Решение задач 3-го этапа Республиканской олимпиады по физике, 2022

11 класс

Задача 1[(8 баллов]

(a)

Записывает момент импульса для шара

$$L = (1 + \beta)pr \qquad [1 \text{ балл}] \qquad (1)$$

Условие не проскальзывания

$$v = \omega r \qquad [0.5 \text{ балла}] \qquad (2)$$

Использует момент инерции для нижней точки

$$I = I_{CM} + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2 \qquad [0.5 \text{ балла}] \qquad (3)$$

$$L = I\omega \qquad [1 \text{ балл}] \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (4)

$$(1 + \beta)pr = \frac{7}{5}m\omega r^2 \quad [1 \text{ балл}] \qquad (5)$$

Получает конечное выражение

$$v = \frac{5(1+\beta)p}{7m} \qquad [1 \text{ балл}] \qquad (6)$$

(b)

Записывает выражение для импульса

$$p = mv \qquad [0.5 \text{ балла}] \qquad (7)$$

Использует выражение (6) для равенства импульсов

$$(1 + \beta)p = \frac{7}{5}p \qquad [2 \text{ балла}] \qquad (8)$$

Получает конечное выражение

$$\beta = \frac{2}{5} \qquad [0.5 \text{ балла}] \qquad (9)$$

Задача 2 [7 баллов]

Первый способ.
Так как любую работу можно превратить в энергию без потери тепла, то по первому закону термодинамики:

$$dQ_0 + dQ_1 + dQ_2 = 0$$ [2 балла]

По второму закону термодинамики, учитываю, что для максимальной эффективности процесс должен быть обратным:

$$\frac{dQ_0}{T_0} + \frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0.$$ [3 балла]

Из этих уравнений, избавившись от dQ_0:

$$-dQ_{2min} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} dQ_1 \approx 0{,}16 dQ_1$$ [2 балла]

Второй способ.

К этому же ответу можно прийти, рассмотрев цикл Карно.

1. Используя цикл Карно, где нагреватель это огонь, а холодильник это улица, можно получить работу $A = dQ_2 \frac{T_2 - T_0}{T_2}$, взяв dQ_2 теплоты у огня. [2 балла]
2. Построим обратный цикл Карно (по принципу холодильника) между улицей и комнатой, и, используя работу A, будем нагревать комнату и охлаждать улицу. В данном случае КПД холодильника будет немного отличатся от обычного, так как полезной составляющей является тепло переданное нагревателю (в нашем случае это комната).

$$\eta = \frac{Q_1}{\text{A}} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$$ [2 балла]

Отсюда получаем dQ_1:

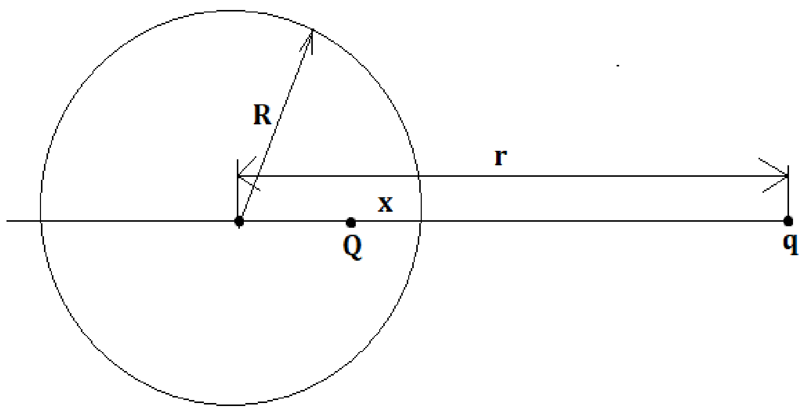
$$dQ_1 = \eta \text{A} = dQ_2 \frac{T_2 - T_0}{T_2} \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_0}$$ [1,5 балла]

отсюда видно, что

$$-dQ_{2min} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} dQ_1 \approx 0{,}16 dQ_1$$ [1,5 балла]

Задача 3. [9 баллов]

Если бы на шар могло поступать сколько угодно заряда на нём бы установилось распределение заряда имитирующее поле заряда Q, такого, чтоб поверхность шара стала эквипотенциальной (см. подсказку 1). Его величину и местоположение при известном расстоянии до внешнего заряда можно найти, зная потенциалы в отдельных точках.



