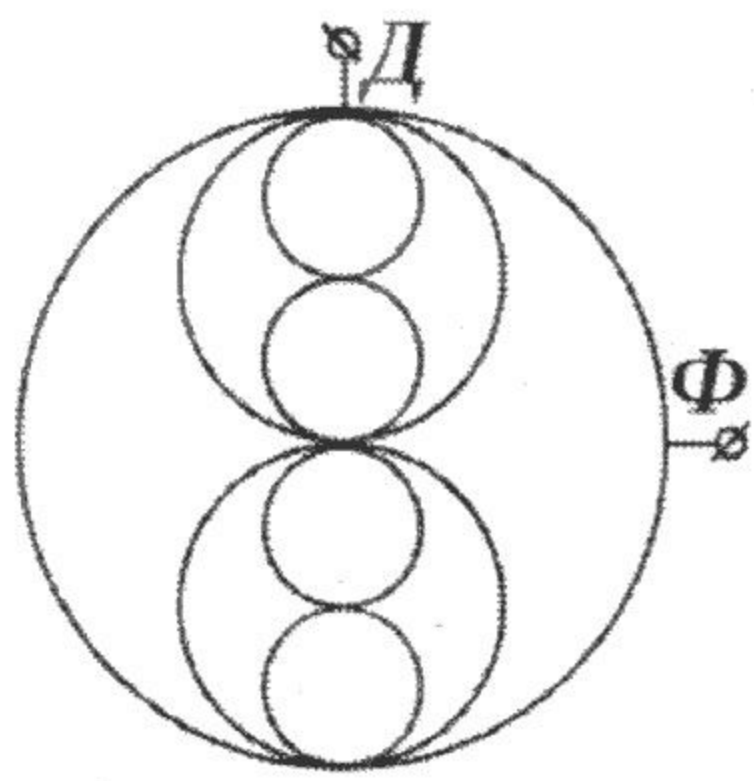
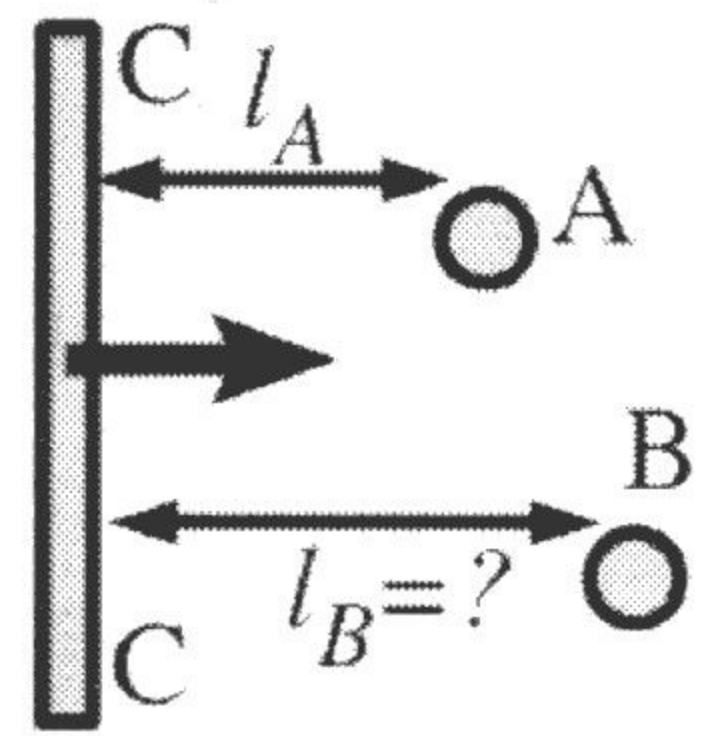


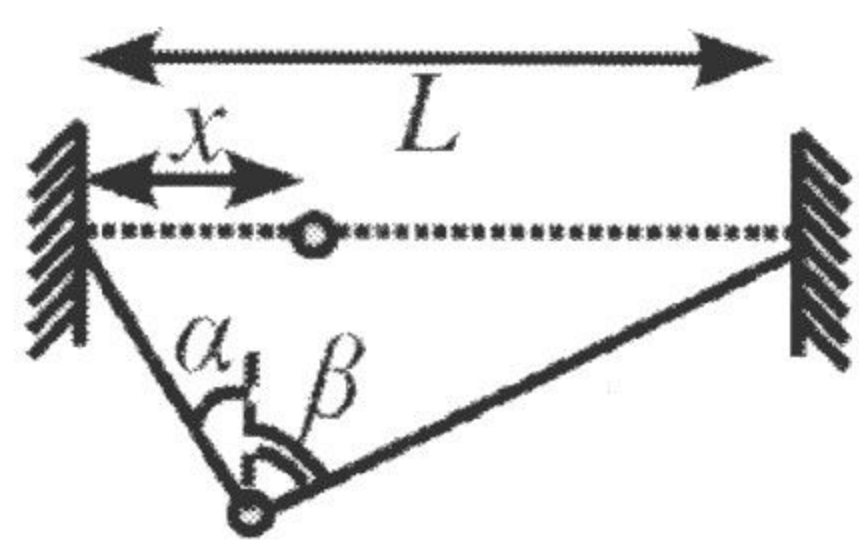
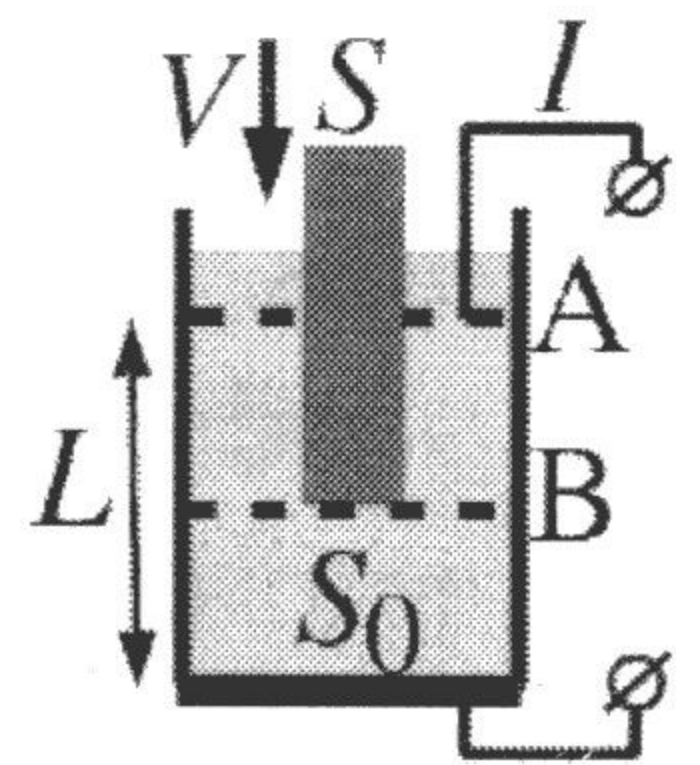
Контрольная работа 1

1. Две шайбы, А и В, покоятся на горизонтальной гладкой поверхности. В начальный момент времени на них начинает двигаться со скоростью v_0 и ускорением a очень массивная стенка СС, причем v_0 и a – перпендикулярны стенке и коллинеарны. Известно, что в начальный момент времени расстояние от шайбы А до стенки составляло l_A , а время между первым и вторым столкновением шайбы В со стенкой в два раза превышает время между первым и вторым столкновением шайбы А с той же стенкой. Считая удары шайб о стенку абсолютно упругими, найдите в начальный момент времени расстояние l_B между шайбой В и стенкой.



2. На рисунке показана схема, спаянная в виде колец из однородной проволоки. Сопротивление единицы длины проволоки равно ρ , а диаметр самого внешнего кольца составляет D . Считая, что в местах касания имеется полный электрический контакт, найдите электрическое сопротивление между клеммами Д и Ф. Чему равно электрическое сопротивление между теми же клеммами, если проволоки вкладываются друг в друга до бесконечности.

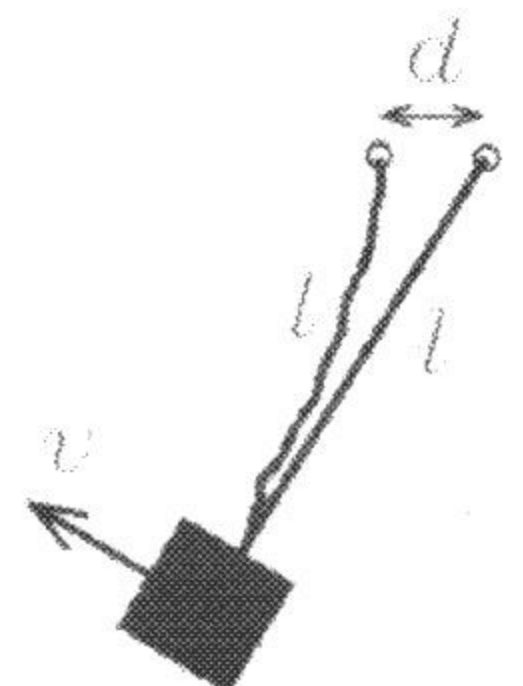
3. В достаточно высокий цилиндрический сосуд налита однородная проводящая жидкость с удельным сопротивлением ρ и теплоемкостью C . Дно сосуда имеет площадь S_0 и изготовлено из металла. В сосуде на высоте L от его дна находится горизонтально расположенная зафиксированная проводящая сетка А, имеющая мелкие ячейки. Ниже нее плавает металлическое кольцо площади S_0 с точно такой же натянутой сеткой. В начальный момент кольцо находится непосредственно под сеткой А, а в самой сетке А проделывают отверстие площадью S и в него опускают непроводящий стержень площадью S и длиной L со скоростью V , так что кольцо все время остается горизонтальным. Одновременно к дну сосуда и неподвижной сетке А подключают источник, который обеспечивает протекание постоянного тока I . Определите зависимость и постройте соответствующий график температуры жидкости от времени. Начальная температура жидкости равна T_0 и она разогревается равномерно, теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.



4. Между двумя вертикальными стенками закрепляют невесомый упругий шнур, жесткость которого равна $k = 100 \text{ Н/м}$, длина в нерастянутом состоянии – $L = 1 \text{ м}$ и равна расстоянию между стенками. Груз массой m прикрепляют на расстоянии x от левого края, как показано на рисунке. Известно, что после прихода в состояние равновесия участки шнура слева и справа от груза составляют углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ с вертикалью. Найдите x ,

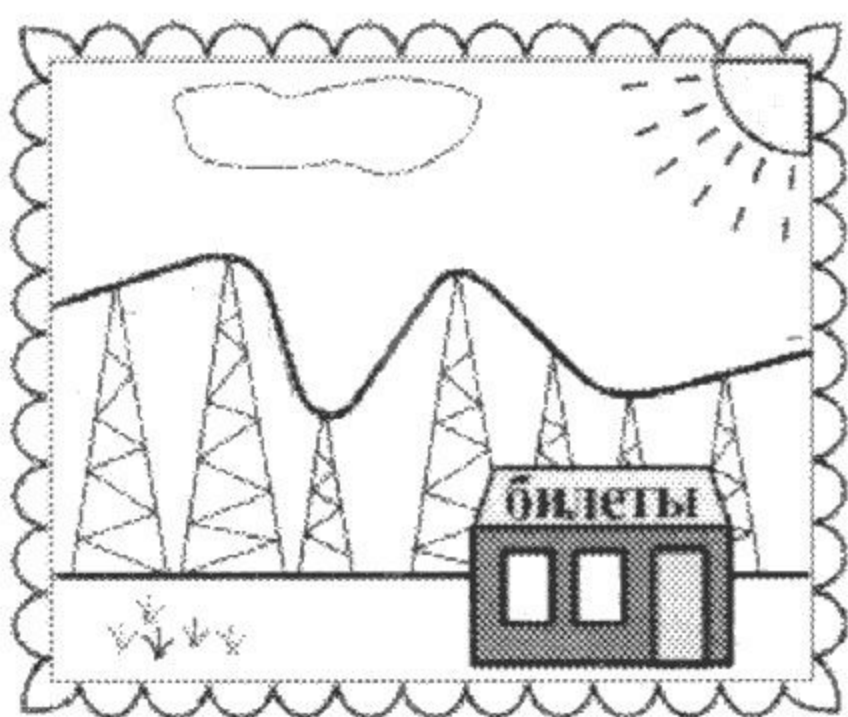
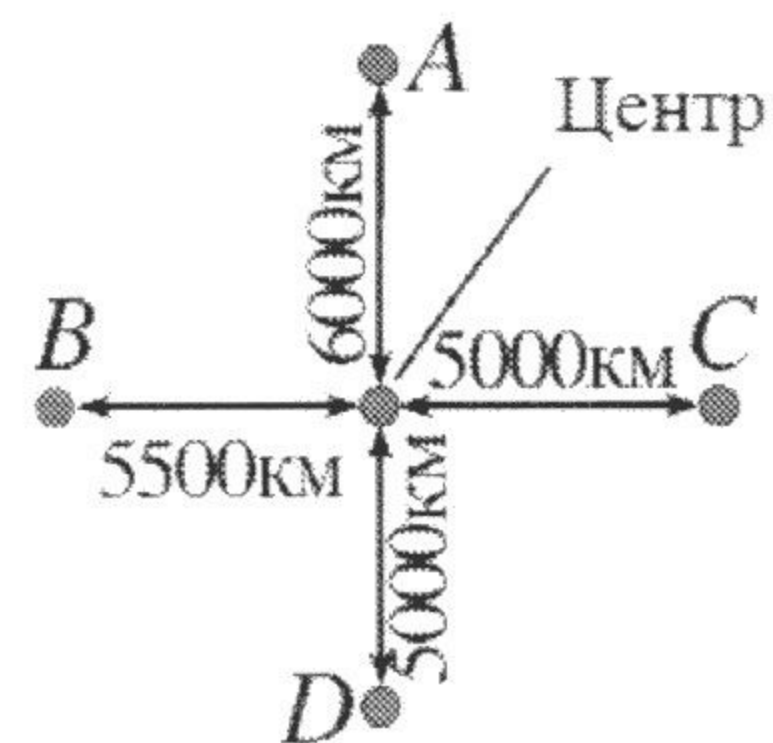
если ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

5. Два маленьких отверстия просверлены в столе на расстоянии d и из них торчат две нити одинаковой длины l . Груз, к которому привязаны концы нитей, расположен на столе. Груз вращается, двигаясь по столу без трения так, что одна из нитей всегда натянута. Наблюдения показали, что скорость груза $v(t)$ в те моменты времени, когда он максимально близок к одному из отверстий, такова, что $\frac{1}{v(t)} = at + b$, где a, b – постоянные. Найдите a .

