = (H + 0.1h)A\rho = 0.31 \text{ kg}$ (formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts) is the mass of the water column. N is the total normal force exerted by the metal cylinder. There is no horizontal component for the normal force since it cancels out due to symmetry. N can be expressed from the Newton's 2nd law applied on the vertical axis



$$N + F_2 + F_3 - F_1 = 0$$

$$N + A p_0 + (M + m)g - 1.1 A p_0 = 0$$

$$N = 0.1 A p_0 - (M + m)g = 0.1 A p_0 - ((H + 0.1h)A\rho + m)g = 5.9 \text{ N}$$

(Formula 0.2 pts, value with units 0.1 pts.) Each correctly shown force in the sketch: 0.1 pts (0.4 pts overall).

iii. (1.2 pts) Notice that $N = 0.1 A p_1$ (0.6 pts), where

$$p_1 = 10N/A = 59 \text{ kPa}$$

(formula 0.2 pts) is the pressure at the joint of the two tubes. Therefore,

$$p_Q = p_1 - \rho g(H - h) = 57 \text{ kPa}$$

(Formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts.) and

$$p_P = p_1 + \rho g h = 60 \text{ kPa}$$

(Formula 0.1 pts, value with units 0.1 pts.)

Alternatively, applying the Newton's law on the vertical axis for the piston, one gets

$$A p_0 - A p_Q + mg + 1.1 A p_P - 1.1 A p_0 = 0$$

(0.3 pts),

$$-0.1 A p_0 + mg - A p_Q + 1.1 A (p_Q + \rho g H) = 0$$

(0.3 pts),

$$p_Q = p_0 - 11 \rho g H - 10 \frac{mg}{A} = 57 \text{ kPa}$$

(formula 0.2 pts, value with units 0.1 pts).

$$p_P = p_Q + \rho g H = p_0 - 10 \rho g H - 10 \frac{mg}{A} = 60 \text{ kPa}$$

(formula 0.2 pts, value with units 0.1 pts).

iv. (0.8 pts) Newton's 2nd law on the vertical axis for the top piston can be written out as

$$\frac{mg}{2} + A p_0 - A p_Q + T = 0$$

(0.4 pts).

$$\begin{aligned} T &= A(p_Q - p_0) - \frac{m}{2}g = -A \left(11 \rho g H + 10 \frac{mg}{A} \right) - \frac{mg}{2} = \\ &= -11 \rho g H A - \frac{21}{2} mg = -43.5 \text{ N} \end{aligned}$$

The negative sign of the tension force means that the steel bar is being compressed, not stretched. (Formula 0.2 pts, value with units 0.1 pts, sign or direction of T 0.1 pts.)

v. (1 pt) During the impact, the metallic tube comes to rest but the two pistons keep moving downwards because the pistons and the tube aren't strongly connected (0.3 pts). As a result, the volume between the two pistons increases (since the area of the bottom piston is larger than the top piston) and vacuum is created (0.3 pts). This causes the atmospheric pressure to try to reverse the change and push the pistons upwards (0.2 pts). Because no energy is lost in the water-piston system (for simplicity we assume the friction between the tube and water / pistons to be negligible), after the pistons have returned to their initial position, their speed will be of equal magnitude and of opposite sign, pointing upwards, which in turn makes the tube jump (0.2 pts).

vi. (3 pts) Neglecting the pressure of water vapors and of the water column of 20 cm, the pressure between the pistons is zero, hence the net force acting on the system "water + pistons" is

$$F = -0.1 A p_0 + (m + M)g = 5.9 \text{ N}$$

(1.3 pt). Because the force is constant throughout the whole process, the change of momentum for the water-piston system can be expressed as

$$(M + m)(-v) - (M + m)v = F \tau \Rightarrow$$

(1.3 pt)

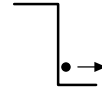
$$2v = \left(\frac{0.1 A p_0}{M + m} - g \right) \tau \Rightarrow$$

$$\tau = 20 \frac{(M + m)v}{A p_0 - 10(m + M)g}$$

where $v = \sqrt{2gL}$ is the speed of the tube when it reaches the ground. Thus

$$\tau = 20 \frac{M + m}{A p_0 - 10(m + M)g} \sqrt{2gL} = 0.31 \text{ s}$$

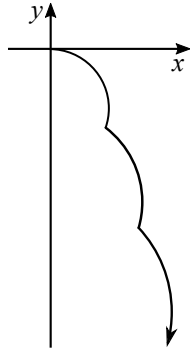
(Formula 0.2 pts, value 0.1 pts, units T 0.1 pts.)



Problem T3. Accelerating shock wave (11 points)

i. (1 pt) In the reference frame of the shock wave, the electron's initial velocity is $\vec{v}_1 = (v_x - w, v_y, v_z)$ (0.3 pts). After deflecting against the shock wave, the horizontal component of the velocity gets flipped (0.2 pts). Thus, the electron's velocity in the moving frame of reference, after deflecting against the shock wave, is $\vec{v}_2 = (w - v_x, v_y, v_z)$ (0.1 pts). Moving back into the laboratory frame of reference, the final velocity is $\vec{v}' = (2w - v_x, v_y, v_z)$ (0.2 pts for x component, 0.1 both for x and y components).

ii. (1 pt) After being hit by the shock wave, the electron starts moving with speed $v = 2w$. Due to the magnetic field, it moves along a circular trajectory, and at the initial moment of time, the trajectory is perpendicular to the front. Additionally, the electron periodically undergoes collisions against the shock wave, and the x -coordinates of the collision points grow in time. This is enough to draw an approximate sketch of the electron's trajectory.



Grading: trajectory is made from circular segments (0.3 pts) which are connected at the reflection points so that instantaneous change of direction is clearly seen (0.2 pts). 0.2 pts if the trajectory starts parallel to the x -axis, 0.1 pts if the direction of motion is shown by arrow or described in another way; 0.2 pts if the reflection points advance in the same direction as the shock wave.

iii. (0.5 pts) The Lorentz force acting on the electron acts as a centripetal force

$$evB_0 = \frac{mv^2}{R}$$

(0.4 pts). Thus $R = \frac{mv}{eB_0} = \frac{2mw}{eB_0}$ (0.1 pts).

iv. (1 pt) Before the first collision, the electron's x -coordinate is $x_1(t) = R \sin(2\pi \frac{t}{T})$ (0.2 pts) and the shock wave's x -coordinate is $x_2(t) = wt$ (0.1 pts). The second impact happens when $x_1(t) = x_2(t)$ (0.2 pts). Thus

$$\frac{2mw}{eB_0} \sin\left(\frac{B_0 e}{m} t_2\right) = wt_2$$

$$\sin\left(\frac{B_0 e}{m} t_2\right) = \frac{1}{2} \frac{B_0 e}{m} t_2$$

(0.1 pts). Substituting $u = \frac{B_0 e}{m} t_2$, one gets

$$\sin(u) = \frac{u}{2}$$

(0.2 pts). This equation can be solved numerically to get $u = 1.895$ (0.1 pts). Thus $t_2 = 1.895 \frac{m}{B_0 e}$ (0.1 pts).

v. (0.5 pts) Every time a collision happens, the electron and the front are at the same place, with the same value of the

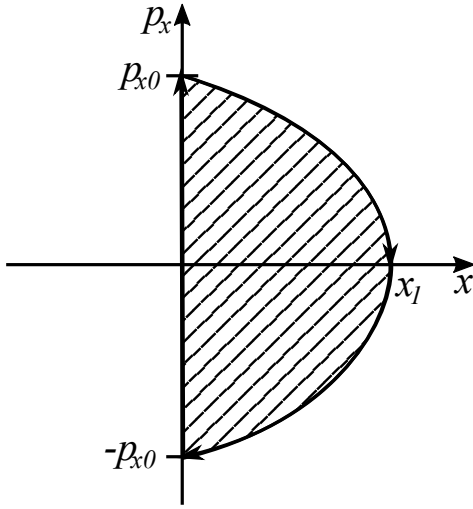
x -coordinate. This means that the electron's and shock wave's average velocities in the direction of the x -axis are the same. In other words, $v_x = w$ (0.5 pts).

vi. (1.5 pts) It is easier to find the value of k by taking a derivative from both sides of the equation as it gets rid of the constant. Then $\dot{v}_y + kv_x = 0$ (0.2 pts). The only forces acting on the electron are the Lorentz force and the repulsion forces between the electron and the shock wave (0.3 pts). Since the shock wave affects the electron only in the horizontal direction (0.2 pts), the acceleration's vertical component comes purely through the Lorentz's force (0.2 pts). This means that $m\ddot{y} = -ev_x B_0$ holds throughout the electron's motion (0.2 pts). In other words, $\dot{v}_y = -\frac{B_0 e}{m} v_x$. Plugging this to the conservation law, we get $-\frac{B_0 e}{m} v_x + kv_x = 0$ (0.3 pts). Thus $k = \frac{B_0 e}{m}$ (0.1 pts).

vii. (1 pt) By taking a derivative from the conservation law $v_y + \frac{B_0 e}{m} x = \text{const}$, we get $a_y + \frac{B_0 e}{m} v_x = 0$ (0.5 pts). Over the long run, the average x -directional moving speed of the electron is the same as that of the shock wave's. Thus $a_y + \frac{B_0 e}{m} w = 0$ (0.4 pts) and $a_y = -\frac{B_0 e}{m} w$ (0.1 pts).

viii. (1 pt) Over the course of one period, there is a constant acceleration a_x acting on the electron in the x -direction, both in the lab frame, and in the shock wave's frame; the behaviour is the same what would be if there were a free fall acceleration $g = a$. If we let x be the relative distance between the electron and the shock wave, and the initial x -directional momentum at $x = 0$ be p_{x0} , then the quantity $E = \frac{p_{x0}^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m} + ma_x x$ is conserved over the course of one period (energy conservation law) (0.2 pts). Thus $p_x = \sqrt{p_{x0}^2 - 2m^2 a_x x}$ (0.1 pts). On the phase diagram, this corresponds to a parabola whose axis of symmetry is at $p_x = 0$ (0.2 pts). Furthermore, at $x = 0$, the momentum of the electron gets flipped due to the collision against the shock wave, meaning that there is a straight line from $(0, -p_{x0})$ to $(0, p_{x0})$ (0.3 pts). This gives enough information to draw the phase diagram (correctly drawn figure 0.1 pts, arrow shown 0.1 pts).