$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R-x)}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)}=0$	**(1)**	**[0.5 балла]**
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+x)}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+R)}=0$	**(2)**	**[0.5 балла]**

Откуда

$Q=-q\frac{R}{r}, x=\frac{R^2}{r}.$	**(3)**	**[1 балл]**

Такой же заряд (согласно теореме Гаусса) должен быть на поверхности шара.

Однако шар изолирован, и нескомпенсированный заряд $(-Q)$ должен быть распределён по поверхности шара, чтобы оставить шар эквипотенциальным. Его поле вне шара эквивалентно поля точечного заряда.

Внешний заряд будет притягиваться к шару с силой

$F=\frac{q\frac{R}{r}q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{R^2}{r})^2}-\frac{q\frac{R}{r}q}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{r}{(r^2-R^2)^2}-\frac{1}{r^3})$	**(4)**	**[2 балла]**

Зная что $F\Delta r=-\Delta U$, получим $F=-\frac{\Delta U}{\Delta r}$ или $F=-\frac{dU}{dr}$ при переходе к бесконечно малым. Можно найти эффективную потенциальную энергию для дайной силы. Она будет равна (см. подсказку 2)

$$U = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 - R^2}\right) = \frac{q^2R^3}{8\pi\varepsilon_0 r^2(R^2 - r^2)}$$ **(5)** **[2 балла]**

Воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса в отдалении от закрепленного шара и при наибольшем приближении (скорость в этот момент составляет прямой угол с направлением на его центр).

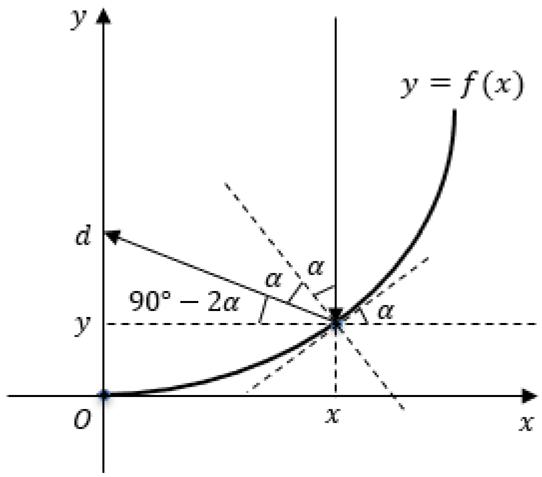
$$m\frac{{v_0}^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - 46{,}68\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$ **(6)** **[1 балл]**

$$2mv_0R = 1.01mvR$$ **(7)** **[1 балл]**

Решение системы относительно v_0 даёт

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{16q^2}{\pi\varepsilon_0 Rm}}$$ **(8)** **[1 балл]**

Задача 4. [6 баллов]



[2,0 балла]

По рисунку видно, что

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{d-y}{x}$$ [1,0 балл]

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = ctg(2\alpha) = \frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$ [0,5 баллов]

из-за симметрии a и c равны 0, получаем $f(x) = bx^2$ [1,0 балл]

$$tg\alpha = f'(x) = 2bx$$ [0,5 баллов]

$$\frac{d-bx^2}{x} = \frac{1-4b^2x^2}{4bx}$$ [0,5 баллов]

$$d = \frac{1}{4b}$$ [0,5 баллов]

ответ получается $b = \frac{1}{4d}$, $a = 0$, и $b = 0$.