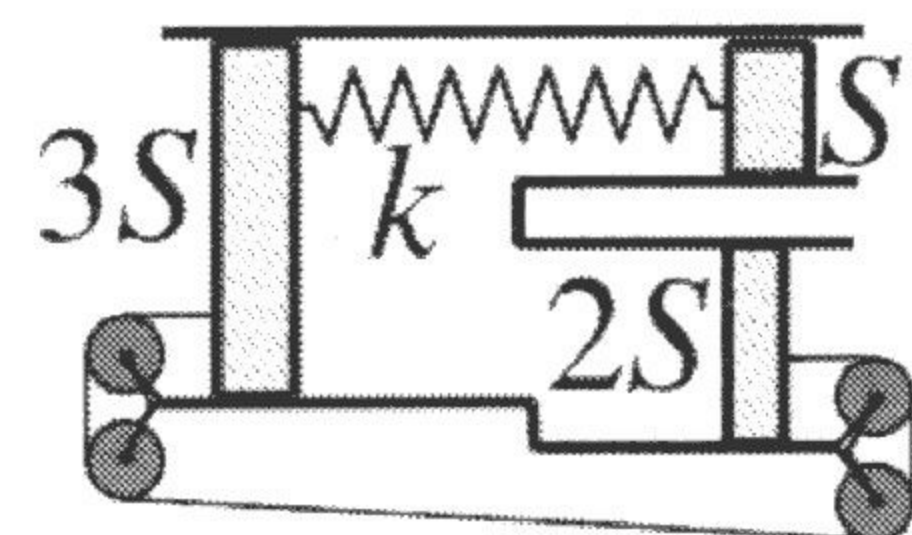


Контрольная работа 2

1. Между четырьмя городами А, В, С, D и центром существует авиасообщение. Из-за сильного ветра переедет из А и В в центр стал занимать соответственно на час и полчаса меньше, чем при отсутствии ветра. Определите скорость ветра, если все самолеты всегда летят по прямой. Рассчитайте время полета из С и D в центр. Расстояния указаны на рисунке, временем взлета и посадки пренебречь. Все самолеты развивают одну и ту же скорость, равную 1000 км/ч.

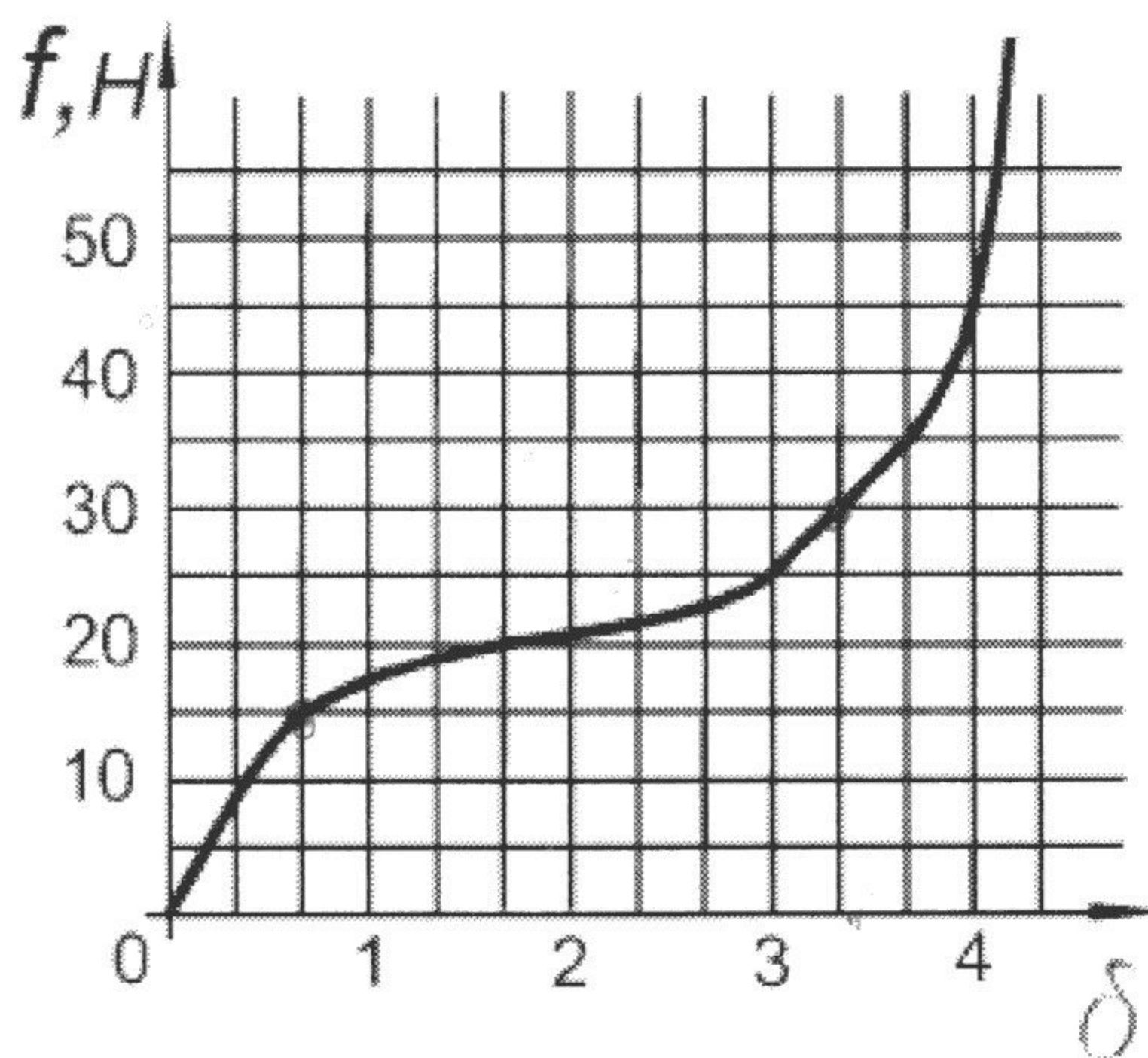


2. По игрушечной дороге, фотография которой сбоку показана на рисунке, движется тележка так, что ее горизонтальная скорость постоянная и равна 10 м/с. Железная дорога не имеет поворотов влево и вправо, а сила сопротивления движению составляет $\vec{F} = -k\vec{v}$, где $k = 0.5 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ и \vec{v} – скорость тележки. Масса тележки равна 200 кг, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Найдите максимальную мощность двигателя тележки на участках, где она движется с нулевым ускорением.



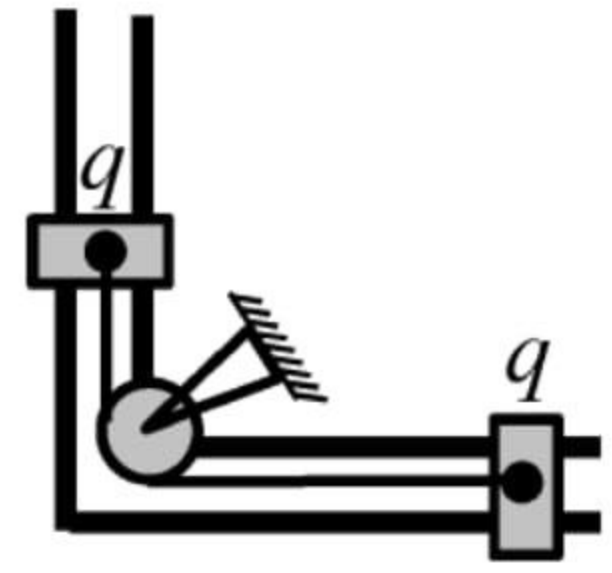
3. В горизонтальной трубе сложной формы, показанной на рисунке, имеются три поршня, которые способны перемещаться без трения. Между поршнями находится ν молей идеального газа при температуре T_0 . Поршни с площадью $3S$ и S соединены пружиной с коэффициентом жесткости k , а поршни с площадью $3S$ и $2S$ – нерастяжимой нитью с помощью системы блоков так, что первоначально силы натяжения нити равна F . Определите насколько сместится каждый поршень после того, как нить пережигают. Газ в трубе поддерживается при постоянной температуре, а снаружи трубы находится атмосферный воздух, имеющий давление p_0 и температуру T_0 .

4. Жгут массой $m = 3 \text{ кг}$ состоит из двух участков. Первый участок – невесомый, а втором масса равномерно распределена по длине. Сила натяжения f любого очень маленького участка жгута зависит от относительного удлинения так, как показано на графике. Невесомый конец жгута закрепили на столе, а другой тянут вертикально вверх с силой $F = 45 \text{ Н}$, после чего его длина увеличилась в 3 раза. Найдите долю длины нерастянутого жгута, которую занимает невесомая часть. Ускорение свободного падения равно $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Контрольная работа 3

1. По неподвижным рельсам, образующим прямой угол, могут перемещаться без трения две тележки массой m , на каждой из которых закреплен точечный заряд q . Через неподвижный блок, закрепленный в вершине угла, перекинута нить длины L , прикрепленная концами к тележкам. В начальный момент времени тележки находятся в состоянии неустойчивого равновесия на одинаковом расстоянии от блока. В результате слабого толчка равновесие нарушается и тележки приходят в движение. Найдите скорости тележек в тот момент времени, когда нить разрывается, если она выдерживает натяжение T_0 .



2. Легкий поршень площади $S=1\text{ м}^2$, на нижнюю поверхность которого наморожен лед, помещен в цилиндрический сосуд, по которому он может перемещаться без трения. Внутри сосуда под поршнем имеется идеальный газ при температуре $T_0=0^\circ\text{С}$ и давлении на $k=1$, больше атмосферного, а снаружи – атмосферный воздух при давлении $p_0=10^5\text{ Па}$. Если газу медленно сообщают тепло, то поршень сначала опускается, а потом поднимается до первоначального уровня. При каком количестве молей ν идеального газа это возможно?

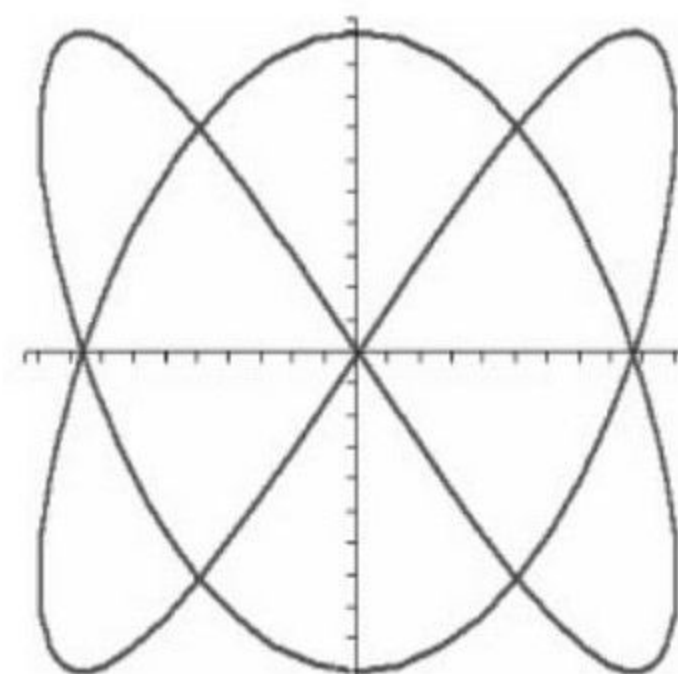
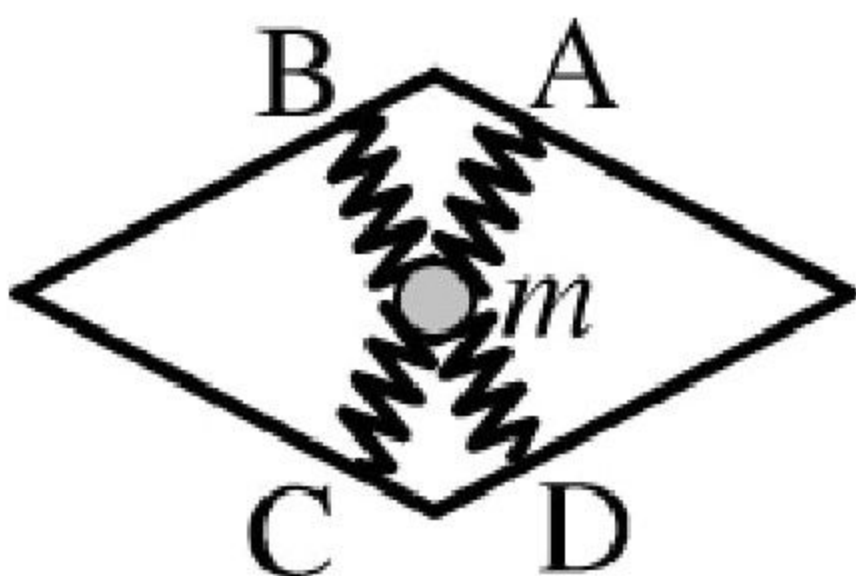
При заданном ν найдите температуру газа, при котором поршень вернется в начальное положение. Плотность воды равна $\rho_0=1\text{ г/см}^3$, плотность льда равна $\alpha\rho_0$, $\alpha=0,9$. При таянии лед остается примороженным к поршню, теплоемкостью и массой поршня, а также давлением насыщенных паров пренебречь.



3. На клетчатом полу стоит зеркальный цилиндр. Отметьте крестом на цилиндре те квадраты, которые не попали в кадр фотоснимка.

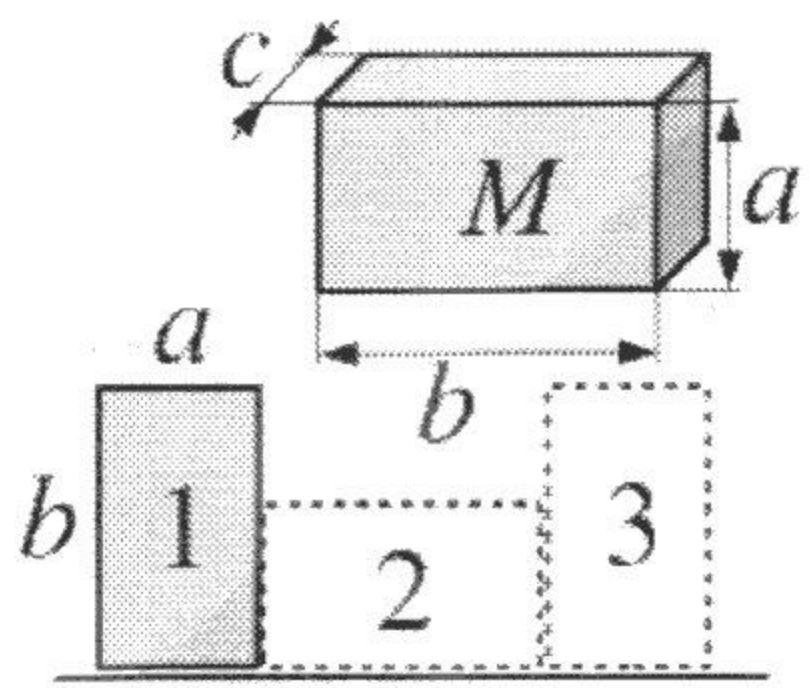
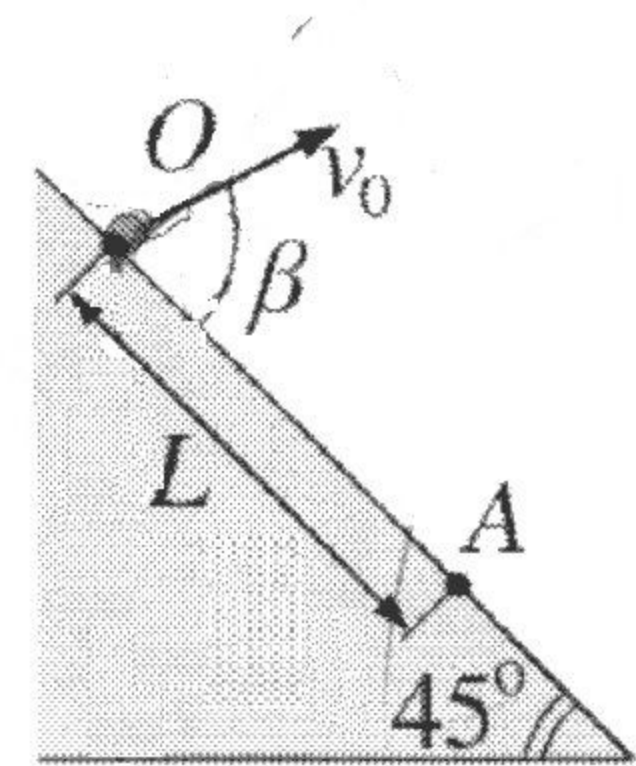
4. Упругий провод с коэффициентом жесткости k закрепляют между двумя гвоздями, забитыми в гладкий стол на расстоянии L_0 друг от друга. По проводу пропускают ток силой I и создают магнитное поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости стола. Определите форму провода на столе, если до включения магнитного поля он был не деформирован. Укажите значения k , при которых равновесие провода возможно. Сила тока настолько мала, что взаимодействием отдельных частей провода друг с другом можно пренебречь.