PROBLEM 3



ix. (1.5 pts) The area under the phase diagram can be found by integrating $p_x(x)dx$ from $x_0 = 0$ to $x_1 = \frac{p_{x0}^2}{2m^2a_x}$ and multiplying the result by two (since the phase diagram is symmetrical about $p_x = 0$). Thus

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^{x_1} \sqrt{p_{x0}^2 - 2m^2a_x x} dx = 2p_{x0} \int_0^{x_1} \sqrt{1 - \frac{x}{x_1}} dx = \\
 &= \frac{4}{3} p_{x0} x_1 = \frac{2}{3} \frac{p_{x0}^3}{m^2 a_x} = \frac{2}{3} \frac{mv_0^3}{a_x}
 \end{aligned}$$

(0.3 pts). Due to the conservation of this quantity (we use its initial value taken from the problem text),

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} \frac{mv_0^3}{a_x} &= \frac{1.36(mw)^2}{B_0 e} \\
 a_x &= \frac{1}{2.04} \frac{v_0^3 B_0 e}{mw^2}
 \end{aligned}$$

(0.3 pts), where v_0 is the electron's speed at $x = 0$. The electron will fall behind the shock wave when $\frac{mv_0^2}{2} > eV_0$ or $v_0 > \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = w\sqrt{\epsilon}$ (0.2 pts). The horizontal acceleration comes from Lorentz force $a_x = \frac{B_0 e v_y}{m}$ (0.3 pts). Thus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2.04} \frac{B_0 e}{mw^2} w^3 \epsilon^{\frac{3}{2}} &= \frac{B_0 e v_y}{m} \\
 \frac{1}{2.04^2} w \epsilon^{\frac{3}{2}} &= v_y
 \end{aligned}$$

(0.2 pts).

$$\text{Since } v_y \gg v_x, W_f \approx \frac{mv_y^2}{2}$$

$$W_f = \frac{\epsilon^3}{2.04} \frac{mw^2}{2} = \frac{\epsilon^2}{2.04^2} eV_0$$

(0.2 pts).

x. (2 pts) In the reference frame of the shock wave, initially, the electron's x -directional and y -directional momenta are p_x and p_y respectively. In the limiting case, the electron's final x -directional momentum is 0. Since the shock wave acts only in the x direction, p_y will stay same throughout the motion. The Lorentz invariant of the 4-momentum, initially and after the electron has come to rest, can be written out as

$$E^2 = p_x^2 c^2 + p_y^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

(0.6 pts),

$$(E - eV_0)^2 = p_y^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

(0.6 pts). Subtracting one equation from the other, we get $2EeV_0 - e^2V_0^2 = p_x^2 c^2 = m_{\text{rel}}^2 c^2 w^2 = E^2 \frac{w^2}{c^2}$. Thus

$$E^2 \frac{w^2}{c^2} - 2EeV_0 + e^2V_0^2 = 0$$

(0.2 pts),

$$E = \frac{eV_0 c^2}{w^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \right);$$

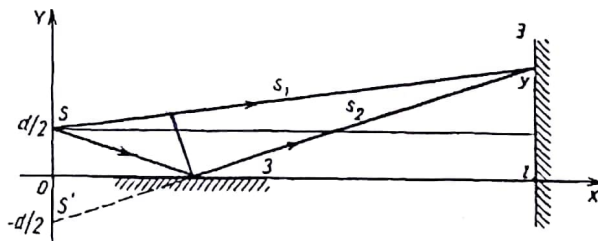
(0.2 pts) with minus sign we would obtain $p_y^2 c^2 = (E - eV_0)^2 - m_0^2 c^4 < (E - eV_0)^2 - e^2V_0^2 c^4/w^4 < 0$ which is not acceptable. Thus, we need to take the plus sign (0.2 pts):

$$E = \frac{eV_0 c^2}{w^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \right);$$

for $w \ll c$ we can approximate $E = \frac{2eV_0 c^2}{w^2}$ (0.1 pts). So, the electron will fall behind the shock wave if its relativistic energy $E \geq \frac{2eV_0 c^2}{w^2}$ (0.1 pts).

Контрольная работа 1

1. Частица движется в плоскости XOY по закону $x = a \sin \omega t$, $y = b(1 + \cos \omega t)$, где a, b, ω – положительные постоянные, $a > b$, а t – время. Определите: 1) вид траектории; 2) ускорение как функцию радиуса-вектора; 3) угол между векторами скорости и ускорения как функцию координат.
2. Однородный стержень круглого сечения радиусом R , массой m_2 и длиной l лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Шарик радиусом R и массой m_1 , двигаясь со скоростью v , перпендикулярной к стержню, упруго ударяется об его конец на расстоянии R от торца. Считая, что $R \ll l$, найдите: 1) угловую скорость вращения стержня, скорость его центра инерции и скорость шарика после удара; 2) зависимость доли переданной энергии от отношения $\alpha = m_2/m_1$.
3. Вязкость воздуха при 20°C составляет $1,8 \times 10^{-5}$ Па·с. Вычислить, какой наибольший диаметр d должны иметь взвешенные в воздухе шарики плотностью $\rho = 10^3$ кг/м³, чтобы скорость их падения не превышала $0,1$ м/с.
4. Один моль идеального одноатомного газа с известным значением теплоемкости C_V совершает процесс, при котором его энтропия S зависит от температуры T как $S = \alpha/T$, где α – постоянная. Температура газа изменилась от T_2 до T_1 . Найдите: 1) молярную теплоемкость газа как функцию T ; 2) количество теплоты, сообщенной газу; 3) работу, которую совершил газ.
5. Диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ . Определите напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии h от диска на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его геометрический центр.
6. Частица с удельным зарядом q/m движется во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях с напряженностью $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ и индукцией $\mathbf{B} = (0, B, 0)$.
7. Найдите: 1) зависимость координат частицы от времени $x(t), y(t), z(t)$; среднее значение проекции вектора скорости на ось Z за большой интервал времени. В начальный момент времени $t = 0$ положение частицы задается радиусом – вектором $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$, а начальная скорость равна $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.
8. В опыте Ллойда расстояние от источника до экрана равно l . При некотором положении источника на отрезке длиной s укладывается N_1 интерференционных полос, а после увеличения расстояния от источника до зеркала на Δh – N_2 полос. Вычислите длину световой волны.



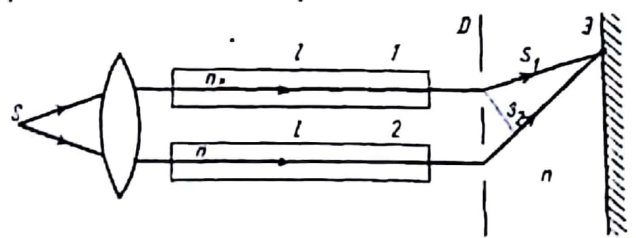
8. Найдите преломляющий угол призмы, который оказался равен углу наименьшего отклонения луча, прошедшего через эту призму.
9. На сколько вытягивается стержень длины l из металла плотности ρ и модулем Юнга E под влиянием собственного веса при его подвешивании за один конец? Ускорение свободного падения равно g .
10. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α начинает скользить небольшой брусок. Известно, что коэффициент трения бруска о наклонную плоскость зависит от пройденного пути s по закону $k = as$. Найдите время движения бруска до полной его остановки.

Контрольная работа 2

- + ① Материальная точка движется по окружности радиуса R со скоростью $v = v_0 \exp(-s/R)$, где s – пройденный путь, v_0 – положительная константа. Найдите: 1) зависимость пройденного пути от времени; 2) угол между векторами скорости и ускорения в произвольный момент времени; 3) величину ускорения как функцию скорости.
- + ② Однородная тонкая пластинка в форме равностороннего треугольника может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. В центр покоящейся пластинки по нормали к ней упруго ударяется шарик массой m . Какой должна быть масса пластинки, чтобы шарик после удара остановился?
- 3. Газ заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными цилиндрами радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Известно, что внешний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω , а внутренний удерживается неподвижным моментом сил M . Найдите коэффициент вязкости газа.
- + ④ В политропическом процессе сжатия одного моля идеального газа его объем уменьшили в β раз. При этом совершенная над газом работа $A' = 2\Delta U$, где ΔU – приращение его внутренней энергии. Найдите приращение энтропии газа в этом процессе.
- + ⑤ Бесконечно длинный круговой цилиндр радиусом R равномерно заряжен по объему с плотностью заряда ρ . Найдите напряженность и потенциал электростатического поля в точке, удаленной на расстоянии r от оси цилиндра.
- + ⑥ Электрон, ускоренный потенциалом U , пролетает поперечное магнитное поле с индукцией $B = (0, 0, B(x))$, где $B(x) = B_0 \sin \frac{\pi x}{a}$; a – протяженность области с полем. Найдите угол отклонения электрона от первоначального направления движения.



- + ⑦ Для измерения показателей преломления прозрачных веществ используется интерферометр: S – узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны λ ; 1 и 2 – две одинаковые трубки длиной l , наполненные воздухом; D – диафрагма с двумя щелями. При замене воздуха в трубке 1 некоторым газом интерференционная картина на экране Э сместилась вверх на N полос. Показатель преломления воздуха n . Определить показатель преломления газа.