5. Неподвижная проволочная рамка имеет форму ромба, по сторонам которого могут свободно скользить концы четырех пружин А, В, С, и D. Другие концы пружин прикреплены к массивному грузу. На рисунке показана траектория груза, которую он описывает в процессе колебаний. Пренебрегая силой тяжести, найдите острый угол ромба, если траектория груза лежит в его плоскости.



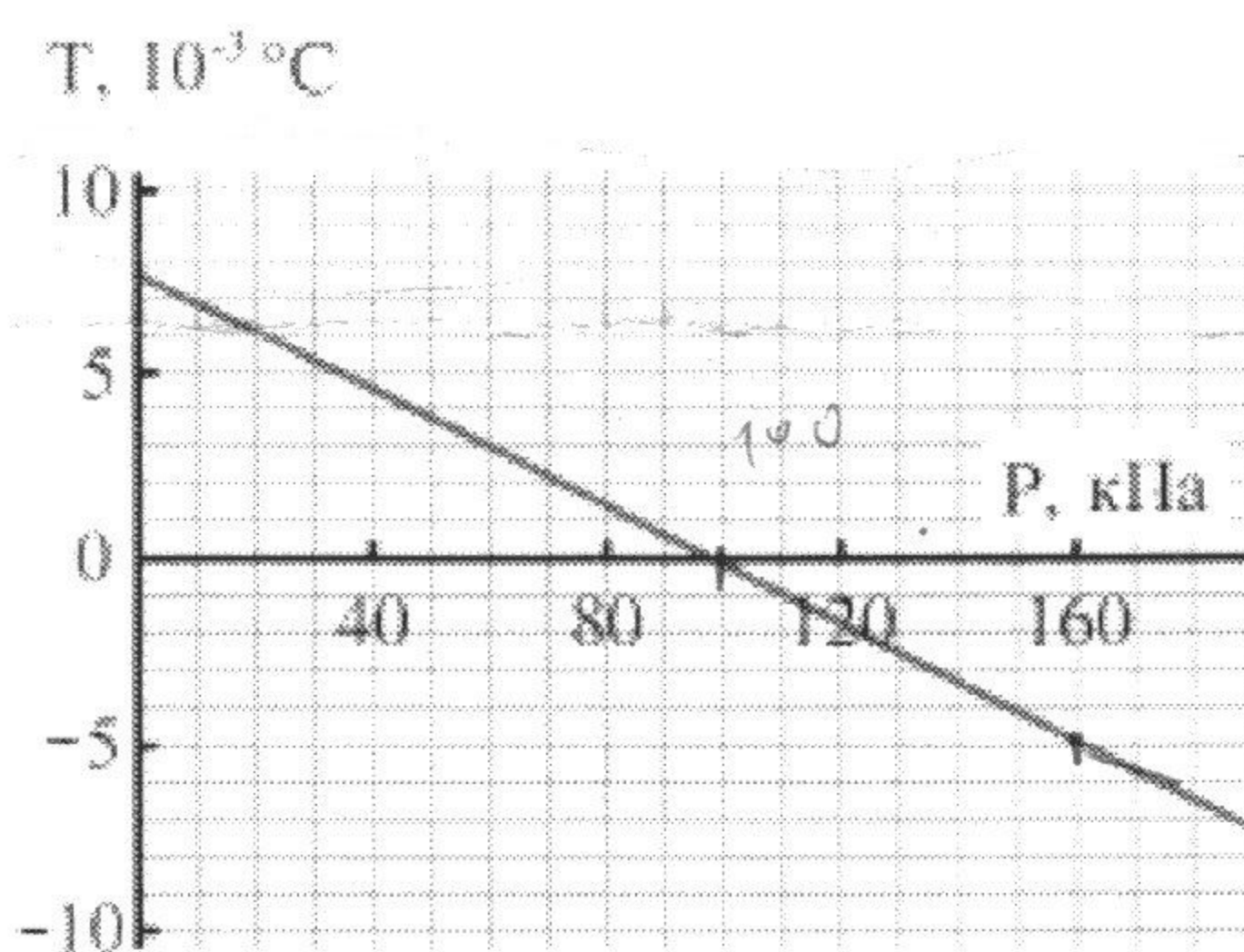
Контрольная работа 4

1. Наклонная плоскость составляет угол 45° . В точке O находится пушка, дуло которой фиксировано под углом β к наклонной плоскости. Пушка стреляет мячиками с произвольной начальной скоростью, которые, ударяясь о плоскость, теряют свою скорость так, что нормальная составляющая уменьшается в ϵ раз, а составляющая вдоль плоскости не меняется. Найдите возможные значения начальной скорости, при которых мячик оказывается в лунке A , находящейся на расстоянии L ниже по плоскости. Ускорение свободного падения равно g .

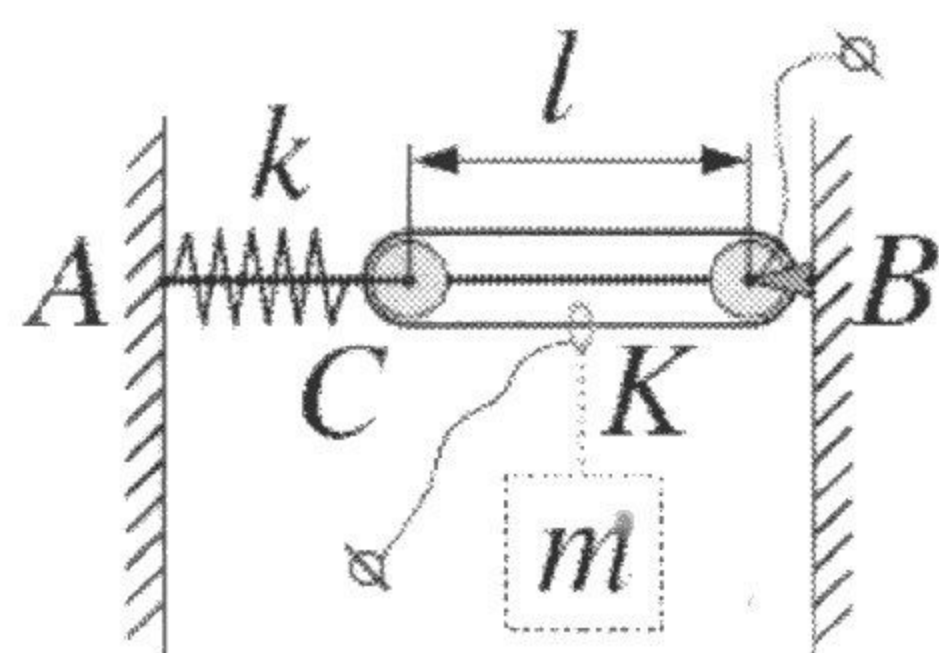
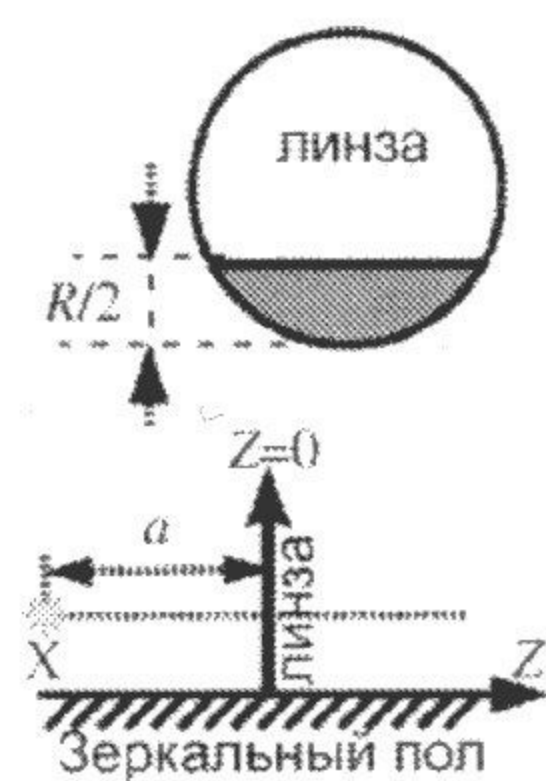


2. Рассмотрим модель появления силы трения, в которой горизонтальная поверхность считается равномерно и плотно покрытой ворсинками, которые можно считать идеальными пружинами с нулевой начальной длиной. Пусть в момент контакта с телом ворсинка прилипает к нему верхним концом и отлипает растянувшись на максимальную длину Δ . Прямоугольный параллелепипед массой M с ребрами $a, b, c > \Delta$ вертикально опускают на горизонтальную поверхность так, чтобы он стоял на грани со сторонами a и c (положение 1). Затем его переворачивают в положение 2, при котором параллелепипед покоится на грани со сторонами b и c . Минимальная работа, которую надо совершить для переворота из положения 2 в положение 1, равна E . Найдите работу, которую надо совершить для переворота из положения 2 в 3.

3. Высокий вертикальный цилиндрический сосуд имеет площадь основания $S = 5 \text{ м}^2$. В сосуде находится смесь воды и льда массой $M = 50 \text{ т}$ при постоянной температуре $T = -0.005^\circ\text{C}$. Лед способен образовывать в воде пробку, накрывая воду сверху как поршень, который способен перемещаться без трения. На рисунке приведена зависимость температуры плавления льда от давления. Найдите высоту воды от дна сосуда до ледяной пробки. Плотность воды равна $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, атмосферное давление $P = 101.3 \text{ кПа}$, ускорение свободного падения равно $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.



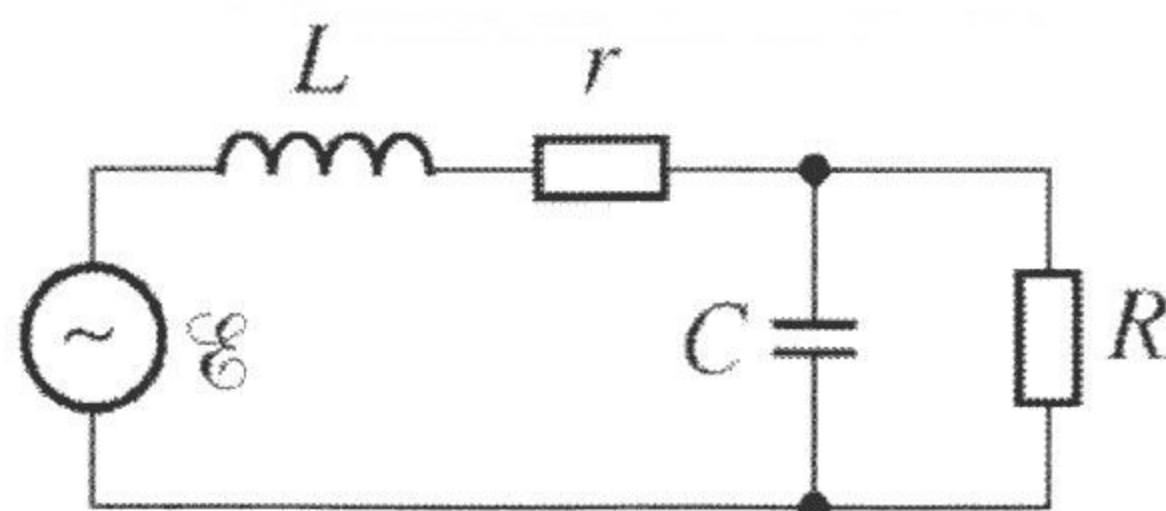
4. От тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F и сечением в виде круга радиуса R отрезали сегмент шириной $R/2$ как показано на рисунке (вид сверху). Оставшуюся часть поставили на зеркальный пол получившимся ребром. На оптической оси линзы на расстоянии $a = 3/2F$ от ее центра расположили точечный источник света. Постройте все его изображения. Для того, чтобы одно из изображений пропало, пол в области $Z > Z_0$ закрасили черной краской. Найдите минимально возможное Z_0 .



5. Жесткий диэлектрический стержень AB горизонтально закреплен между двумя вертикальными стенками. Подвижный блок C соединен с точкой A пружиной жесткости k , а с другой стороны имеется аналогичный неподвижный блок B . Через блоки перекинули нерастяжимую токопроводящую нить длиной $2l$ так, что в начальном состоянии пружина не деформирована, а нить не провисает. Проводящее кольцо K накинули на нить и прикрепили к нему груз массой m . Кольцо может скользить по нити свободно, трение в системе отсутствует. Между блоком B и колечком K подали напряжение U . Найдите зависимость силы тока в цепи I от массы груза m . Ускорение свободного падения равно g , а сопротивление единицы длины нити – ρ , Блоки проводящие, а их размеры и электрическое сопротивление пренебрежимо малы.

Контрольная работа 5

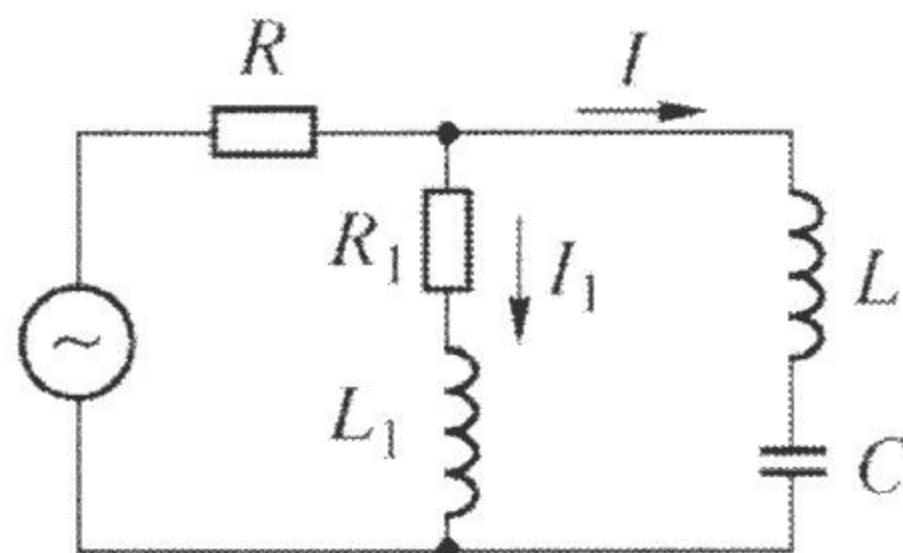
1. Твердый диск, имеющий радиус R , привели во вращение вокруг собственной оси с угловой скоростью ω . Затем диск бросают под углом α к горизонту так, что начальная скорость его центра v_0 лежит в плоскости диска, которая во все время движения остается вертикальной. В момент наивысшего подъема найдите радиус кривизны траектории точки диска, расположенной прямо над его центром.
2. Вдали от астрофизических объектов в космосе покоится шаттл. Командир включает реактивный двигатель, продукты сгорания которого имеют постоянную скорость u относительно шаттла. Известно, что начальная масса шаттла равна m_0 и меняется с течением времени по закону $m = m_0 \exp(-at)$, $a = \text{const}$. Найдите расстояние по прямой, которое пройдет шаттл к тому моменту времени, когда он потеряет 0,999 своей начальной массы.
3. Тонкий равномерно заряженный диск радиуса R несет на себе заряд Q . На диск сверху симметрично кладут заземленный проводящий шар того же радиуса. Определите заряд шара
4. Шар радиуса R заряжен равномерно по объему зарядом Q . Его приводят во вращение вокруг одного из неподвижных диаметров. Вычислите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \gg R$, если угловая скорость вращения равна ω .
5. На рисунке показана цепь, в которой протекает переменный ток. Найдите сдвиг фазы между напряжением источника и напряжением на сопротивлении R .



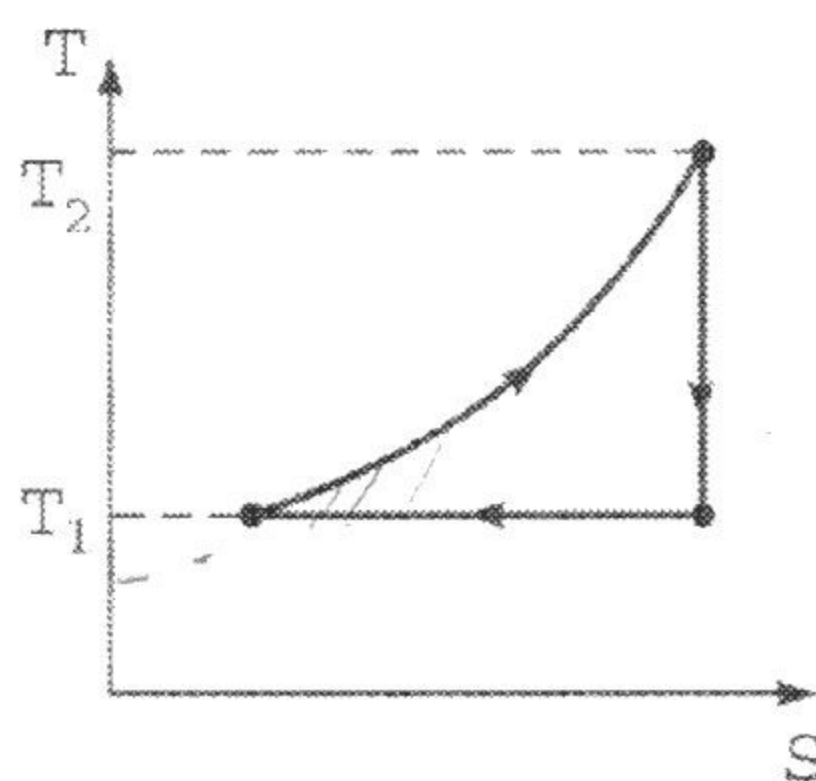
6. Имеется насыщенный водяной пар при температуре 100°C . Вычислите среднее расстояние между молекулами воды.
7. Политропа идеального газа описывается уравнением $PT^{(C-R)/R} \exp\left(-\frac{\alpha T^2}{R}\right) = \text{const}$. Найдите зависимость теплоёмкости C_V от температуры.
8. Цикл Отто, состоящий из пары адиабат и пары изохор. Найдите КПД этого цикла как функцию сжатия n , представляющего собой отношение максимального и минимального объемов газа в этом процессе.

Контрольная работа 6

1. Два тела одинаковой массы m соединены пружинкой жесткости k и покоятся на гладком горизонтальном столе. Вдоль пружинки к одному из тел приложена внешняя гармоническая сила, амплитуда которой равна f_0 . Определите амплитуду колебаний длины пружины если известно, что частота внешней силы в два раза больше собственной частоты колебаний системы.
2. Рассмотрим регулярную прецессию симметричного волчка на плоской горизонтальной поверхности в однородном поле тяготения Земли. Пусть угол наклона оси волчка к вертикали равен α , а точка опоры неподвижна. Найдите угол β к вертикали, который составляет сила давления волчка на плоскость.
3. В пространстве создали вертикальное магнитное поле индукции $B = B_0(1 - ah)$, где a – постоянная, h – высота. Горизонтально расположенное проводящее кольцо массы m и радиуса r отпускают из состояния покоя и оно начинает вертикально падать. Считая известным сопротивление кольца R , найдите зависимость его скорости от времени. Ускорение свободного падения равно g .
4. На рисунке изображена схема, в которой ЭДС изменяется с течением времени по закону $U(t) = U_0 \cos^2 \omega t$. Определите зависимости от времени токов I и I_1 , если выполняется условие $\omega^2 = 1/(4LC)$.



5. Длинный идеально проводящий соленоид имеет длину l_0 и по нему течет ток с силой I_0 . Соленоид начинают то растягивать, то сжимать так, что его длина изменяется по закону $l = l_0 + a \cos \omega t$. Найдите зависимость тока в соленоиде от времени.
6. В атмосфере произошел взрыв атомной бомбы, содержащей 1 кг плутония с атомным весом 242. Пусть на каждый атом плутония приходится образование одной радиоактивной частицы. После взрыва прошло достаточное количество времени, так что ветер равномерно размешал все радиоактивные частицы в атмосфере. Найдите число радиоактивных частиц в 1 дм^3 воздуха. Используйте любые известные вам величины.
7. Рабочее вещество, совершающее цикл, показанный на рисунке, имеет неизвестное уравнение состояния. Цикл изображен в координатах температура-энтропия и все процессы являются политропическими. Рассчитайте КПД цикла.



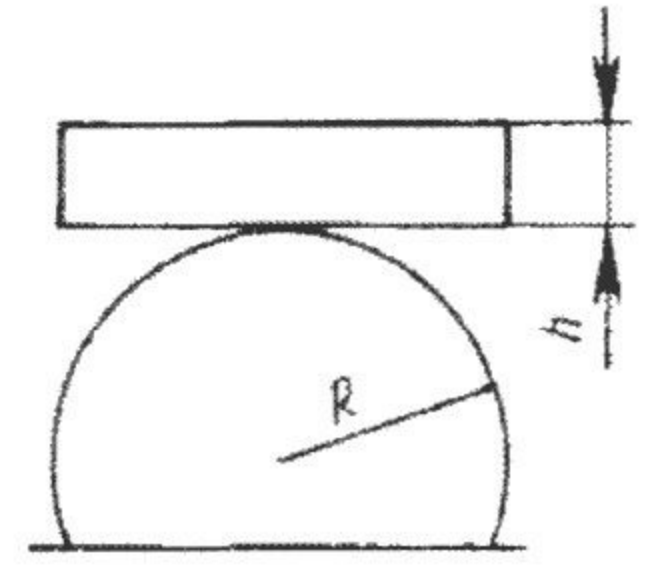
8. Мыльный пузырь радиуса $r = 1 \text{ см}$ находится в атмосфере. Рассчитайте отклонение теплоемкости идеального газа в пузыре от его значения при постоянном давлении. Мыльный раствор имеет коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 50 \text{ мН/м}$.

Контрольная работа 7

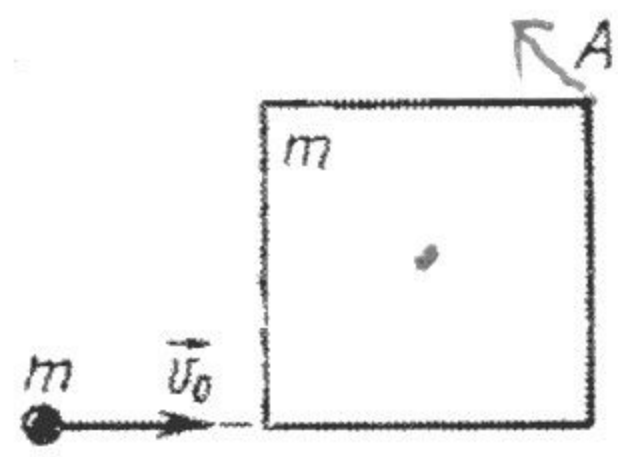
1. Стартовая площадка вращается вокруг Меркурия по круговой орбите, радиус которой в три раза превышает радиус самой планеты. Со стартовой площадки запускают модуль в направлении ее движения так, что его относительная скорость равна первоначальной скорости самой площадки. Найдите угол, под которым стартовая площадка врежется в поверхность Меркурия. Масса площадки в два раза больше массы модуля.
2. Вокруг Луны по круговой орбите с периодом обращения 1,5 часа движется орбитальная станция, представляющая собой сферу радиусом 3 метра. Объекту внутри станции толчком сообщают начальную скорость, лежащую в плоскости ее орбиты. Оцените максимальную скорость объекта относительно станции, при которой объект в течение достаточно длительного времени не сталкивается со стенками станции.
3. Неоднородная деформация пьезоэлектрической пластины толщиной $2d$ привела к ее поляризации. Пусть ось x направлена перпендикулярно пластине, а координата $x = 0$ соответствует ее плоскости симметрии. Известно, что поляризация направлена вдоль оси x и изменяется по закону $P = P_0(1 - x^2/d^2)$. Найдите разность потенциалов между поверхностями пластины и рассчитайте напряженность электрического поля внутри нее.
4. Шар из немагнитного материала равномерно заряжен по поверхности с плотностью σ . Шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью, равной ω . Считая известным радиус шара R , найдите величину индукции магнитного поля в центре самого шара.
5. Металлический диск приводится во вращение вокруг своей оси с некоторой угловой скоростью ω . Перпендикулярно к диску создается однородное магнитное поле, индукция которого равна B . Определите, чему равна разность потенциалов между краем диска и его центром, если радиус диска равен R .
6. В сосуде находится газ при постоянном давлении. Найдите зависимость длины свободного пробега и частоты столкновений молекул от температуры газа.
7. Известно, что поверхностное натяжение ртути равно $\sigma = 0,465$ Н/м и она абсолютно не смачивает стекло. Берут стеклянную пластину, помещают на нее каплю ртути и кладут сверху еще одну стеклянную пластину, параллельную первой. Рассчитайте силу, которую надо приложить к верхней пластине, чтобы сплющить каплю до диска радиуса $r = 5$ см.
8. Тонкая пленка имеет показатель преломления $n = 1.33$. Пленку освещают параллельным пучком белого света, который падает на нее под углом, равным $\alpha = 52^\circ$. Найдите толщину пленки, при которой отраженный свет сильнее всего окрасится в желтый цвет, имеющий длину волны $\lambda = 600$ нм.

Контрольная работа 8

1. На неподвижном цилиндре радиуса R покоится брусок толщины h . Трение между бруском и цилиндром велико. Найдите условие, при котором брусок находится в положении устойчивого равновесия.



2. На гладком горизонтальном столе покоится однородная тонкая квадратная пластина массой m . Дробинка, имеющая массу m и скорость v_0 , попадает в край пластины и сразу застревает. Найдите скорость центра масс системы, изменение кинетической энергии системы и максимальную скорость точки A в процессе движения.

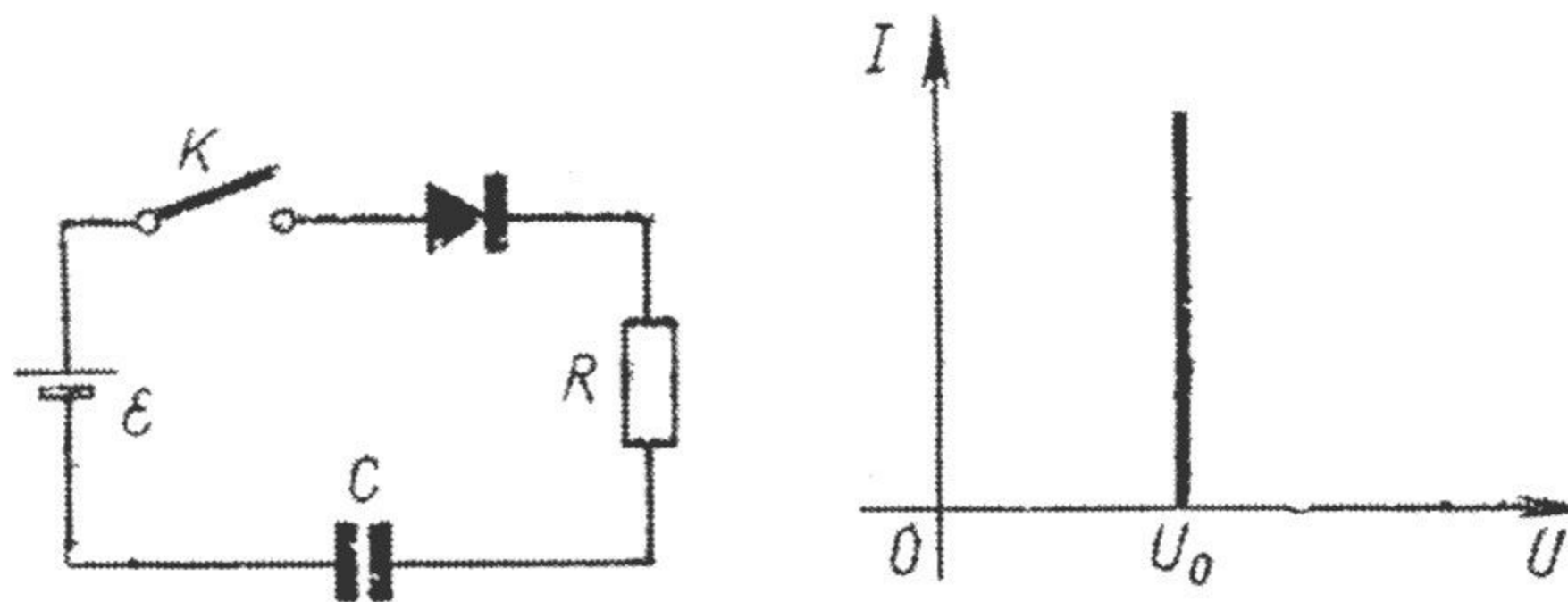


3. Будем считать, что Марс окружен однородной атмосферой высотой 25 км и температурой 300 К. Вычислите среднюю молекулярную массу газа в атмосфере Марса.