- + ⑧ Изображение предмета получается с помощью вогнутого зеркала. При одном положении предмета увеличение равно $\beta_1 = -0,5$, а в положении, смещенном относительно первого на расстояние $l = 5$ см $-\beta_2 = -0,25$. Рассчитайте фокусное расстояние зеркала.
- 9. При замерзании вода производит давление. Найдите ее максимальную величину, если плотность льда $\rho = 0,917$ г/см³, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см³, модуль Юнга $E = 2,8 \times 10^6$ Н/см², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.
- + ⑩ На гладкой горизонтальной поверхности находится брусок массой m , к которому прикреплена пружина жесткости k . Затем свободный конец пружины перемещают с постоянной скоростью вдоль пружины. Через какой интервал времени необходимо остановить движущийся конец, чтобы после этого груз не совершал колебаний?

Контрольная работа 3

1. На небольшое тело массой m , лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила, зависящая от пройденного пути по закону $F(s) = F_0 \sqrt{1 + s^2/R^2}$, $\alpha = \arctan(s/R)$ – угол между вектором F и плоскостью, F_0, R – положительные постоянные; коэффициент трения равен k , ускорение свободного падения g . Определите скорость тела в момент отрыва от плоскости.

2. Материальная точка участвует одновременно в четырех колебаниях одного направления, происходящих по закону

$$x_k(t) = a \cos(\omega t + \frac{(k-1)\pi}{6}), \quad k = 1, \dots, 4 \quad \text{здесь } \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

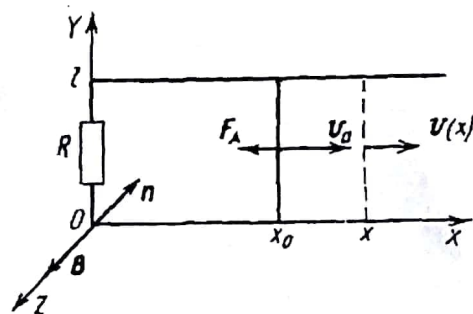
Найдите закон, описывающий результирующее колебание.

3. В цилиндрической центрифуге находится эмульсия, состоящая из частиц белка массой m и воды плотностью ρ_0 . Центрифуга вращается с угловой скоростью ω . Определите отношение числа частиц, находящихся на двух различных расстояниях r_1 и $r_2 > r_1$ от оси цилиндра. Плотность белка равна ρ , температура смеси равна T .

4. Один моль азота расширяется в пустоту от начального объема $V_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ м}^3$ до конечного $V_2 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ м}^3$. Найдите изменение температуры ΔT в этом процессе, если поправка Вае-дер-Ваальса равна $a = 1.35 \times 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}$.

5. На границе диэлектрика и проводника $|\sigma'/\sigma| = 1/2$, где σ' – поверхностная плотность связанного заряда на диэлектрике, σ – поверхностная плотность заряда на проводнике. Вычислить диэлектрическую проницаемость диэлектрика. $\epsilon = 8$

6. Стержень длиной l и массой m , сопротивление которого пренебрежимо мало, скользит без трения по двум длинным проводникам сечением S и удельным сопротивлением ρ каждый, расположенным на расстоянии l друг от друга. Проводники замкнуты сопротивлением R . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости контура. В момент времени $t = 0$ стержню сообщили начальную скорость v_0 в положительном направлении оси x . Пренебрегая самоиндукцией, найдите расстояние, пройденное стержнем до остановки, если в момент времени $t = 0$ координата стержня $x = x_0$.

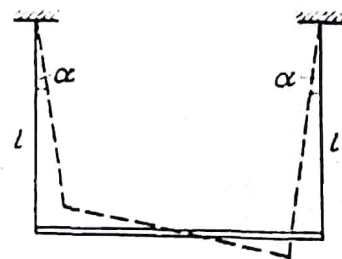


7. На тонкую пленку с показателем преломления $n = 1.33$ падает под углом $\alpha = 52^\circ$ параллельный пучок белого света. При какой толщине пленки отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в желтый цвет с длиной волны $\lambda = 600 \text{ нм}$? Считать, что световой вектор перпендикулярен к плоскости падения. 254 нм

8. Расстояние между экраном и источником света составляет $l = 90 \text{ см}$. Между ними располагается тонкая собирающая линза, которая дает четкое изображение предмета при двух положениях так, что поперечные размеры этих изображений отличаются в $n = 4$ раза. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Кабина лифта массы $m = 1000 \text{ кг}$ равномерно опускается со скоростью $v_0 = 1 \text{ м/с}$. Когда лифт опустился на расстояние $l = 10 \text{ м}$, барабан заклинило. Вычислить максимальную силу, действующую на трос из-за внезапной остановки лифта, если площадь поперечного сечения троса $S = 20 \text{ см}^2$, модуль Юнга $E = 2 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$. 64 кН

10. Тонкий однородный стержень, имеющий массу m , подвешен на двух одинаковых нитях длины $l = 90 \text{ см}$. Систему повернули вокруг вертикальной оси, проходящей через центр стержня так, что нити отклонились на угол $\alpha = 5^\circ$. Найдите: 1) период колебаний системы; 2) полную энергию системы.



$$2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}}$$

Контрольная работа 4

1. Гладкий стержень AB длиной l вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A . По стержню без трения может скользить муфта массой m . В начальный момент времени муфта начинает движение из точки A со скоростью v_0 . Найдите: 1) время, через которое муфта достигнет точки B ; 2) силу реакции стержня как функцию расстояния от точки A .

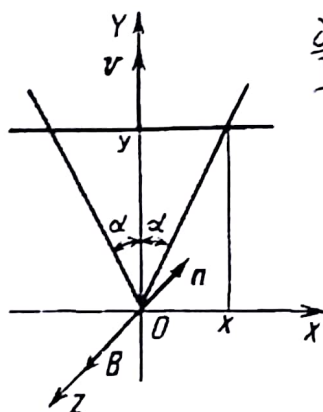
2. Материальная точка совершает вынужденные колебания под действием гармонической силы. Собственная частота колебаний системы равна ω_0 , а декремент затухания — δ . Найдите резонансные частоты смещения ω , скорости ω_v и ускорения ω_a . Найдите связь между этими частотами.

3. Найдите наиболее вероятную энергию поступательного движения молекул идеального газа. $u = \frac{3}{2}kT$

4. Капилляр имеет внутренний диаметр 0.5 мм. Его погружают вертикально в воду так, что над поверхностью выступает часть длиной $h = 25$ мм. Рассчитайте радиус кривизны мениска. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7,5 \times 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

5. Найти энергию электростатического поля внутри сферического конденсатора, заполненного изотропным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, изменяющейся по закону $\epsilon(r) = (1 + (R_1 R_2)^{-1} r^2)^{-1}$, где R_1, R_2 — радиусы внутренней и внешней обкладок соответственно, r — расстояние до центра конденсатора. Заряд внутренней обкладки равен q .

6. Прямой провод, единица длины которого имеет сопротивление ρ , изогнут под углом 2α . Перемычка из такого же провода перпендикулярна к биссектрисе этого угла и образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярной к его плоскости. Перемычка движется вверх так, что тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, постоянна и равна P . Найдите зависимость $y(t)$ высоты подъема перемычки от времени, если $y(0) = 0$.



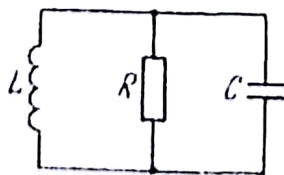
$$\frac{d}{dt} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{PP/4 + \sin^2(\alpha) / \cos^2(\alpha)}}{B} - \frac{2 \sin^2(\alpha)}{B}}$$

7. Оптическая система состоит из $N = 6$ одинаковых поляризаторов так, что плоскость пропускания каждого из последующих повернута на угол $\varphi = 30^\circ$ по отношению к плоскости пропускания предыдущего поляризатора. Какая часть падающего естественного света проходит через эту систему?

8. Ламбертовский источник яркостью L представляет собой бесконечную плоскость. Определите освещенность площадки, которая располагается параллельно данному источнику.

9. Цилиндрический сосуд высоты h погружен в воду на глубину h_0 . В дне сосуда площади S появилось маленькое отверстие площади σ . Определите время τ , через которое сосуд утонет.

10. Найдите частоту затухающих колебаний контура, показанного на рисунке, считая известными его параметры.



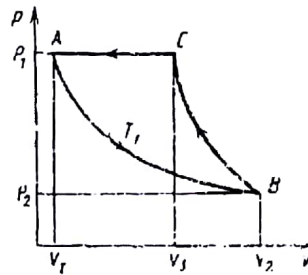
$$\pi \sqrt{LC}$$

Контрольная работа 5

1. В гладком сосуде, имеющем форму параболоида вращения, заданного уравнением $z = a(x^2 + y^2)$, $a > 0$ – постоянная. находится материальная точка массой m . С какой угловой скоростью нужно вращать сосуд вокруг вертикальной оси OZ , чтобы точка могла находиться на его стенке в состоянии равновесия.

2. Стоячая волна наблюдается в тонком стержне длиной l , один из торцов которого закреплен. Плотность вещества стержня ρ , модуль Юнга E . Найдите; 1) уравнение стоячей волны; 2) спектр собственных колебаний стоячей волны.

3. Газ массой m , находящийся при температуре T_1 , изотермически расширяется на участке AB так, что $\frac{p_1}{p_2} = 4$. Затем газ возвращается в исходное состояние сначала адиабатическим процессом BC , а затем изобарическим CA . Определите работу, совершенную газом в этом цикле, если показатель адиабаты газа равен γ , а его молярная масса – μ .



$$A = \frac{m}{\mu} T_1 \left(R \ln \frac{p_1}{p_2} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \right)$$

4. Вольфрамовая нить при температуре $T = 2000$ К испаряется в вакуум так, что в единицу времени с единицы поверхности теряет массу $\mu = 1,2 \times 10^{-13}$ г/(с · см²). Вычислите давление насыщенного пара вольфрама при данной температуре.