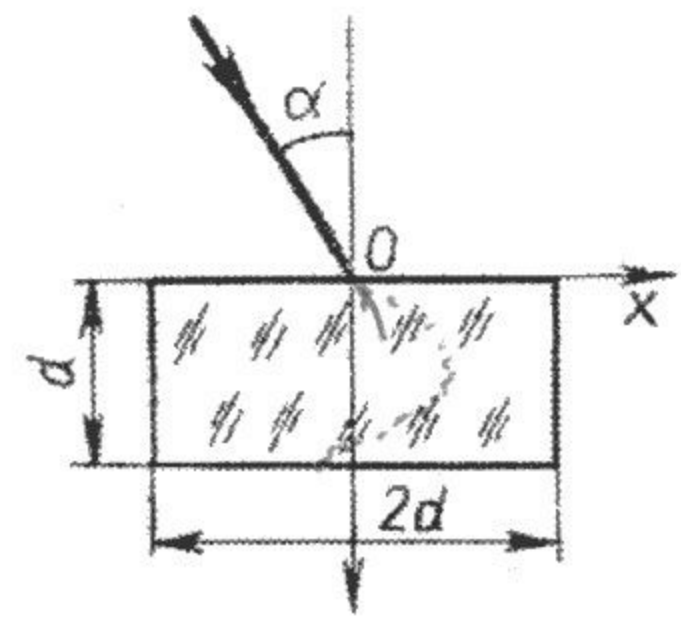
4. Известно, что плотность воздуха на высоте 230 км составляет примерно 10^{-10} кг/м³. Оцените по этим данным среднюю температуру атмосферы нашей планеты.

5. По тонкому диску, имеющему радиус r , равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ . Вычислите разность потенциалов между краем и центром диска.

6. Диод имеет вольт-амперную характеристику, показанную на рисунке, включают по схеме, изображенной там же. Найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе после замыкания ключа K .



7. На плоскопараллельную пластину, имеющую толщину $d = 2$ см и ширину $2d$, падает под углом $\alpha = 30^\circ$ луч света. Известно, что показатель преломления изменяется вдоль оси y по закону $n = n_1 + \frac{n_2 - n_1}{d} y$, где $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. Найдите угол выхода луча из пластины и его смещение в ней.



8. На оси тонкой линзы на расстоянии l от ближайшего фокуса расположен точечный источник света. Найдите оптическую силу линзы, если расстояние от источника до его изображения равно L .

Задание 1

Мотогогонщик участвует в соревнованиях на скорость. Масса мотоцикла с гонщиком равна $m = 200$ кг. Мощность двигателя мотоцикла равна $W = 20$ кВт. Центр масс системы мотоцикл-гонщик расположен посередине между осями и на высоте от дороги, равной расстоянию между осями колёс. Коэффициент трения скольжения колёс с дорогой $\mu = 0,7$.

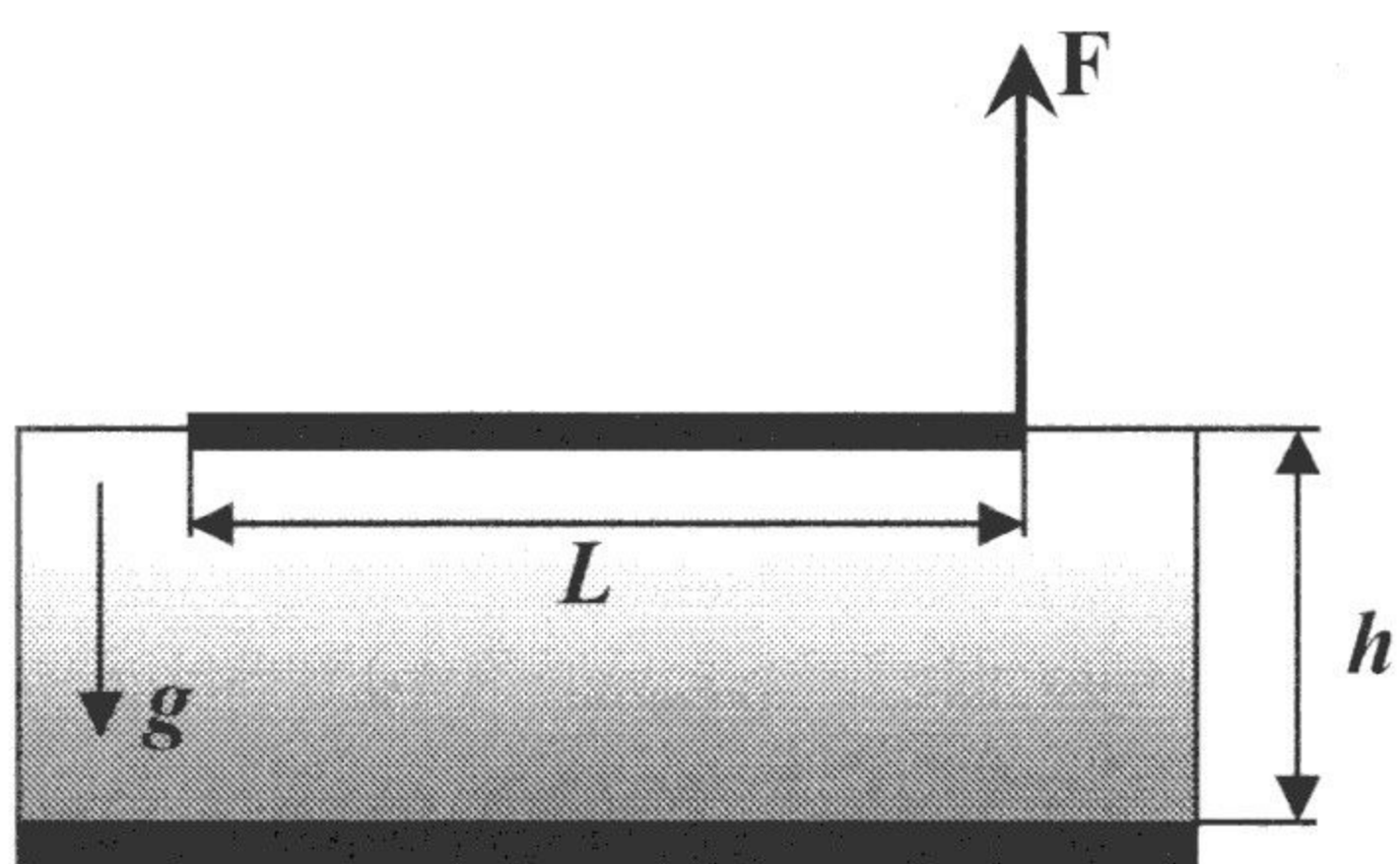
А) Какое минимальное время t потребуется гонщику для разгона мотоцикла до скорости $V = 120$ км/час?

Б) Нарисуйте график зависимости ускорения мотоцикла от его скорости и определите максимальное a_{\max} и минимальное a_{\min} ускорение в процессе разгона.

Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

Задание 2

Длинное тонкое бревно массой m и длиной L плавает на поверхности озера. Подъёмный кран медленно поднимает бревно, зацепив трос за его край.



А) Определите минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы полностью извлечь бревно из воды.

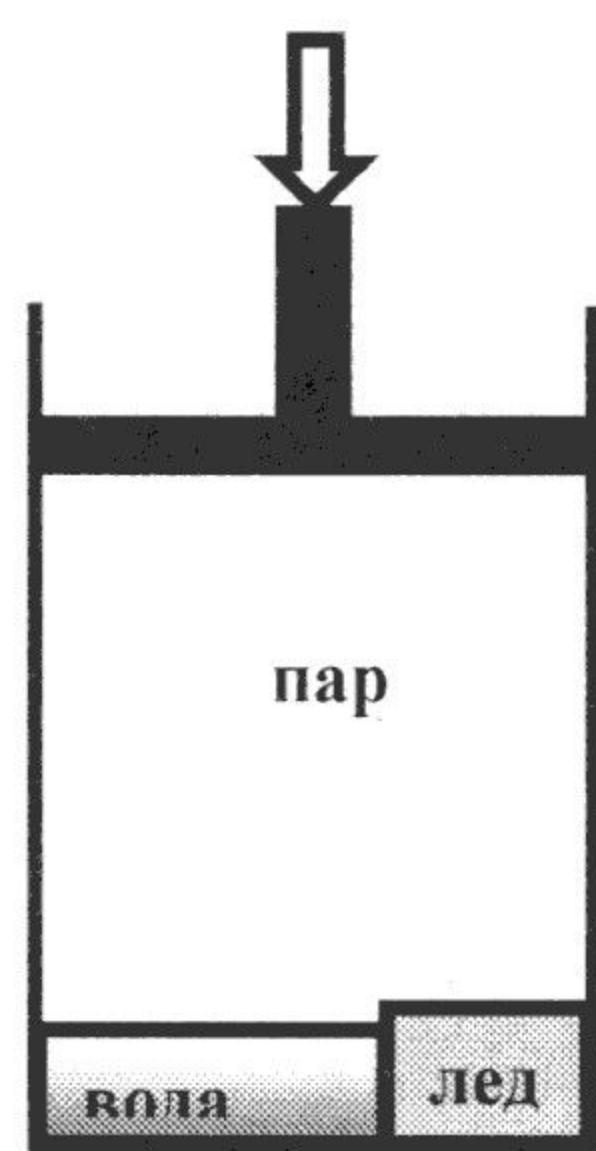
Б) Нарисуйте график зависимости силы натяжения троса от высоты края бревна над поверхностью воды. Укажите на графике все характерные точки.

В) Рассчитайте из графика работу силы натяжения троса при извлечении бревна из воды.

Г) Какова должна быть минимальная глубина озера, чтобы бревно не касалось дна в процессе подъёма?

Задание 3

В теплоизолированном цилиндре с поршнем находится в равновесии 10г льда, 3г воды и 2г водяного пара. Вдвигая поршень, объём сосуда уменьшают вдвое.



А) Определите новый равновесный состав смеси.

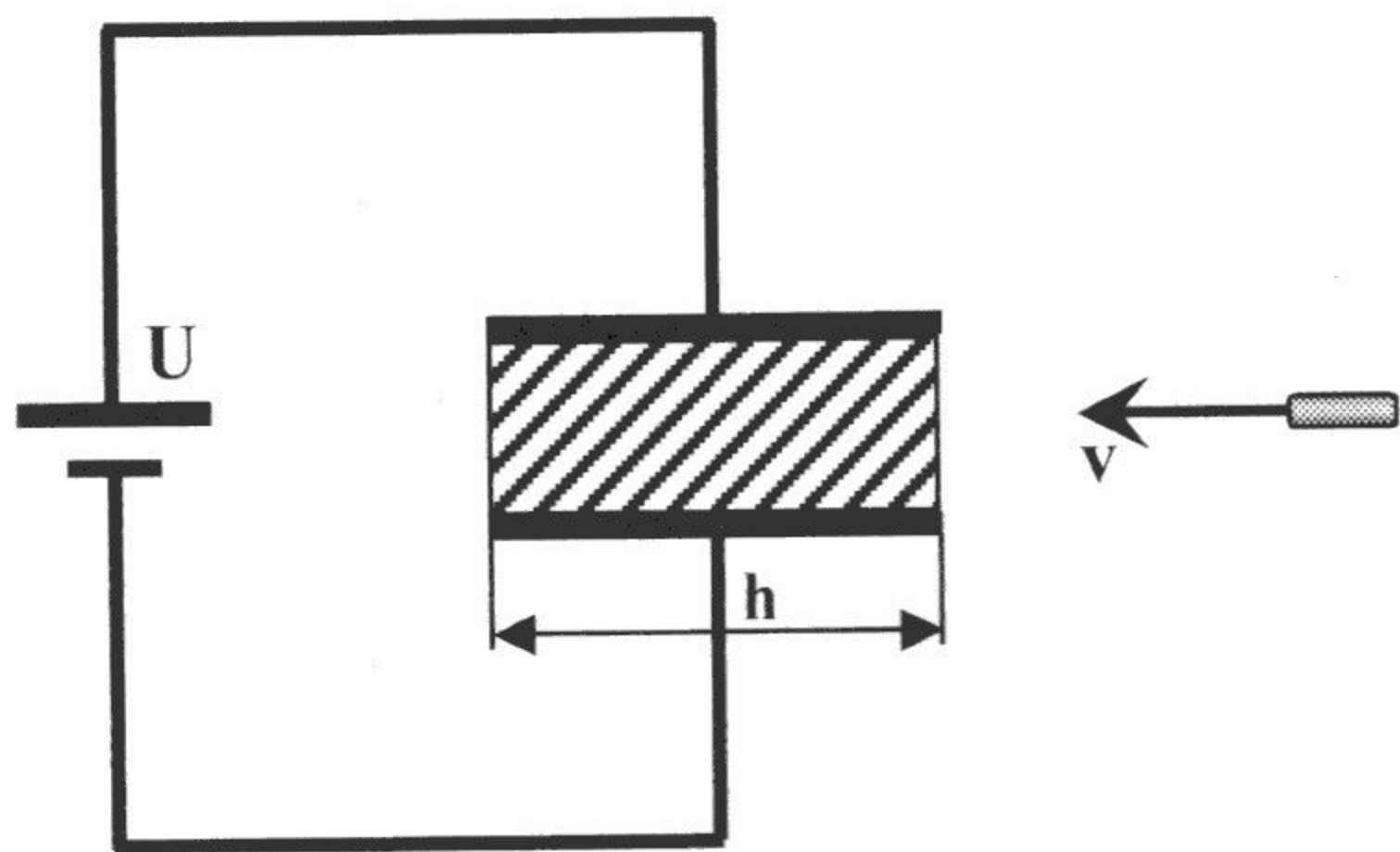
Б) Изобразите качественную зависимость масс компонентов смеси со временем для двух случаев: поршень вдвигается медленно; поршень вдвигается быстро.

Удельная теплоёмкость льда $c = 2.09$ кДж/(кг·К),

Удельная теплоёмкость воды $c = 4.19$ кДж/(кг·К),

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг,

Удельная теплота парообразования воды (при $t = 0$ °С) $r = 2.49$ МДж/кг.



Задание 4

В плоский прямоугольный конденсатор емкости C вставлена диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ и массой M , которая может скользить по пластинам без трения. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U . В какой-то момент времени в диэлектрик попадает пуля массы m и застревает в нем.

Длина пластин конденсатора в направлении движения пули равна h , а размерами самой пули можно пренебречь.

А) При какой минимальной начальной скорости движения пули она сможет выбить диэлектрик из конденсатора?

Б) За какое время при этом диэлектрическая пластина покинет конденсатор?

Экзамен 11

1. Осциллирующая веревка

Тяжелая равномерная веревка длиной L подвешена вертикально из потолка. Канат может колебаться вокруг своего равновесного положения с различными собственными частотами, которые будут обозначены как f_i ($i = 1, 2, \dots$) в порядке возрастания. На фигуре ниже представлена форма веревки в первых трех естественных вибрации, полученные с помощью компьютерного моделирования. Примечательно что горизонтальные и вертикальные масштабы на рисунках не равны. Вы можете предположить, что фактическое боковое смещение веревки намного меньше его длины (малое амплитудное приближение).