5. Эбонитовый шар радиусом R равномерно заряжен так, что поверхностная плотность заряда равна σ . Шар приводят во вращение вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Рассчитайте магнитную индукцию в центре шара. $B = \sigma \omega \sqrt{R/4}$

6. По жесткому непроводящему тонкому круговому кольцу массой m равномерно распределен заряд q . Кольцо может вращаться вокруг своего неподвижного центра. Вначале кольцо покоится, а магнитное поле равно нулю. Затем включается однородное магнитное поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости кольца. Найдите угловую скорость вращения кольца. $\omega = 2B$

7. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0.25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

8. Светильник имеет вид равномерно светящейся сферы радиусом $R = 6.0$ см и расположен на расстоянии $h = 3.0$ м от пола. Известно, что яркость светильника не зависит от направления и равна $L = 2.0 \times 10^4$ кд/м². Найдите освещенность пола в точке, расположенной непосредственно под светильником. $E = 24$ кг/м.

9. Цилиндрический сосуд радиуса R с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью ω . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда, так что при установившемся движении жидкости в центре начинает появляться дно сосуда.

10. Два шарика одинакового радиуса a изготовлены из металла и помещены в слабопроводящую однородную среду с удельным сопротивлением ρ . Найдите сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между ними значительно превышает a .

Контрольная работа 6

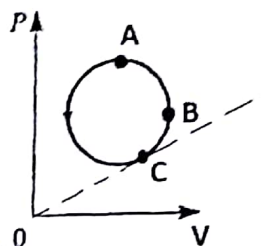
1. Через однородный сплошной цилиндр радиусом R и массой m переброшена легкая нить. К одному ее концу прикреплено тело массой m_1 , а на другой действует горизонтальная сила $F = m_1g(1 + \sqrt[3]{s/R})$, зависящая от пути s , пройденного точкой приложения этой силы. Скольжение нити и трение в оси цилиндра отсутствуют. Найдите зависимость угловой скорости вращения цилиндра от времени.
2. Неподвижный наблюдатель воспринимает звуковые колебания от двух камертонов, один из которых приближается, другой – с такой же скоростью удаляется. При этом наблюдатель слышит биения с частотой $\Delta\nu$. Найти скорость каждого камертона, если частота их колебаний равна ν_0 , а скорость звука в среде равна c .
3. Замкнутый цикл с идеальным газом состоит из двух изохор и двух адиабат так, что внутри цикла объем изменяется в $n = 10$ раз. Найдите КПД цикла, если газом является азот.
4. Рассчитайте давление насыщенного водяного пара при температуре $101,1^\circ\text{C}$.
5. По бесконечной полоске шириной a и пренебрежимо малой толщиной проходит ток I . Определите магнитную индукцию на расстоянии R от плоскости ленты на перпендикуляре, восстановленном к ее середине.
6. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородной слабо проводящей средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и удельной проводимостью σ . Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d . Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найдите величину напряженности магнитного поля в пространстве между обкладками конденсатора на расстоянии r от оси.
7. Человек стоит на краю бассейна глубиной h и видит лежащий на дне камень. Найдите расстояние от видимого изображения камня до поверхности воды, если луч зрения человека составляет с нормалью к поверхности воды угол θ .
8. Плоская световая волна, имеющая длину волны $\lambda = 0,55$ мкм, проходит через кювету с водой, в которой возбуждена стоячая ультразвуковая волна с частотой $\nu = 4,7$ МГц. При этом в фокальной плоскости объектива с фокусным расстоянием $f = 35$ см возникает дифракционный спектр с соседними максимумами, расположенными на расстоянии $\Delta x = 0,6$ мм. Рассчитайте скорость распространения ультразвука в воде.
9. Проволоку радиусом $r_1 = 1$ мм протягивают с постоянной скоростью $v_0 = 10$ см/с вдоль трубки радиуса $r_2 = 1$ см, которая заполнена жидкостью вязкости $\eta = 0,01$ Па. Определить силу трения f , приходящуюся на единицу длины проволоки. Определите распределение скорости течения вдоль радиуса трубки.
10. Участок цепи представляет собой параллельно включенный конденсатор емкости C и катушку с активным сопротивлением R и индуктивностью L . Найдите полное сопротивление (модуль импеданса) этого участка переменному току с частотой ω .

Экзамен №1

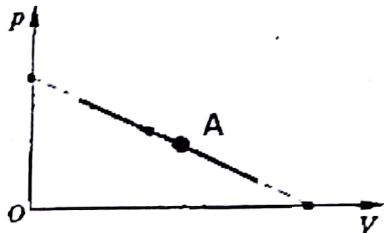
2013

[Э.р.т.]

1. а) Лодку подтягивают к берегу за трос, вытягивая его с постоянной скоростью v . Каково ускорение лодки в момент, когда трос составляет угол α с горизонтом? Высота берега h .
- б) Две лодки движутся на запад и север соответственно со скоростями 5 м/с. Относительная скорость ветра, измеренная на каждой из них не больше 4 м/с. Каков диапазон возможных значений величины и направления скорости ветра?
2. а) Каковы молярные теплоёмкости газа в моменты, обозначенные точками А и В на диаграмме циклического процесса, соответствующие максимальному давлению и максимальному объёму газа? А в точке С, лежащей на касательной к кругу и проходящей через начало координат? Газ идеальный трёхатомный.



- б) Известны параметры идеального одноатомного газа P_1, V_1 в точке А, соответствующей максимальной температуре в процессе. Каковы параметры газа P_2, V_2 в точке, в которой подвод теплоты сменяется отводом?



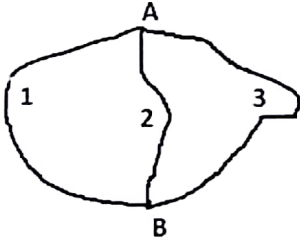
3. а) Пространство по одну сторону от проводящей плоскости заполнено средой с удельным сопротивлением ρ . В среде на расстоянии l от плоскости находится металлический шар радиуса $r \ll l$. Рассчитайте сопротивление среды между шаром и плоскостью.
- б) Имеется n идеально проводящих тел в вакууме. Известно, что при зарядах $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ их потенциалы равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$. Какая тепловая мощность будет выделяться в пространстве между ними, если его заполнить проводящей жидкостью с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ , а потенциалы тел поддерживать при прежних значениях?
4. а) Подвес математического маятника закреплен на подставке. Подставка скатывается вдоль шероховатой наклонной плоскости (коэффициент трения μ). Угол наклона плоскости $\alpha > \arctg \mu$. Определите период колебаний маятника, считая их малыми.
- б) По меридиану Земли перемещают с постоянной скоростью маятниковые часы с полюса на экватор за время $T=6$ ч. Затем их показания сравнивают с показанием контрольных часов, стоящих на полюсе. На сколько и в какую сторону они различаются?
5. а) Точечный источник света наблюдают через плоскопараллельную стеклянную пластину шириной h и показателем преломления n . Действительное расстояние от источника до пластины d . Каково кажущееся расстояние от пластины до источника? Какова кажущаяся толщина пластины? Ответы обосновать.
- б) Согласно принципу Гюйгенса, каждую точку фронта световой волны можно рассматривать как источник вторичных волн, а фронт волны в любой последующий момент времени тогда будет представлять собой огибающую фронтов вторичных волн. Выведите, пользуясь принципом Гюйгенса, законы отражения и преломления, и объясните явление полного внутреннего отражения.

1. Квадратная коробка с гладким дном содержит в себе N шариков массы m , лежащих на дне не касаясь друг друга. Коробка и шарики покоятся на горизонтальной поверхности. Коробку начинают двигать равномерно со скоростью v и, спустя некоторое время, резко останавливают.

- а) Чему будет равна средняя квадратичная скорость шариков? Ответ обосновать.
 б) Длина стороны коробки a . Какова будет средняя сила давления шариков на одну из сторон коробки?

2. При влажности воздуха 30% некоторое количество воды из сосуда испаряется за час. За какое время оно испарится при влажности 50%? Температура и сосуд те же.

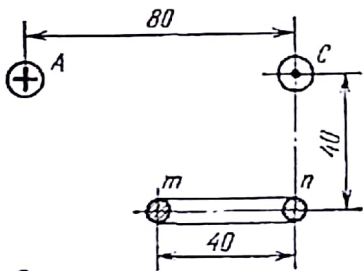
3. Три верёвки длинами $l_1 = \frac{\pi}{3}l_2$, l_2 и $l_3 = \frac{2\pi}{3}l_2$ скреплены концами и брошены в воду – её коэффициент поверхностного натяжения σ_1 . Затем внутрь них добавляют вещество, которое изменяет коэффициент поверхностного натяжения до σ_2 . Какова сила натяжения каждой верёвки?



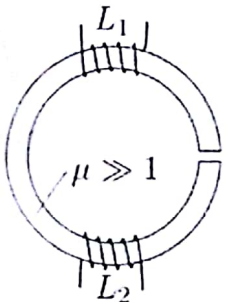
4. Два concentric rings with radii R and $R + \Delta R$ ($\Delta R \ll R$) carry charges: q inner and $-q$ outer. What is the potential of the field on the axis of the system at a distance z from the center of symmetry of the system?

5. In the vertices of a cube with side a are placed charges q and $-q$ so that in adjacent vertices are charges of opposite sign. What is the potential of the field at large distances from the system?

6. а) Calculate the mutual inductance between a two-wire line AC and a square frame mn , the sides of which are parallel to the wires and equal $b = 40$ cm, the number of turns of the frame $N = 100$. The relative position of the line and the frame is indicated in the drawing. Dimensions are given in centimeters.



7. On a toroidal core ($\mu \gg 1$) with a narrow gap, two coils are wound, as shown in the drawing. Precise measurements of self-inductance of the coils gave values: $L_1 = 0,152$ H, $L_2 = 0,385$ H. The coils were connected in series, at this time the inductance proved to be equal $L = 0,945$ H. Evaluate from these data what fraction of the magnetic flux is scattered from the core.



8. A conical pendulum consists of a small sphere attached to the end of a rod of length l . The other end of the rod is attached to a pivot, which allows it to rotate in the vertical plane. The pivot rotates with angular velocity ω . A light push causes the rod to deviate from the vertical position.

а) In what position will the rod settle?

б) What will be the period of oscillations of the pendulum relative to this position?