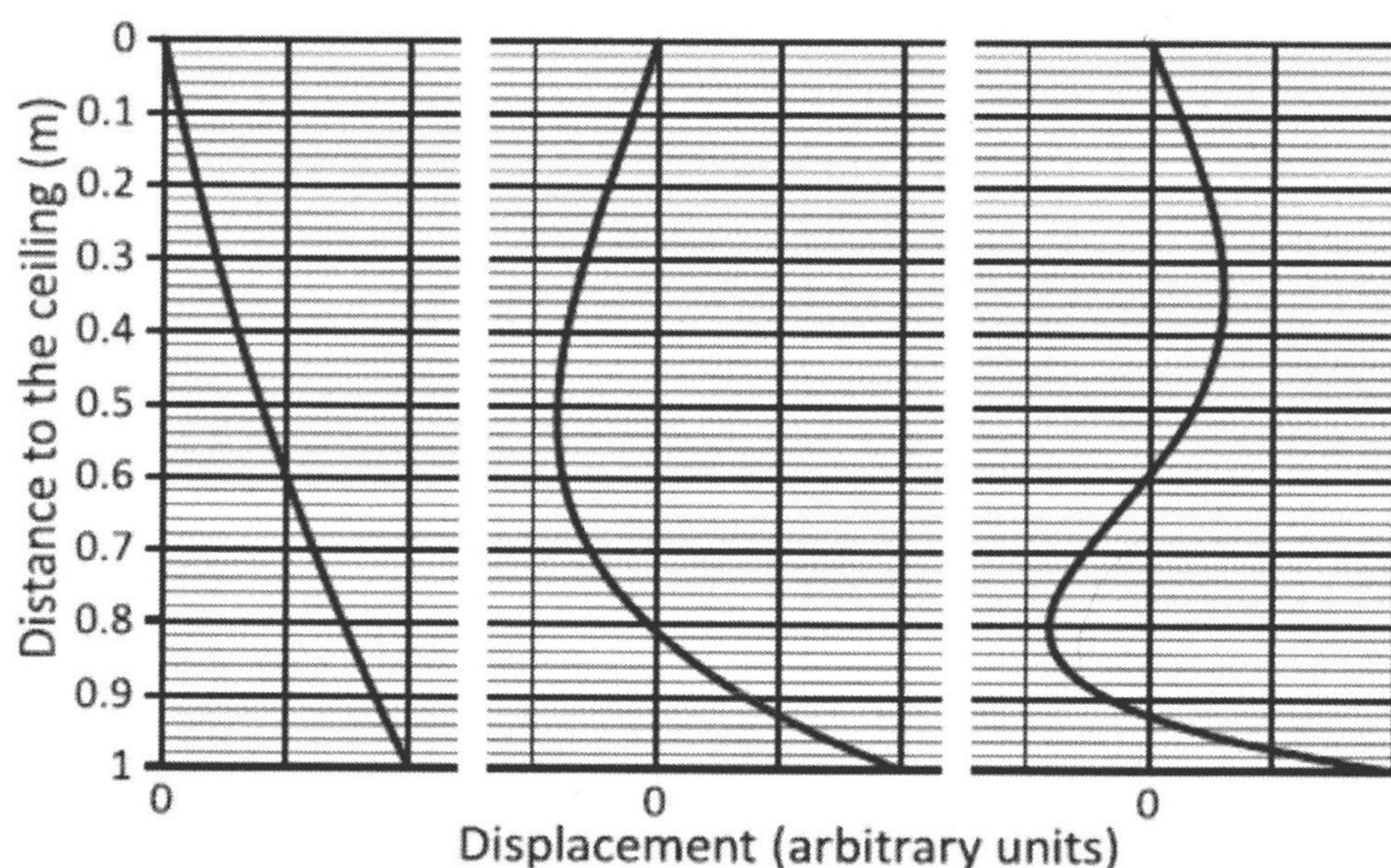


Рисунок: Формы колебательной веревки для первых трех естественных вибрации ($i = 1, 2, 3$ слева направо)

А) Разработать упрощенную модель, которая позволит вам оценить частоту f_1 первой (основной) вибрации веревки. Следовательно, вычислите приблизительно f_1 для веревки длина $L = 1,0$ м.

Предположим, что $g = 9,8$ м / с²

В) С помощью необходимых данных из рисунка, оцените соотношение частот $f_1: f_2: f_3$.

2. Диск в газе

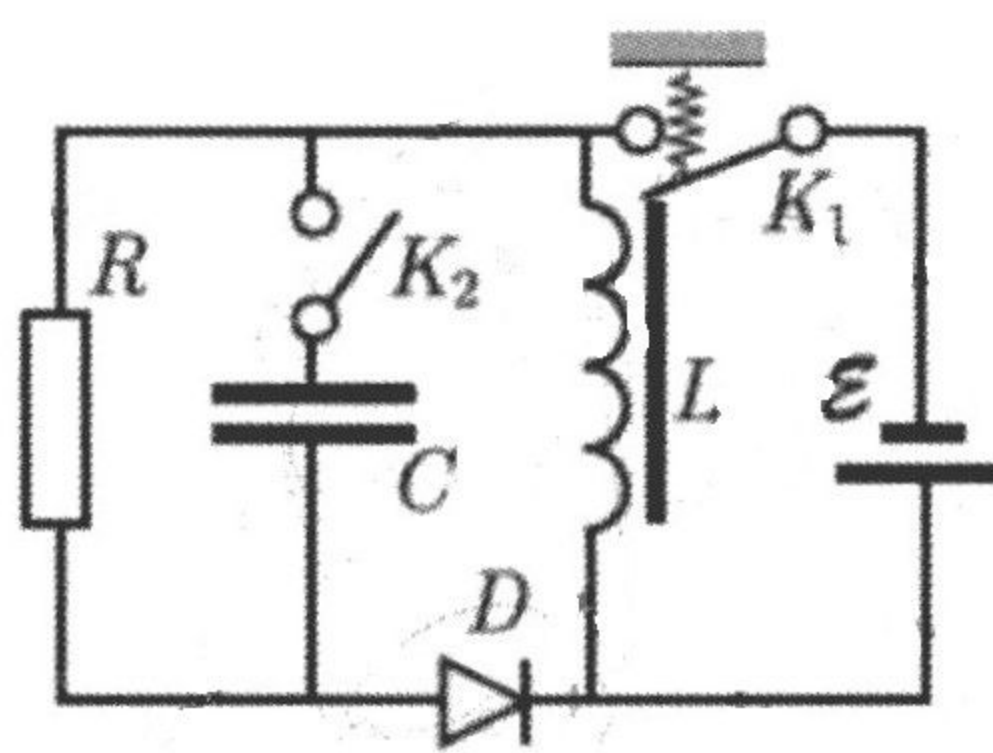
Рассмотрим тонкий плоский диск массы M и площадь поверхности S при температуре T_1 , первоначально покоящийся в невесомости в газе плотностью ρ при температуре T_0 ($T_1 = 1000T_0$). Один из стороны диска покрыт теплоизоляционным слоем, в то время как другая сторона имеет очень хороший тепловой контакт с окружающей средой: молекулы газа массы m получают температуру T_1 диска после столкновения с поверхностью. Оцените начальное ускорение a_0 и максимальную скорость v_{\max} диска во время его последующего движения. Предположим, что теплоемкость диска должна быть порядка Nk_B , где N - число атомов в нем, а k_B - постоянная Больцмана, и считать что молярные массы газа и материала диска имеет тот же порядок. Длина свободного пробега молекул намного больше размера диска. Пренебрегайте любыми краевыми эффектами на краю диска.

3. Сверхпроводящая сетка

Рассмотрим сетку, сделанную из плоского сверхпроводящего листа, путем сверления плотной сетки небольших отверстий сквозь нее. Первоначально лист находится в не сверхпроводящем состоянии, а магнитный диполь дипольного момента m находится на расстоянии a от сетки, которая находится перпендикулярно к сетке. Теперь сетка охлаждается, так что она становится сверхпроводящей. Затем диполь смещается перпендикулярно к поверхности сетки, так что его новое расстояние от сетки равно b . Найдите силу между сеткой и диполем. Шаг сетки отверстий намного меньше, чем a и b , а линейный размер листа намного больше, чем a и b . Потом, найдите работу которую нужно совершить чтобы сместить диполь на бесконечность. Считая, что $b-a=\Delta \ll a$ напишите выражения для малых колебаний.

4. Преобразователь постоянного тока

Для того чтобы получить питания высокого напряжения с помощью батареи, используется следующая схема.



Электромагнитный выключатель K_1 соединяет аккумулятор электродвижущей силы ξ к индуктору индуктивности L : он закрыт, если нет тока в индукторе (пружина держит его закрытой), но если ток индуктора достигнет критического значения I_0 , магнитное поле, созданное индуктором открывает его. Из-за инерции, после того как ключ откроют, требуется некоторое время τ_K , чтобы закрыть его снова, даже если ток падает до нуля.

Для диода D вы можете предположить, что его ток равен нулю при любом обратном напряжении ($V_D < 0$), а также для любого прямого напряжения меньше, чем напряжение открытия V_0 (т. е. для $0 < V_D < V_0$). Для любого ненулевого прямого тока, напряжение диода V_D остается равным V_0 .

Вы можете выразить свои ответы в величинах L , E , I_0 , V_0 , R и емкостью C (см. рисунок).

- Сначала пусть ключ K_2 открыт. Если начальный ток индуктора равен нулю, какое время τ_L потребуется, чтобы открыть ключ K_1 ?
- Предполагая (здесь и в последующих пунктах), что $L/R \ll \tau_K \ll \tau_L$, постройте график зависимости индуктор тока от времени t (для $0 \leq t < 3\tau_L$).
- Какое максимальное напряжение V_{\max} наблюдается на резисторе R ?
- Предполагая, что $V_{\max} \gg V_0$, какая средняя мощность диссоциируется на диоде D ?
- Теперь пусть ключ K_2 замкнут и будем считать упрощенно, что $V_0 = 0$; также RCL и $\dot{A} K \dot{E} \frac{1}{4}$ р LC . Предположим, что схема работает очень долго время. Найдите среднее напряжение на резисторе.
- Найдите амплитуду колебаний напряжения на резисторе.

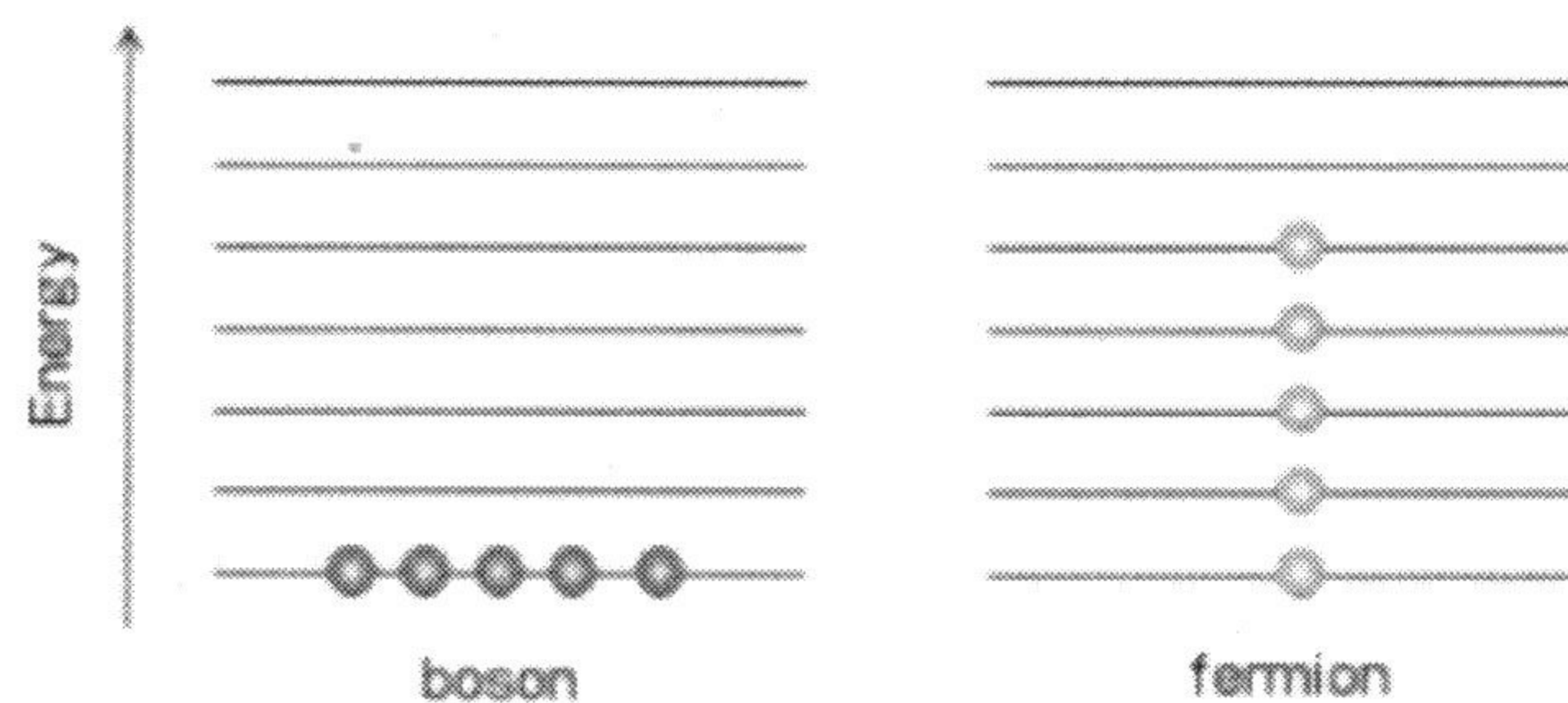
Экзамен 5

Задача 1. Конденсация Бозе-Эйнштейна

Постоянная Планка $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Дж * с

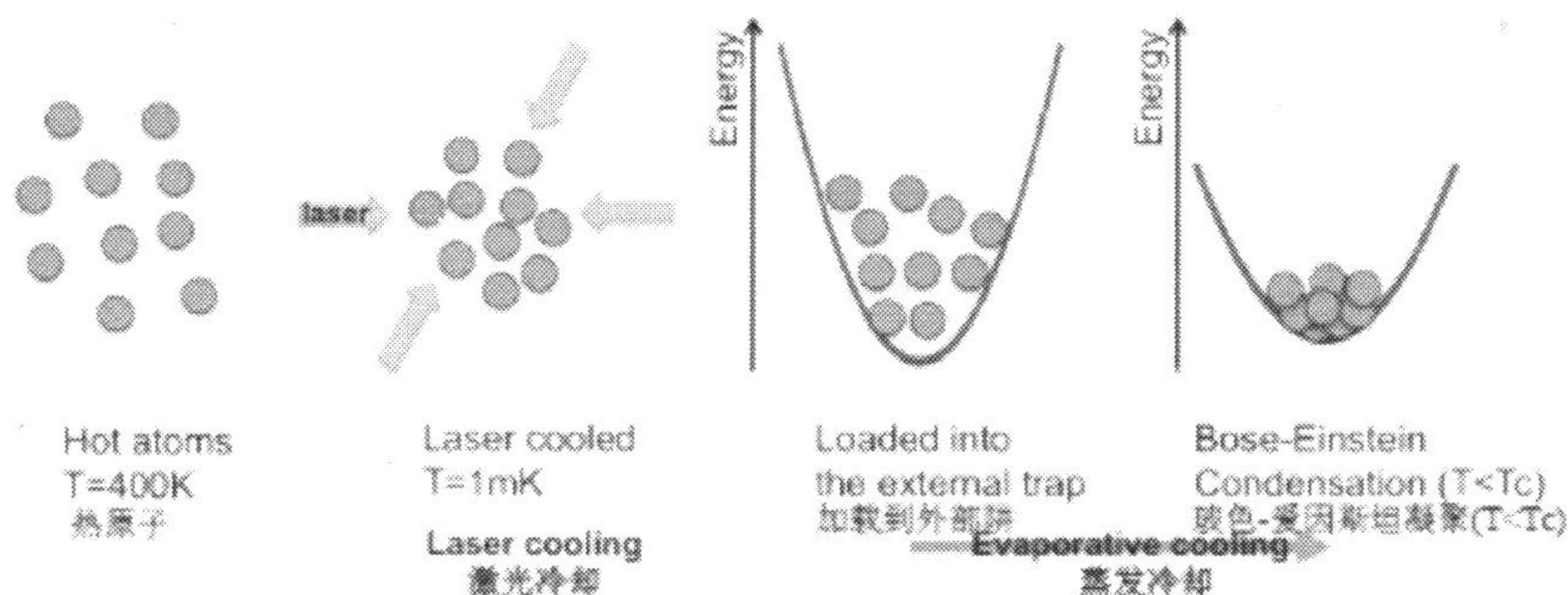
Постоянная Больцмана $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ Дж * К⁻¹

В природе частицы классифицируются на два разных типа: бозоны и фермионы. Бозоны (например, фотоны) представляют собой частицы, которые любят быть вместе в одном и том же состоянии. Напротив, фермионы (например, электроны, протоны и нейтроны) вряд ли войдут в уже занятое состояние в соответствии с принципом исключения Паули. Статистическая механика говорит нам, что когда система бозонов достигает критической плотности в ловушке, она претерпевает переход, что большое количество бозонов будет иметь тенденцию занимать одно и то же самое низкое энергетическое состояние. Это явление называется конденсацией Бозе-Эйнштейна. На следующем рисунке показано, как бозоны и фермионы занимают энергетические состояния, когда температура приближается к 0 К.



Недавняя разработка улавливания и охлаждения ультрахолодных атомов (например, атомов натрия, рубидия и лития) открыла путь для наблюдения конденсации бозе-эйнштейновских атомов в ультрахолодной температуре (Нобелевская премия по физике 2001), теоретически предсказанная Бозе и Эйнштейна в 1924 году. Для достижения ультрахолодной температуры около 10-100 нК использовалось несколько различных методов охлаждения (примечание 1 нК = 10⁻⁹К). Например, горячие атомы рубидия, полученные при 400 К, охлаждаются до ~ 1 мК с помощью технологий лазерного охлаждения (Нобелевская премия по физике в 1997 году). Такие холодные атомы, полученные методом лазерного охлаждения, обычно загружаются во внешнюю ловушку (полученную либо магнитным, либо оптическим полем) для дальнейшего охлаждения, как показано ниже.

Laser cooling and trapping Rubidium atoms 激光冷却和捕获铷原子



А. Распределение Максвелла-Больцмана и тепловая длина волны де-Бройлевских частиц.

Рассмотрим разбавленный газ атомов. Межчастичные взаимодействия очень слабы. В этом случае газ может быть описан моделью идеального газа, в которой частицы свободно перемещаются внутри неподвижной ловушки, не взаимодействуя друг с другом, за исключением очень коротких упругих соударений, чтобы достичь теплового равновесия.

В этой атомной газовой системе распределение вероятностей скорости частицы v задается распределением Максвелла-Больцмана,

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}},$$

где m - масса атома, k_B - постоянная Больцмана, T - температура газа в единице Кельвина [K].

A1	Выведите наиболее вероятную скорость v_{mp} частицы при температуре T .	
A2	На основе наиболее вероятной скорости v_{mp} , полученной в A1, запишите характеристическую длину волны де Бройля λ_{dB} частицы в атомном газе при температуре T .	

Так как частицы в газе атомов имеют разную скорость по распределению Максвелла-Больцмана, полезно рассмотреть тепловую длину волны де Бройля (λ_T), определяемую как $\lambda_T = \lambda_{\text{dB}} \times \pi^{-\frac{1}{2}}$. Здесь мы выводим температуру Бозе-Эйнштейна T_c для газа N невзаимодействующих (бозонных) атомов массы m в трехмерном ящике с объемом V . Мы рассмотрим простую физическую картину, что происходит конденсация Бозе-Эйнштейна, когда характерная межчастичное расстояние между бозонными атомами становится сравнимым с тепловой длиной волны Бройля λ_T . (Постоянная Планка $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Дж * с, постоянная Больцмана $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ ДжК⁻¹)

A3	Каков ожидаемый T_c атомов $N = 10^5$ с массой $m = 1.445 \times 10^{-25}$ кг, захваченных в ловушку с объемом $V = 105$ мкм ³ ? (1 мкм ³ = 10 ⁻¹⁸ м ³)	
----	--	--

В. Испарительное охлаждение во внешней ловушке

$$r = h k T$$

$$n = \frac{N}{V}$$

Температуры, достигаемые при лазерном охлаждении, чрезвычайно низки (<1 мК), но они недостаточно холодны, чтобы реализовать конденсацию Бозе-Эйнштейна. На сегодняшний день бозе-эйнштейновская конденсация щелочных атомов была достигнута за счет использования испарительного охлаждения после того, как атомы загружены во внешнюю ловушку. Во время испарительного охлаждения, когда атомы, выходящие из ловушки, имеют кинетическую энергию выше средней энергии атомов в ловушке, остальные атомы охлаждаются.

В следующих задачах части В мы оценим эффект испарительного охлаждения. Для атомов, захваченных в ящик фиксированного объема и не имеющих теплообмена с окружающей средой, мы предполагаем, что средняя энергия захваченных атомов равна ϵ и небольшое число атомов $|\Delta N|$ испаряются в течение короткого времени Δt со средней энергией $(1 + \beta)\epsilon$, где $\beta > 0$. В ходе процесса небольшое изменение числа атомов $\Delta N < 0$ приводит к изменению $\Delta\epsilon < 0$ в средней энергии остальных атомов. Предположим также, что $\left|\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon}\right| \ll 1$ и $\left|\frac{\Delta N}{N}\right| \ll 1$.

[Примечание: в производном отношении вы можете игнорировать член $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \frac{\Delta N}{N}$, так как $\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \ll 1$ и $\left|\frac{\Delta N}{N}\right| \ll 1$.]

B1	Выведите связь между $\Delta\varepsilon$ и ΔN с β , ε и N .	
----	---	--

Теперь рассмотрим холодные атомы при начальной температуре $T_i = 200\mu\text{K}$ в ловушке. Предположим, что мы удаляем 1% атомов (т. е. $\left|\frac{\Delta N}{N}\right| = 0,01$) в течение каждого периода времени Δt и $\beta = 2$.

B2	Затем оценивают конечную температуру T_f атомов после испарительного охлаждения за общий период времени $350\Delta t$.	
----	---	--

С. Температура Бозе-Эйнштейна T_c в гармоническом потенциале

В реальном эксперименте с ультрахолодными атомными газами газ бозонных атомов захватывается трехмерной гармонической ловушкой, генерируемой лазерным лучом или магнитным полем. Здесь мы рассмотрим трехмерную ловушку, характеризуемую гармоническим потенциалом:

$$U_{trap} = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2).$$

C1	Рассмотрим тот факт, что ультрахолодные атомы колеблются вокруг дна ловушки с характерной частотой захвата $\frac{\omega_i}{2\pi}$ вдоль i -го направления. Выведите характерный объем, ограничивающий атомы через T и $\omega_{x,y,z}$.	
C2	Выведите температуру конденсации Бозе-Эйнштейна T_c атомов, захваченных в гармоническую ловушку, рассмотренную в части C1 в терминах ω_i и N .	
C3	Какова температура конденсации Бозе-Эйнштейна T_c $N = 10^4$ атомов массы $m = 1,445 \times 10^{-25}$ кг в гармонической ловушке с коэффициентами захвата $\frac{\omega_x}{2\pi} = \frac{\omega_y}{2\pi} = \frac{\omega_z}{2\pi} = 100$ Гц?	

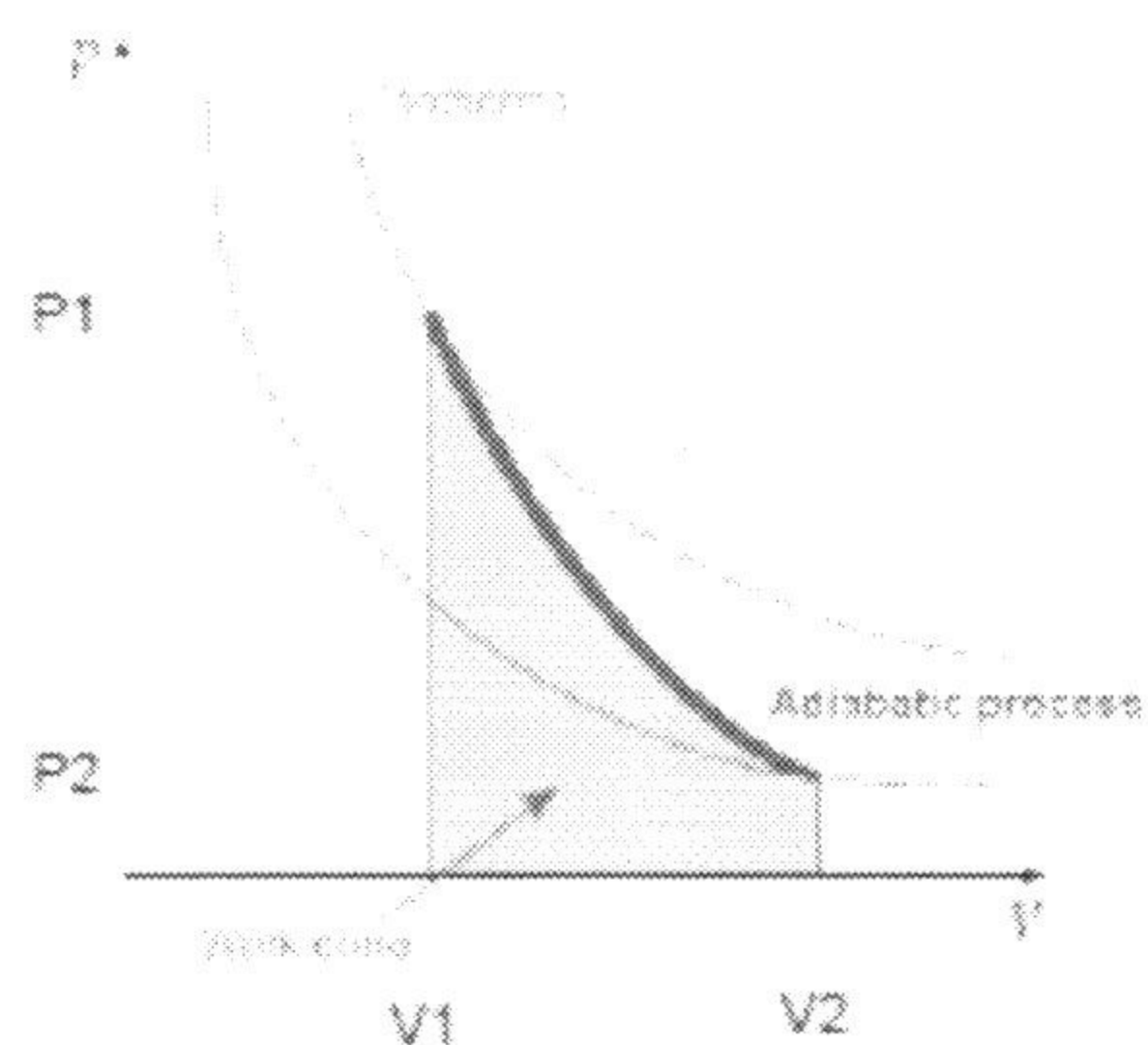
Обратите внимание, что испарительное охлаждение достаточно эффективно для достижения конденсации Бозе-Эйнштейна.

Д. Адиабатическое охлаждение путем медленного расширения ловушки

Охлаждение атомных газов до более низких температур было обусловлено стремлением наблюдать новые формы материи, такие как сверхтекучие. Однако испарительное охлаждение, о котором мы говорили в части В, не всегда предпочтительнее, так как ряд атомов покидает ловушку во время процесса. В этой части мы рассматриваем другую технологию охлаждения (так называемое адиабатическое охлаждение), медленно расширяя ловушку, не теряя атомов.

D1	Рассчитайте долю атомов, оставшихся в ловушке, после испарительного охлаждения, описанного в части В2.	
----	--	--

Рассмотрим N атомов во внешней гармонической ловушке с коэффициентами захвата $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 2\pi f_0$ при температуре $T_1 = 105 \text{ nK} = 1,05 \times 10^{-7} \text{ K}$. С этого момента мы предполагаем, что весь атомный газ можно рассматривать как монокатомный идеальный газ. На этом этапе атомный газ имеет давление P_1 и объем V_1 , как описано на рисунке ниже.



Теперь рассмотрим адиабатический процесс декомпрессии атомов N , захваченных в гармонической ловушке. Для этого мы адиабатически меняем частоты захвата ловушки гармонических потенциалов от $\omega_{x,1} = \omega_{y,1} = \omega_{z,1} = 2\pi f_0$ до $\omega_{x,2} = 2\pi f_0$ и $\omega_{y,2} = \omega_{z,2} = \frac{2\pi f_0}{10}$, следуя адиабатическому процессу на диаграмме P - V . Обратите внимание, что нет никакого теплообмена между атомарным газом и окружающей средой (фактически вакуум), и никакие атомы не покидают ловушку во время процесса.

D2	Вычислите конечную температуру атомарного газа после адиабатической декомпрессии ловушки.	
----	---	--

Задача 2. Плавающие микроорганизмы

Хотя объекты в воде, как правило, тонут в гравитационном поле, микроорганизмы, такие как парameций, могут контролировать их направления плавания, не обязательно подверженные гравитационному полю. Недавно физики предложили, чтобы их модели плавания были связаны с их асимметричной формой. Когда они плавают в вязкой жидкости, они испытывают асимметричные силы сопротивления, которые могут заставить их вращаться.

А. Резистивные силы и крутящие моменты в вязкой жидкости

Для стержня, имеющего поступательное движение в вязкой жидкости, существуют два вида резистивных сил. В этом вопросе мы будем называть резистивную силу, действующую в нормальном направлении стержня, как *сопротивление* (drag force), и резистивную силу вдоль направления стержня в качестве *трения* (friction force), как показано на рис. 1 (а). Величина сопротивления на единицу длины аппроксимируется как μv_{\perp} , а трение на единицу длины как $\frac{\mu v_{\parallel}}{2}$, где v_{\perp} и v_{\parallel} - компоненты скорости, нормальные и параллельные оси стержня соответственно, а μ постоянная, пропорциональная вязкости жидкости.