1. а) На ракете, движущейся в свободном космическом пространстве со скоростью v_0 , на некоторое время включают разгонные реактивные двигатели. Скорость истечения газов относительно ракеты равномерно увеличивается с u_0 до $4u_0$. Определите конечную скорость ракеты, если её масса за время разгона уменьшилась в 2 раза, а ускорение было постоянным.

б) Тонкая цепочка длиной l и массой m сложена компактной кучкой на шероховатой поверхности с коэффициентом трения μ . Цепь тянут за крайнее звено с постоянной горизонтальной силой $F > \mu mg$. Какой будет скорость цепи, когда она полностью распрямится? Звенья цепи вовлекаются в движение поочередно, поперечным движением звеньев цепи можно пренебречь.

2. а) В кубическом сосуде с длиной ребра 1 см содержится аргон ($^{40}_{18}\text{Ar}$) при нормальных условиях. Определите с точностью до порядка величины: I) число столкновений в секунду, испытываемых отдельным атомом гелия? II) Число столкновений атомов с одной из стенок сосуда в секунду? Эффективный радиус атома аргона примите равным $7,1 \cdot 10^{-11}$ м.

б) Дальность видимости в пылевой взвеси, состоящей из непрозрачных частиц радиуса $r_1 = 4$ мкм, составляет $l_1 = 40$ м, а в кубометре воздуха содержится $m = 0,05$ г вещества пыли. Сколько такого же вещества содержится в кубометре воздуха, если радиус частиц $r_2 = 10$ мкм, а дальность видимости $l_2 = 20$ м?

3. а) Четыре металлических пластины (рис. 1) подключают к источнику напряжения V . Затем пошагово изменяют схему, как указано на рисунках – сперва удаляют провод, соединяющий средние пластины, после удаляют источник и заменяют источник проводом. Найдите разности потенциалов между каждыми соседними пластинами.

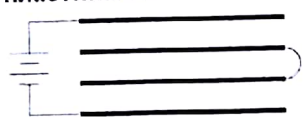


Рис. 1

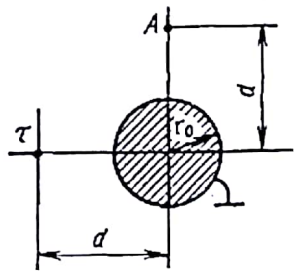


Рис. 2

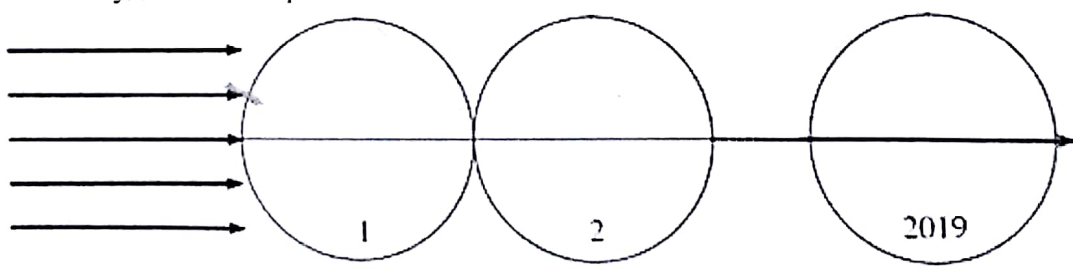


Рис. 3

б) Определите силу на единицу длины, с которой тонкий бесконечно длинный провод притягивается к бесконечно длинному заземлённому цилиндру радиуса r_0 . Найдите потенциал точки А.



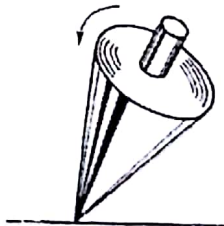
4. а) Оптическая система представляет собой $N = 2019$ шариков, касающихся друг друга. Шары выполнены из материала с показателем преломления $n=2$. Радиус шаров R . Источник света расположен на оси системы на большом удалении. Определите местонахождение изображения.



б) Источник света находится на расстоянии d от собирающей линзы, его изображение – на расстоянии f . Источник движется равномерно со скоростью v_d вдоль оптической оси. Каково ускорение изображения?

5. а) Вращение Земли приводит к отклонению траектории свободно падающего тела от вертикали. На сколько смещена оказывается точка – место падения тела? Высота с которой падает тело h , широта местности φ .

б) Ось волчка испытывает прецессию – изменение положения под действием момента силы тяжести. Определите направление прецессии оси волчка.

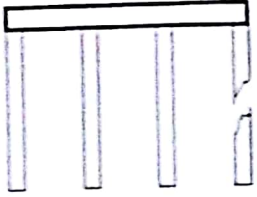


Экзамен №4

2018

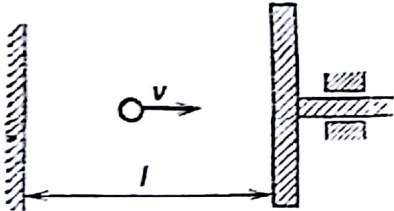
стр. 10

1. а) На четырёх вертикальных опорах укреплена балка. Расстояние между соседними опорами одинаково. Одна из опор (крайняя) обломилась. Для улучшения устойчивости сооружения предлагают разрушить опору с противоположной стороны. Обоснуйте количественно разумность предположения.

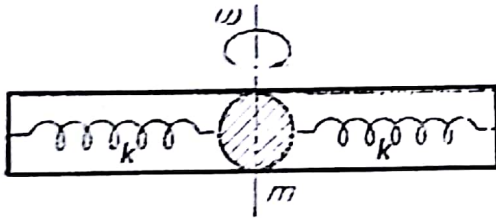


б) На наклонной плоскости лежит однородный брусок длиной l и высотой h . Масса бруска m . Коэффициент трения между бруском и плоскостью линейно изменяется вдоль его длины от μ_1 на верхнем краю до μ_2 на нижнем краю. При каком максимальном угле наклона плоскости брусок ещё может не соскльзывать с неё?

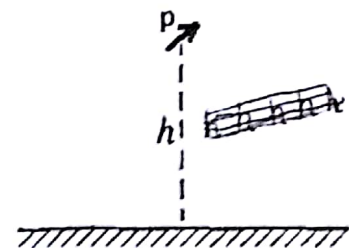
2. а) Между неподвижной стенкой и массивным поршнем движется небольшой шарик, испытывая с ними упругие соударения. Его скорость v направлена по нормали к поверхностям. Расстояние между стенкой и поршнем l медленно изменяется из-за перемещения поршня. Найти адиабатический инвариант движения – вид функции $f(v, l)$, остающейся приблизительно постоянной с течением времени.



б) В трубке, соединённый с её концами двумя одинаковыми пружинами жёсткости k колеблется шарик массы m с амплитудой A_0 . Трубку медленно раскручивают вокруг поперечной оси, проходящей через её середину. Найдите зависимость периода $T(\omega)$ и амплитуды колебаний $A(\omega)$ шарика от частоты вращения трубки ω .



3. а) Электрический диполь с дипольным моментом p находится на расстоянии h от проводящей плоскости, а его направление составляет с ней 45° . С какой силой (по величине и направлению) взаимодействует диполь с плоскостью?



б) Какую форму имеют силовые линии диполя? Запишите вид уравнения этих кривых.

4. а) Постройте график ВАХ для участка цепи, представленного на схеме (рис.1). ВАХ каждого из диодов представлен на графике (рис.2). Считать известными величину U_0 и сопротивление каждого из резисторов - R . Не забудьте обозначить координаты характерных точек (экстремумов, изломов) на графике.

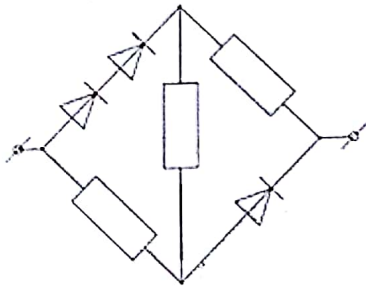


рис.1

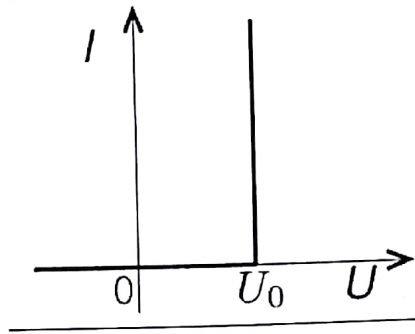
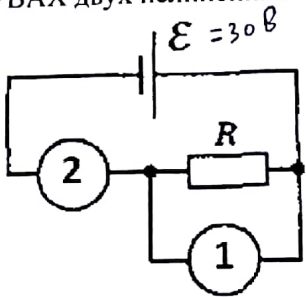
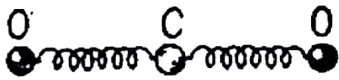


рис.2

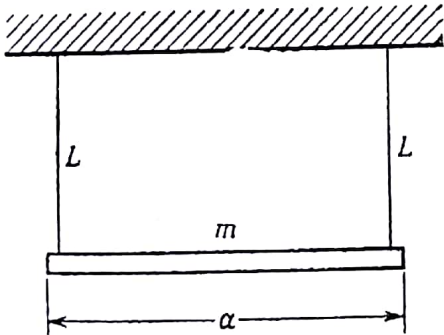
6) ВАХ двух нелинейных элементов представлен на приложенном графике. Каков ток в цепи? $R = 100 \text{ Ом}$

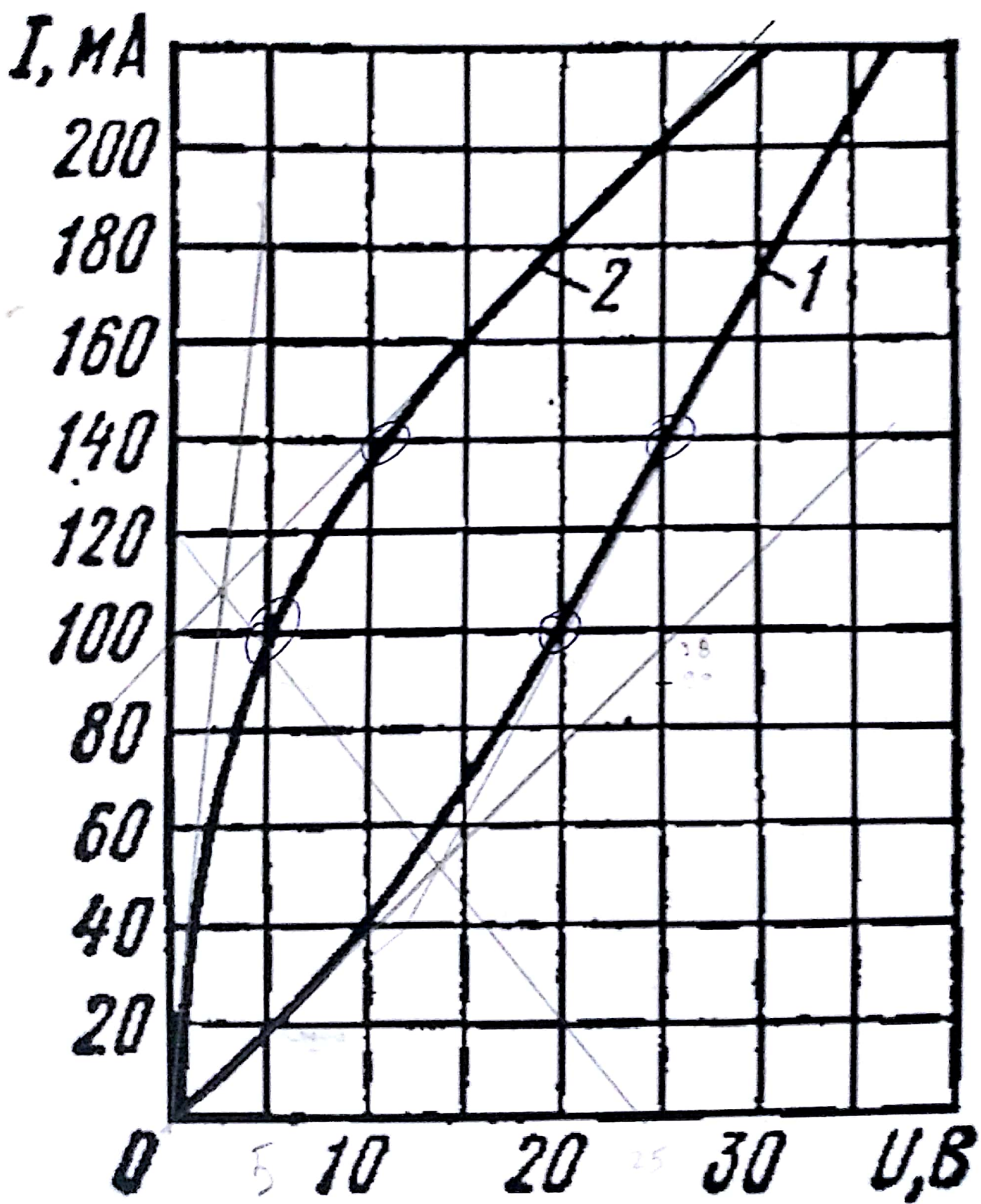


5. а) Какие два типа собственных продольных колебаний могут быть возбуждены в линейной молекуле CO_2 . Каково соотношение их частот?



б) Стержень, подвешенный за два конца, выводится из положения равновесия импульсом силы p , приложенным к одному из концов и направленным произвольно в горизонтальной плоскости. Опишите дальнейшее движение системы.



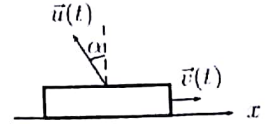


$180 \cdot 10^{-3} = 0,18$

1. ⓐ Шар массы m налетает на неподвижный шар такой же массы со скоростью v . При ударе тела теряют 50% от максимально возможной потери энергии при таких условиях. Если удар был бы нецентральный, то на какой угол мог бы отклониться от своей траектории налетающий шар? Каков мог бы быть максимальный угол между направлениями разлёта шаров?

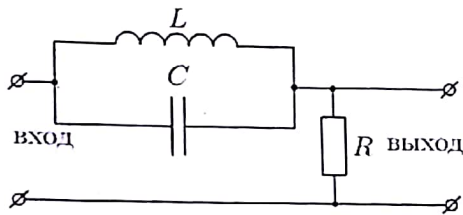
+ ⓑ Небольшое тело массы m_1 движется по столу со скоростью v_0 , наезжает и переезжает через горку массы m_2 , лежащую на столе и незакреплённую. Все поверхности гладкие. Каковы скорости тела и горки после взаимодействия?

2. ⓐ На платформе, движущейся по горизонтальной шероховатой поверхности, установлен ракетный двигатель, реактивная струя которого направлена вверх под углом α к вертикали. При некотором значении коэффициента трения платформа движется с постоянным ускорением независимо от массового расхода топлива и скорости истечения. Найдите это ускорение.

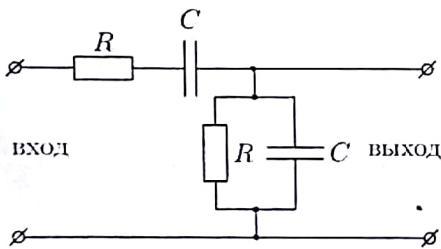


+ ⓑ Тележка массой M движется горизонтально без трения. Спереди тележки установлен вертикальный щит с площадью поверхности S . Навстречу тележке горизонтально летит поток песчинок со скоростью v относительно земли. Число песчинок в единице объёма n , масса каждой песчинки m . Песчинки абсолютно неупруго ударяются о щит и соскальзывают на землю. Начальная скорость тележки V_0 . Спустя какое время тележка остановится?

3. а) Найдите отношение амплитуд напряжения на выходе и входе $K(\omega) = \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{вх}}}$, и сдвиг фазы $\varphi(\omega)$ выходного сигнала относительно входного. При каком отклонении $\Delta\omega$ частоты входного сигнала от собственной частоты контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ амплитуда выходного сигнала будет составлять $\frac{\sqrt{2}}{2}$ от максимально возможной? $L = 0.1$ мГн, $C = 100$ мкФ, $R = 100$ Ом.



б) Найдите отношение амплитуд напряжения на выходе и входе $K(\omega) = \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{вх}}}$ и сдвиг фазы $\varphi(\omega)$ выходного сигнала относительно входного.



4. а) Для системы линз также действует формула тонкой линзы: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, но расстояния до источника d и до изображения f теперь отсчитываются от двух разных плоскостей, называемых главными плоскостями системы. Для системы, состоящей из тонких линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2 , разведённых на расстояние L , определите положение этих плоскостей и фокусное расстояние системы F .

б) Найдите положение главных плоскостей и фокусного расстояния для шара радиусом R , выполненного из материала с показателем преломления n .

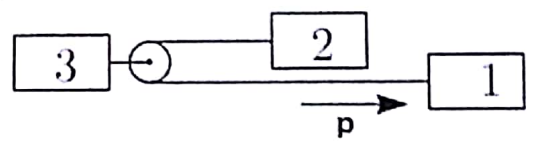
5. ⓐ Скорость некоторой частицы составляет $3/5$ от скорости света. Вторая частица обладает в 3 раза большей энергией и при этом в 4 раза большим импульсом. Найти отношение масс частиц.

+ ⓑ Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчёта в противоположные стороны со скоростями $\frac{1}{5}c$ и $\frac{5}{7}c$. Определить скорость частиц в той системе отсчёта, в которой они будут двигаться в противоположные стороны с одинаковой по величине скоростью.

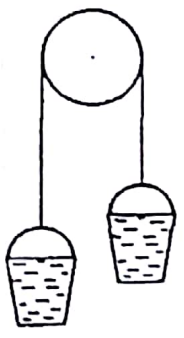
1. а) Скатившись с шероховатой горки произвольного профиля тело обретает скорость v_1 . Скатившись с «вытянутой» в 2 раза по горизонтали такой же шероховатой горки, тело обретает скорость v_2 . Какую скорость v_3 тело обретёт при скатывании с шероховатой горки подобного же профиля, но «вытянутого» в два раза по вертикали? Кривизну поверхностей считать достаточно малой, чтобы не создавать сколько-нибудь значительной центробежной силы.

б) Наклонная плоскость с углом наклона α плавно переходит в горизонтальную поверхность. На наклонной плоскости свисает, доставая одним концом до горизонтальной поверхности, и удерживается за верхний конец тросик длины l . Затем его отпускают. Коэффициент трения на всех поверхностях $\mu < \arctg \alpha$. Спустя какое время он оказывается целиком на горизонтальной поверхности? При каких значениях коэффициента трения он не способен скатиться целиком?

2. Три груза лежат на гладкой горизонтальной поверхности, объединённые в систему, показанную на рисунке. Их массы m_1, m_2 и m_3 . Грузу №1 ударом сообщён импульс p . Каковы скорости грузов спустя короткое время, когда их движение после перераспределения импульса станет равномерным? Нить нерастяжима и ни в один момент не была ослаблена.



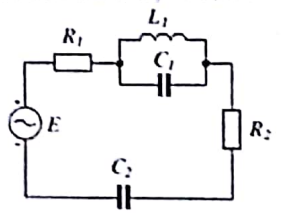
3. Два ведра с водой, висящие на верёвке, перекинутой через блок, имеют массы m_1 и $m_2 > m_1$. Ведру массы m_1 сообщается скорость v_0 , направленная вниз. В этот же момент начинает идти дождь и масса каждого из вёдер растёт со скоростью μ кг/с. Спустя какое время скорость вёдер обратится в ноль?



3. а) Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена Солнцем. При температуре воздуха T_0 освещенная сторона имеет температуру T_1 , противоположная – T_2 . Какими будут значения температур, если взять пластину двойной толщины?