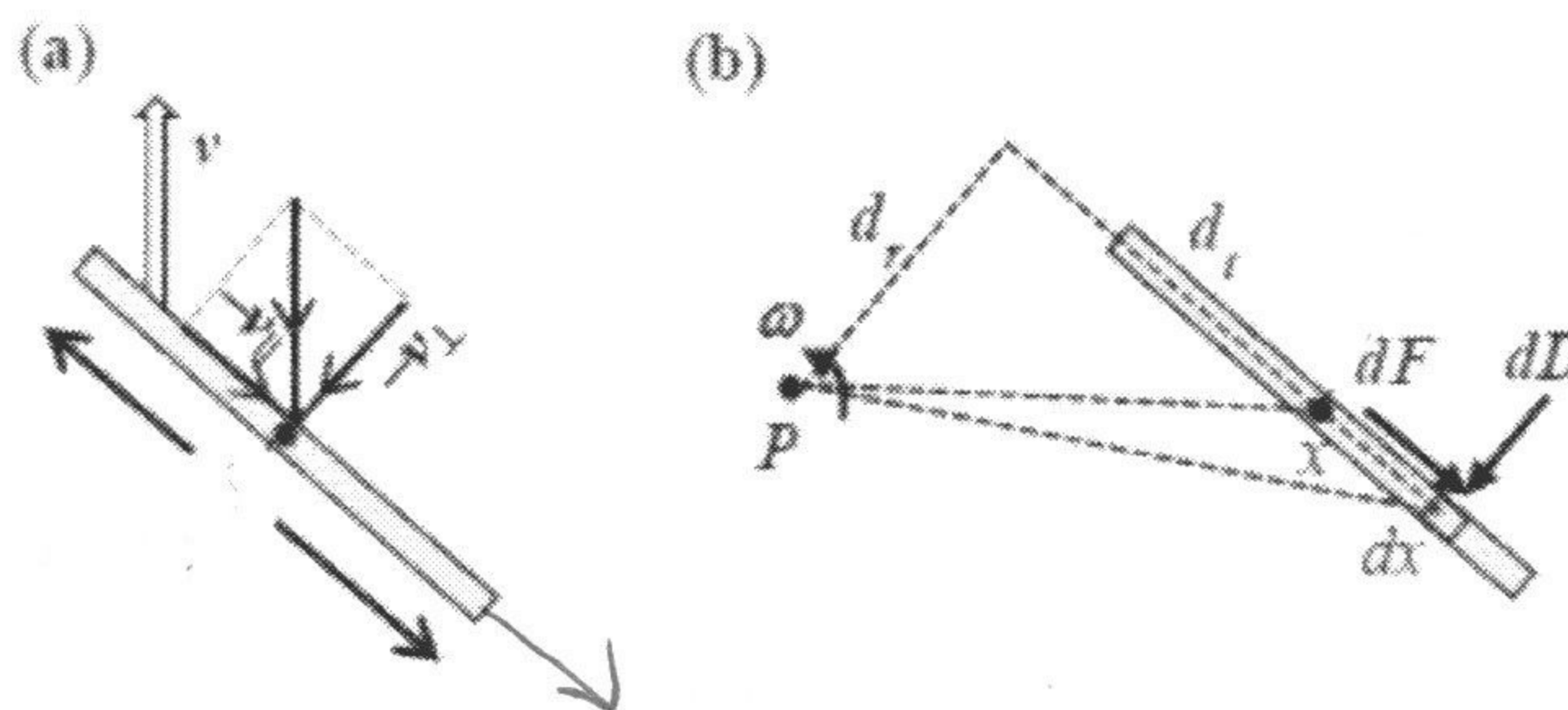


Рисунок 1: (а) Направления резистивных сил, действующих на стержень, движущийся в вязкой жидкости со скоростью v , обозначенной как белая стрелка. Сила сопротивления направлена вдоль $-v_{\perp}$ и сила трения вдоль $-v_{\parallel}$. (б) Резистивные силы, действующие на элемент стержня, вращающийся вокруг точки P в той же плоскости на радиальном расстоянии dr и тангенциальном расстоянии dt от его центра.

Как показано на рис.1 (б), рассмотрим опорную точку P , радиальные и тангенциальные расстояния которой от центра стержня равны dr и dt соответственно. Если стержень имеет фиксированное положение и ориентацию относительно P , а P имеет поступательное движение, то резистивные силы, действующие на стержень, могут быть рассчитаны с использованием рис.1 (а). Однако, если стержень также вращается в одной и той же плоскости вокруг P с угловой скоростью ω , будут возникать дополнительные силы и моменты, действующие на стержень из-за сопротивления и трения.

A1	Выведите трение F из-за вращательного движения.	
A2	Выведите сопротивление D из-за вращательного движения.	
A3	Выведите крутящий момент τ_f вокруг оси вращения из-за трения.	
A4	Выведите крутящий момент τ_d вокруг оси вращения из-за сопротивления.	

В. Пассивный микропроцессор без вращения

Асимметричный микроразмер L-образный с размерами, показанными на рисунке 2 (а). Масса микропроницателя равна m , а плотность однородна. Длины длинного и короткого плеч $4b$ и $2b$ соответственно. Ширина и толщина двух плеч незначительны.

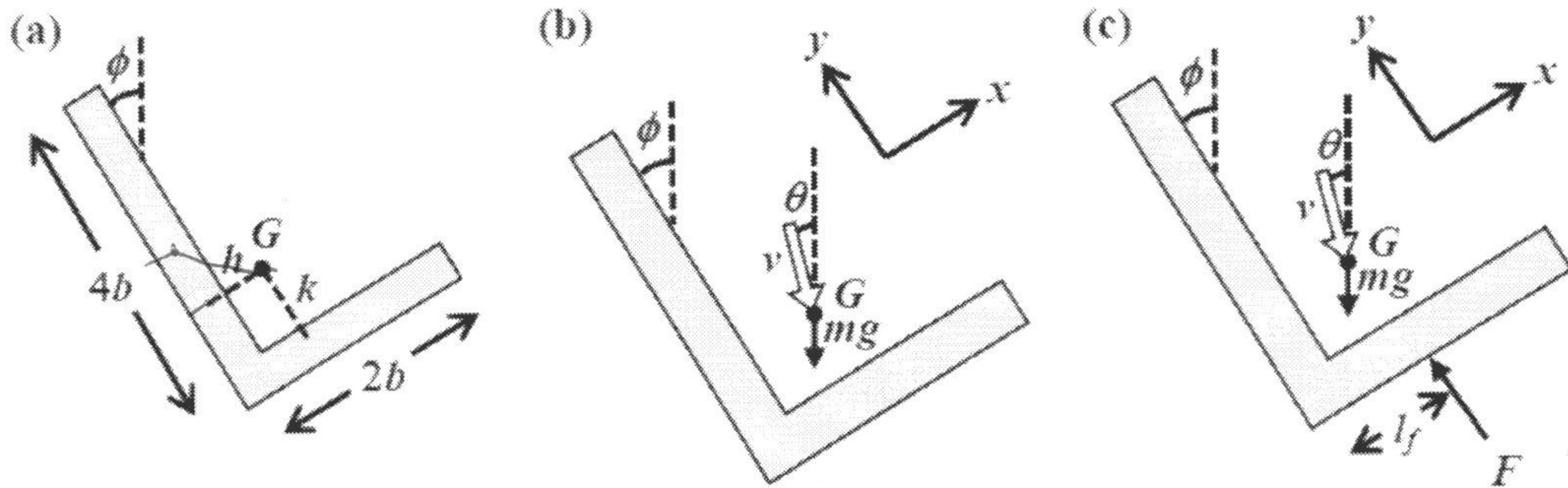


Рисунок 2: (а) Размеры микроснимка. (б) Вес и скорость пассивного микроснимка. (с) Активный микропроницатель

Пассивный микроразмер не имеет самодвижения. Центр массы G микроснимка находится на расстоянии h и k от средних линий длинного и короткого плеч соответственно.

B1	Напишите выражения h и k .	
----	--------------------------------	--

L-образный микроснимчик наклоняется на угол ϕ , как показано на рис. 2 (b), и опускается со скоростью v в направлении, наклоненном под углом θ с вертикалью в присутствии гравитационного ускорения g . Микроснимчик не вращается. Предположим, что высота жидкости незначительна по сравнению с весом микропроницателя.

B2	Напишите уравнение, состоящее из компонентов всех сил вдоль оси y (направление длинного плеча).	
B3	Напишите уравнение, состоящее из компонентов всех сил вдоль оси x (направление короткого плеча).	
B4	Напишите уравнение, состоящее из моментов всех сил вокруг центра масс.	
B5	Рассчитайте угол наклона микропробудера ϕ в устойчивом состоянии. Дайте свой ответ в градусах.	
B6	Вычислите направление движения микропроцессора θ в установившемся режиме. Дайте свой ответ в градусах.	

С. Активный микропроход с вращением

Для моделирования активного микромира физики осуществили индуцированную лазером химическую реакцию в точке на более коротком плече объекта, так что она обеспечивает самодвижущуюся силу F , нормальную к короткой стреле. Динамические свойства микроснимчика довольно чувствительны к точке приложения F . Для удобства рассмотрим случай, когда эта точка расположена на расстоянии $l_f = \frac{13}{24}b$ от угла (см. Рис. 2 (с)). Сила может регулироваться путем настройки интенсивности лазера инцидента на микроснимке. Обратите внимание, что возможно, что микросъемщик может вращаться так, чтобы в него включались силы и моменты вращения. Скорость v , направление θ и угол наклона ϕ становятся зависимыми от времени, и вам нужно будет включить угловую скорость $\dot{\phi}$ в качестве одной из переменных.

C1	Напишите уравнение, состоящее из компонент всех сил вдоль оси y (направление длинной руки).	
C2	Напишите уравнение, состоящее из компонент всех сил вдоль оси x (направление короткой руки).	
C3	Напишите уравнение, состоящее из моментов всех сил вокруг центра масса.	

Вышеуказанные три уравнения могут быть решены для трех переменных $v\cos(\phi - \theta)$, $v\sin(\phi - \theta)$ и $\dot{\phi}$.

C4	Исключите $v\cos(\phi - \theta)$ и $v\sin(\phi - \theta)$ из приведенных выше уравнений, чтобы получить уравнение только с ϕ и $\dot{\phi}$.	
C5	Выведите угол наклона ϕ , когда микроразмер достигнет устойчивого состояния постоянный наклон.	
C6	Сначала рассмотрим микроразмер в устойчивом состоянии с $F = 0$. При $t = 0$ лазер включен, так что F становится ненулевым. Рассчитайте $\phi(t)$ для $F \ll mg$.	

Когда F постепенно увеличивается с 0, направление линейного движения постепенно меняется. Когда F превышает критическое значение, угол наклона больше не является постоянным, и микроснимник принимает колесообразную траекторию.

C7	Напишите максимальное значение F для линейного движения.	
C8	Чтобы убедиться, что микроснимник может двигаться в широком диапазоне направлений, вычислите силу (силы), требуемую для линейного движения в горизонтальном направлении $\theta = \pi / 2$. Дайте свой ответ в кратных mg до 3 значащих цифр.	

Задача 3. Строка и масса

В этом вопросе все колебательные движения считаются малыми.

Как показано на рис.3, строка массы m и длина l с натяжением τ имеет массу M , прикрепленную к концу. Масса M может скользить в вертикальном направлении на трыповом стержне при $x = l$. Форма строки описывается функцией $y(x, t)$. Строка фиксирована в начале координат $y(0, t) = 0$.

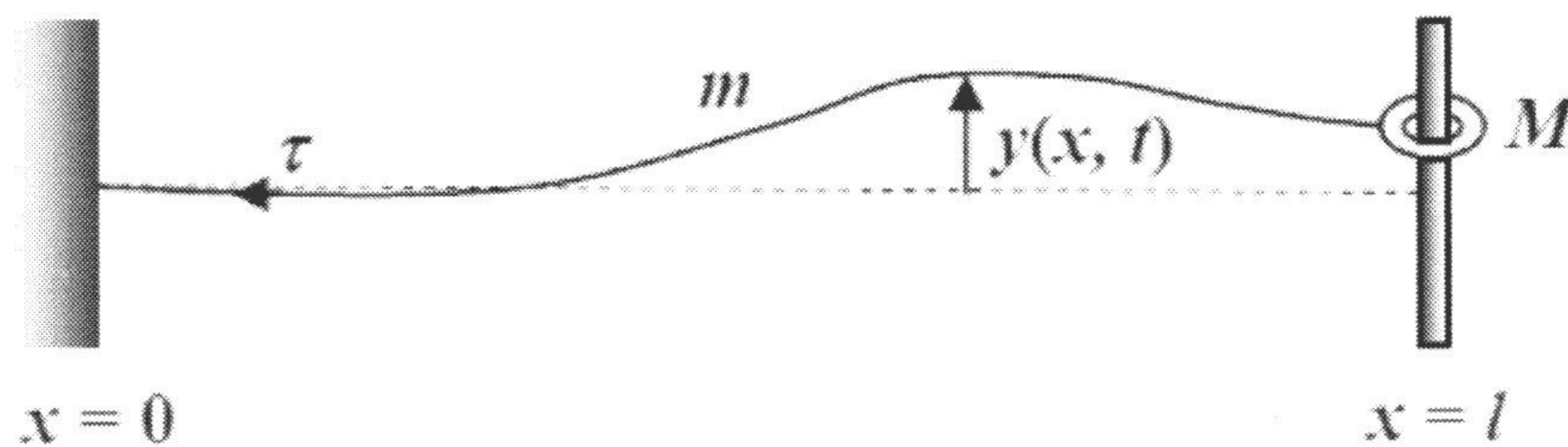


Рисунок 3

- Сначала предположим, что масса M удерживается фиксированной при $y = 0$. Запишем общее решение $y(x, t)$ для стоячих волн на струне. Выразите свой ответ в терминах заданных параметров и произвольных констант.
- Предположим теперь, что масса M может скользить вверх и вниз по гладкому стержню при $x = l$. Каково граничное условие на $y(x, t)$ при $x = l$? Вы можете предположить, что колебания малы.
- Запишите уравнение для частот стоячих волн на струне, когда масса M свободна для скольжения. Вам не нужно решать уравнение.
- Если $m \ll M$, найдите две самые низкие частоты нормальной моды.
- При $m \ll M$ рассчитайте отношение кинетической энергии струны к отношению массы M при самой низкой нормальной частоте.
- Если $m \gg M$, найдите две самые низкие частоты нормального режима.
- Для $m \gg M$ вычислим отношение кинетической энергии струны к отношению массы M при самой низкой частоте нормального режима.
- Рядом с концом $x = l$ генерируется бегущая волна с угловой частотой ω . Он распространяется по массе M и отражается сдвигом фазы $\pi / 2$. Каково значение ω в терминах τ, m, M и l ?