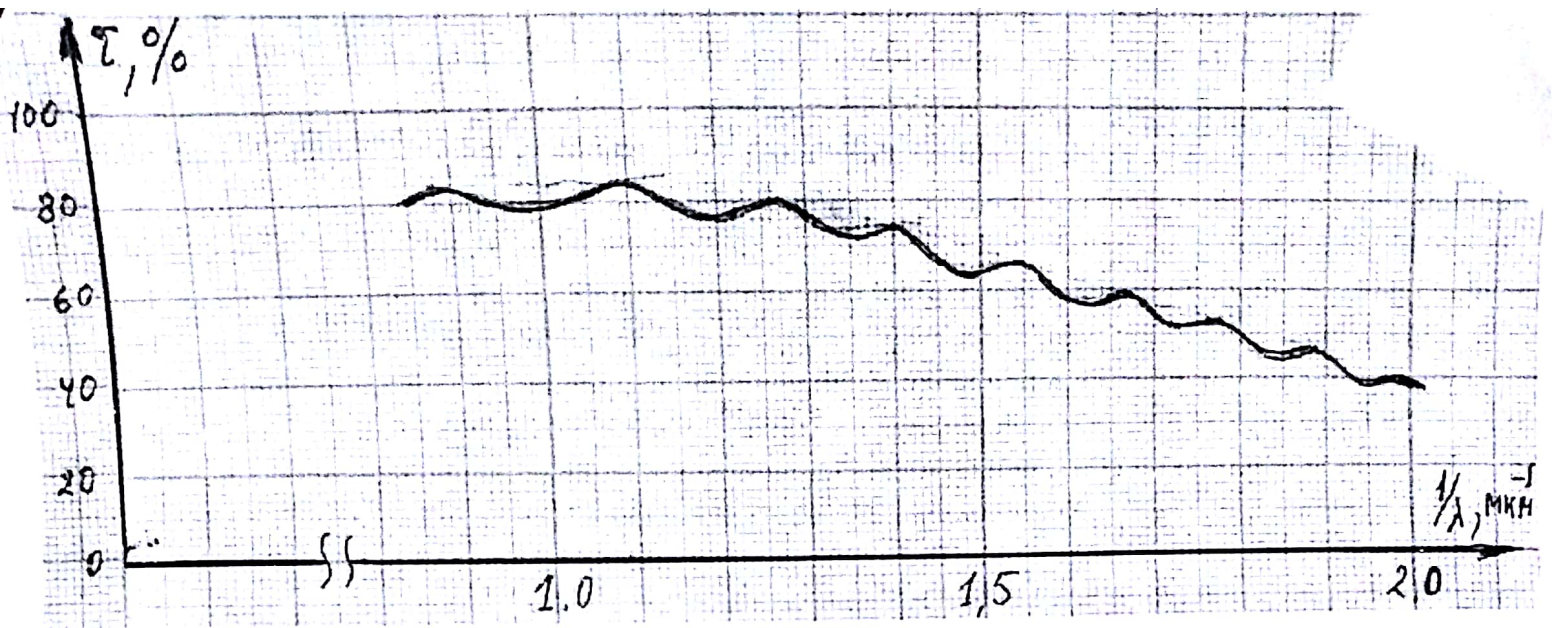
б) Сферический кусок льда радиусом $R = 1$ см погружён в большую массу воды с температурой 10°C . Теплопроводность воды примите равной $k = 0.572$ Вт/м $^\circ\text{C}$, удельная теплота плавления льда $q = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг. В течение какого времени лёд растает?

4. а) Напряжение источника (в вольтах): $\mathcal{E} = 2 + 3\sin\omega_1 t + 4\sin\omega_2 t$. Напряжение на резисторе R_2 (в вольтах): $U_2 = \sin\omega_2 t$. $R_1 = 3R_2$. Считая все представленные выше величины, а также индуктивность катушки L_1 известными, найдите ёмкости конденсаторов.

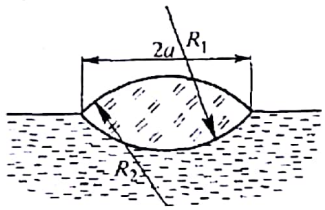


б) При резонансе ток в последовательной RLC-цепи равен 0,1 А при входном напряжении 12 В. Добротность контура $Q = 3$. Найдите напряжение на всех элементах цепи и силу тока цепи при том же входном напряжении и частоте $\omega = 2\omega_0$.

5. а) На графике изображена зависимость коэффициента пропускания плёнки толщиной $d = 1.0$ мкм, от величины $1/\lambda$. Покажите, что показатель преломления плёнки зависит от длины волны, как $n = B/\lambda$. Найдите величину B



б) На поверхности жидкости плавает тонкая линза. Показатель преломления материала линзы n . Показатель преломления жидкости $n_0 > n$. Опишите интерференционную картину, наблюдаемую в линзе сверху в отражённом монохроматическом свете длиной волны λ .



Ответы: контрольная работа 1

$$1. 1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1; 2) \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} + \omega^2 b \mathbf{j}; 3) \cos \alpha = \frac{(b^2 - a^2)x(y-b)}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2} \sqrt{b^4 x^2 + a^4 (y-b)^2}}$$

$$2. 1) \omega = \frac{12v}{l(\alpha+4)}; v_2 = \frac{2v}{\alpha+4}; v_1 = \frac{4-\alpha}{4+\alpha} v; 2) \frac{16\alpha}{(\alpha+4)^2}$$

$$3. 0,18 \text{ мм}$$

$$4. 1) C = -\alpha/T; 2) Q = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2}; 3) A = \alpha \ln \frac{T_1}{T_2} + C_V(T_1 - T_2)$$

$$5. E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right)$$

$$6. x(t) = \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} - v_0 \right) (1 - \cos \omega t),$$

$$y(t) = 0,$$

$$z(t) = \frac{E}{B} t - \frac{m}{qB} \left(\frac{E}{B} - v_0 \right) \sin \omega t,$$

$$\omega = |q|B/m,$$

$$v_{cp} = \frac{E}{B}$$

$$7. \lambda = \frac{2s\Delta h}{l(N_2 - N_1)}$$

$$8. \theta = 83^\circ$$

$$9. \Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}$$

$$10. t = \frac{\pi}{\sqrt{ag \cos \alpha}}$$

Ответы: контрольная работа 2

1. 1) $s(t) = R \ln(1 + v_0 t/R)$; 2) 0.75π ; 3) $a = \frac{v^2}{R} \sqrt{2}$

2. $\frac{2}{3}m$

3. $\frac{M(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi R_1^2 R_2^2 \omega}$

4. $\Delta S = -\frac{R}{2} \ln \beta$

5. $E = k2\pi\rho r, 0 < r < R, \frac{k2\pi\rho R^2}{r}, r > R$ $\varphi = k\pi\rho r^2, 0 < r < R, k2\pi\rho R^2 \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2}\right), r > R$

6. $\sin \alpha = \frac{B_0 d}{\pi} \sqrt{\frac{2e}{mU}}$

7. $n_x = n(1 + N\lambda/l)$

8. $F = \frac{l\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 2.5 \text{ см}$

9. $P = E \frac{\rho_0 - \rho}{2\rho_0(1-2\mu)} = 2 \times 10^4 \text{ атм}$

10. $t = \pi n \sqrt{\frac{m}{k}}, n = 1, 3, 5 \dots$

Ответы: контрольная работа 3

$$1. v = \sqrt{2gR \left(1 - \frac{kmg}{2F_0}\right)}$$

$$2. x(t) = \frac{3+\sqrt{3}}{2} a \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$3. \frac{n(r_2)}{n(r_1)} = \exp\left(-\frac{mg\omega^2(r_2^2 - r_1^2)}{2kT}\right)$$

$$4. \Delta T = \frac{a}{c_V} \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 0.25 \text{ K}$$

$$5. \varepsilon = 2$$

$$6. \left(x_0 + \frac{SR}{2\rho}\right) \left(\exp\left(\frac{2mv_0\rho}{B^2 l^2 S}\right) - 1\right)$$

$$7. h = \frac{\lambda}{4} (n^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} (2m - 1) = 0.14(2m - 1) \text{ мкм}$$

$$8. F = \frac{l\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n})^2} = 20 \text{ см}$$

$$9. F_{max} = mg + v_0 \sqrt{\frac{mES}{l}} = 2.1 \times 10^5 \text{ Н}$$

$$10. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{3g}} = 1.1 \text{ с}, E = \frac{mgl\alpha^2}{2} = 0.05 \text{ Дж}$$

Ответы: контрольная работа 4

1. 1) $t = \frac{1}{\omega} \ln \frac{\omega l}{v_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{\omega^2 l^2}} \right)$; 2) $N(x) = m \sqrt{g^2 + 4\omega^2 v_0^2 + 4\omega^4 x^2}$

2. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$; $\omega_v = \omega_0$; $\omega_a = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$; $\omega_v = \sqrt{\omega \omega_a} 3$.

3. $\frac{1}{2} kT$

4. $R = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 0.6 \text{ мм}$

6. $W = \frac{kq^2(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$

6. $y(t) = \left(\frac{9P\rho \cos \alpha (1 + \sin \alpha)}{8B^2 \sin^2 \alpha} \right)^{1/3} t^{2/3}$

7. $\frac{1}{2} \cos^{2(N-1)} \varphi = 0.12$

8. $E = \pi L$

9. $\tau = \frac{S}{\sigma} \frac{h - h_0}{\sqrt{2gh_0}}$

10. $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$

Контрольная работа 5

1. $\omega = \sqrt{2ag}$

2. 1) $y(t) = a \sin(kx - kl) \sin(\omega t - kl)$; 2) $v_n = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

3. $A = \frac{m}{\mu} RT_1 \left(\ln 4 + \frac{1}{\gamma-1} \left[1 - 4^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] + 1 - 4^{1-1/\gamma} \right)$

4. $p = \mu \sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} = 0.9 \text{ нПа}$

5. $B = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{3\pi}$

6. $\omega = \frac{qB}{2m}$

7. $\frac{P}{1-P} = \frac{1}{3}$

8. $E = \frac{\pi LR^2}{h^2} = 25 \text{ лк}$

9. $v = \omega R \sqrt{2}$

10. $R = \frac{\rho}{2\pi a}$

Контрольная работа 6

$$1. \omega = \left(\frac{3m_1 g}{m+2m_1} \right)^{3/2} \left(\frac{t}{3} \right)^2$$

$$2. u = \frac{cv_0}{\Delta v} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta v}{v_0} \right)^2} - 1 \right)$$

$$3. 1 - n^{1-\gamma} = 0.6$$

$$4. 1,04 \text{ атм}$$

$$5. B = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \arctan \frac{a}{2R}$$

$$6. H = \frac{rU_0}{2d} |\sigma \cos \omega t - \epsilon \epsilon_0 \omega \sin \omega t|$$

$$7. h' = h \frac{n \cos^3 \theta}{(n^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

$$8. c = \frac{\lambda v f}{\Delta x} = 1.5 \text{ км/с}$$

$$9. f = \frac{2\pi\eta v_0}{\ln(r_2/r_1)} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ Н/см}, v(r) = v_0 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$10. Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}$$

Ответы №1

1а. $a = \frac{v^2}{h} \operatorname{tg}^3 \alpha$

16. $V_{\max} = \frac{(5+\sqrt{7})\pi}{\sqrt{2}c} \approx 5,40 \text{ м/с}$. $V_{\min} = \frac{(5-\sqrt{7})\pi}{\sqrt{2}c} \approx 1,67 \text{ м/с}$. Возможные азимуты направлений от $360^\circ - \arcsin \frac{4}{5} \approx 307^\circ$ до $270^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \approx 323^\circ$.

2а. $C(A) = C\rho$, $C(B) = Cv$, $C(C) = Cv + R/2$

26. $P_2 = \frac{2P_1}{1+\gamma}$, $V_2 = \frac{2\gamma V_1}{1+\gamma}$

3а. $R = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r}$

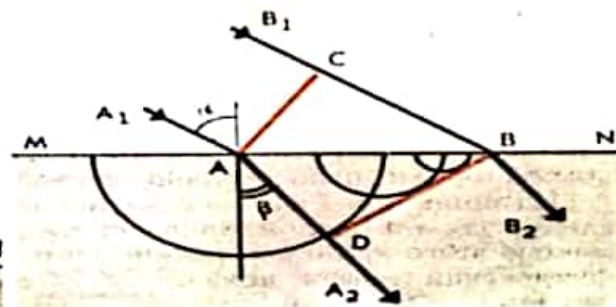
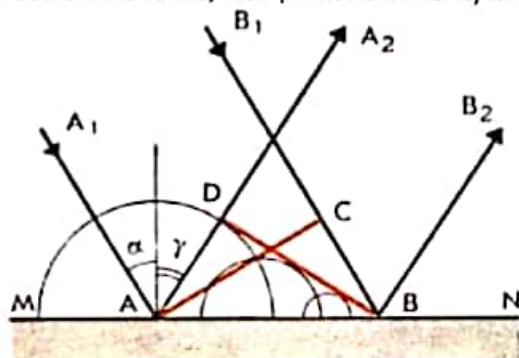
36. $N = \frac{\sum \sum q_i \varphi_j}{\epsilon_0 \rho}$

4а. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha \sqrt{\mu^2 + 1}}}$

46. $T' = T \left(1 - \frac{2\omega^2 + \omega_0^2}{4g} R \right)$

Отстанут на 55,8 с.

5а. Расстояние то же, толщина пластины h/n .



56.

Ответы №2

<p>1а. $v_{\text{кв}} = v\sqrt{2}$</p> <p>16. $F = \frac{Nmv^2}{a}$</p>
<p>2а. $\frac{t_2}{t_1} = \frac{1-\varphi_1}{1-\varphi_2} = 1.4$ часа</p> <p>26. $T_1 = T_3 = \Delta\sigma \frac{t_2}{2}, T_2 = 0$</p>
<p>3а. $E = \frac{qR\Delta R}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$</p> <p>36. $\varphi = \frac{15qa^3xyz}{4\pi\epsilon_0r^7}$</p>
<p>4а. $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\ln \frac{b^2+h^2}{h^2} - \ln \frac{a^2+h^2}{(a-b)^2+h^2} \right) = 10^{-7} \cdot \ln 1.25 \text{ Гн} = 22,3 \text{ нГн}$</p> <p>46. $\epsilon = 1 - \frac{L-L_1-L_2}{2\sqrt{L_1L_2}} = 0.157$</p>
<p>5а. $\alpha_1 = 0$, при $\omega^2 < \frac{g}{R}$</p> <p>$\alpha_2 = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$, при $\omega^2 > \frac{g}{R}$</p> <p>56. $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2}, T_2 = 2\pi \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}}$</p>

Ответы №3

1а. $v = v_0 + \frac{3}{2}u_0$
1б. $v = \sqrt{\frac{(F - \mu mg)L}{m}}$
2а. $l) \approx 10^9 \text{ м} \quad \text{л)} \approx 10^{23}$
2б. $m_2 = m_2 \frac{r_2 l_1}{r_1 l_2} = 0.25 \text{ г}$
3а. $-\frac{v_0}{6}; \frac{v_0}{3}; -\frac{v_0}{6}$
3б. $F = \frac{\tau^2 d}{2\pi\epsilon_0(d^2 - r^2)}, \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{dr\sqrt{2}}{\sqrt{d^4 + r^4}}\right)$
4а. На оси системы на поверхности правого крайнего шара.
4б. $a = \frac{2vd^2f^2(f+d)}{d^4}$
5а. $\delta = \frac{2}{3}h \cdot \omega \sqrt{\frac{2h}{g}} \sin\varphi$
5б. Против часовой стрелки если смотреть сверху.

Ответы 4

<p>1а Одна из балок будет напряжена с силой $\frac{7}{12}mg$</p> <p>16 $tg\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2 - (\mu_2 - \mu_1)\frac{h}{l}}$</p>
<p>2а $vl = const$</p> <p>26 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}, A = \frac{A_0}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{k}}}$</p>
<p>3а $F = \frac{3p^2}{64\pi\epsilon_0 h^3}$, притягивается.</p> <p>36 $r = C \sin^2 \alpha$</p>
<p>4а $I = \begin{cases} \frac{U}{3R}, & \text{при } U = \frac{3}{2}U_0 \\ \frac{U - U_0}{R}, & \text{при } \frac{3}{2}U_0 < U < \frac{5}{2}U_0 \\ \frac{3U - 6U_0}{R}, & \text{при } U > \frac{5}{2}U_0 \end{cases}$</p> <p>46 ≈ 130 мА</p>
<p>5а $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + 2\frac{m_0}{m}} \approx 1.9$</p> <p>56 Координаты концов стержня:</p> <p>$x_1 = \frac{p_{ }}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{2p_{\perp}}{ma} \sqrt{\frac{3l}{g}} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{3g}{l}} t\right), y_1 = \frac{p_{\perp}}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{2p_{\perp}}{ma} \sqrt{\frac{3l}{g}} \left(\sin \sqrt{\frac{3g}{l}} t\right)$</p> <p>$x_1 = \frac{p_{ }}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{2p_{\perp}}{ma} \sqrt{\frac{3l}{g}} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{3g}{l}} t\right), y_1 = \frac{p_{\perp}}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t - \frac{2p_{\perp}}{ma} \sqrt{\frac{3l}{g}} \left(\sin \sqrt{\frac{3g}{l}} t\right)$</p>

Ответы 5.

<p>1а. $45^\circ, \arccos \frac{1}{\sqrt{17}}$</p> <p>16. $v_1 = v_0, v_2 = 0$</p>
<p>2а. $a = -gtg\alpha$</p> <p>26. $t = \frac{nmSu(V_0+u)}{MV_0}$</p>
<p>3а. $K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}}$, опережает на $\arctg \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$; $\Delta\omega = \frac{1}{2RC} = 50$ рад/с</p> <p>36. $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{\omega RC} - \omega RC\right)^2}}$, опережает на $\arctg \frac{\frac{1}{\omega RC} - \omega RC}{3}$</p>
<p>4а. $F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l}$, $x_1 = \frac{F_1 d}{F_1 + F_2 - l}$, $x_2 = \frac{F_2 d}{F_1 + F_2 - l}$, отсчитываются от главных плоскостей тонких линз</p> <p>46. $x_1 = x_2 = R$ - плоскости совпадают, $F = \frac{nR}{2(n-1)}$</p>
<p>5а. $\frac{m_2}{m_1} = \frac{9}{4}$</p> <p>56. $\frac{c}{2}$</p>

Ответы 6

<p>1а. $v_3^2 = 3v_1^2 - v_2^2$</p>
<p>16. $t = \sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha)}} \left(\pi - \arccos \frac{\mu}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} \right)$, при $\mu > \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ целиком не съедет</p>
<p>2а. $v_2 = \frac{p}{m_1 + m_2 + \frac{4m_1m_2}{m_3}}$, $v_3 = \frac{2m_2}{m_3} v_2$, $v_3 = \left(1 + \frac{4m_2}{m_3}\right)v_2$</p>
<p>26. $t = \frac{v_0 m_1 + m_2}{g m_2 - m_1}$</p>
<p>3а. $T_1' = \frac{(T_1 + T_2 - 2T_0)(2T_1 - T_2 - 2T_0)}{2(T_1 - T_0)}$; $T_1' = \frac{(T_1 + T_2 - 2T_0)(T_2 - T_0)}{2(T_1 - T_0)}$</p>
<p>36. $t = \frac{\rho_A q R^2}{2k(T_\infty - T_0)} \approx 41$ МИН</p>
<p>4а. $C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_1}$, $C_2 = \frac{1}{\omega_2^2 L_1} - C_1$</p>
<p>46. $I \approx 0.217$ А</p>
<p>5а. $B \approx 1.2$ мкМ</p>
<p>56. Радиус m-го светлого кольца $r_m = \sqrt{a^2 - \frac{m\lambda}{n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}}$</p>