**Решение задач 3-го этапа Республиканской олимпиады по физике, 2022**

**10 класс**

**Задача 1[(7 баллов]**

Однородная тонкая веревка находится в состоянии равновесия на блоке, радиус которого много меньше ее длины $2l$. Ось блока горизонтальна и от очень слабого толчка веревка приходит в движение. Найдите длину $h$, на которую опустится один из концов веревки в тот момент, когда она перестает давить на блок. Ускорение свободного падения равно $g$.

Решение:

Обозначим линейную плотность верёвки $\rho$.

Сила реакции блока и сила натяжения верёвки меняют импульс каждого участка верёвки проходящего через блок.

$$2T - N = \frac{\Delta m}{\Delta t}\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = \rho\frac{\Delta l}{\Delta t}\cdot 2v = 2\rho v^2$$ **(1)** **[2 балла]**

Согласно условию N=0.

Скорость верёвки определится из закона сохранения энергии.

В начальном положении её потенциальная энергия

$$E_0 = 2\cdot\rho l\cdot g\left(-\frac{l}{2}\right) = -\rho g l^2$$ **(2)** **[0.5 балла]**

Когда верёвка пройдёт путь $h$ её потенциальная энергия станет равна:

$$E = \rho(l-h)\cdot g\left(-\frac{l-h}{2}\right) + \rho(l+h)\cdot g\left(-\frac{l+h}{2}\right) = -\rho g(l^2+h^2)$$ **(3)** **[0.5 балла]**

Закон сохранения энергии:

$$m\frac{v^2}{2} = 2\rho l\frac{v^2}{2} = \rho g(l^2+h^2) - \rho g l^2$$ **(4)** **[0,5 балла]**

$$v^2 = \frac{gh^2}{l}$$ **(5)** **[0.5 балла]**

Сила натяжения определяется из уравнений динамики для левой и правой частей верёвки

$$T - \rho(l-h)g = \rho(l-h)a$$ **(6)** **[0.5 балла]**

$$\rho(l+h)g - T = \rho(l+h)a$$ **(7)** **[0.5 балла]**

$$T = \rho(l^2 - h^2)g/l \qquad \textbf{(8)} \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

Подставляя (5) и (8) в (1) решаем относительно h

$$\frac{2\rho(l^2 - h^2)g}{l} = 2\rho\frac{gh^2}{l} \qquad \textbf{(9)} \qquad \textbf{[1 балл]}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \textbf{(10)} \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

**Задача 2 [8 баллов]**

Давление газа под поршнем равно

$$P = \frac{k(x - x_0)}{S} = \frac{k(V - V_0)}{S^2} \qquad \textbf{(1)} \qquad \textbf{[1 балл]}$$

где $x_0$-расстояние от дна сосуда до поршня при недеформированной пружине, $V_0 = Sx_0$.

Теплота, сообщённая газу, идёт на увеличение его внутренней энергии, и работу по деформации пружины.

$$Q = \frac{k(x_2 - x_0)^2}{2} - \frac{k(x_1 - x_0)^2}{2} + \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) \qquad \textbf{(2)} \qquad \textbf{[2 балла]}$$

$$Q = \frac{k(2V_1 - V_0)^2}{2S^2} - \frac{k(V_1 - V_0)^2}{2S^2} + \frac{3}{2}(\frac{k(2V_1 - V_0)}{S^2}2V_1 - \frac{k(V_1 - V_0)}{S^2}V_1) \qquad \textbf{(3)} \qquad \textbf{[1 балл]}$$

Найдем $V_0$ пользуясь информацией из условия.

$$C = \frac{dA}{dT} + \frac{dU}{dT} = P\frac{dV}{dT} + \frac{3}{2}R \qquad \textbf{(4)} \qquad \textbf{[0,5 балл]}$$

$$\frac{k(V - V_0)}{S^2}V = RT \qquad \textbf{(5)} \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$\frac{k(2V - V_0)}{S^2}dV = RdT \qquad \textbf{(6)} \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{S^2}{k(2V - V_0)}R \qquad \textbf{(7)} \qquad \textbf{[0.5 балла]}$$

$$C = \frac{V - V_0}{2V - V_0}R + \frac{3}{2}R = 3R \qquad \textbf{(8)} \qquad \textbf{[0,5 балл]}$$

Из (8) находим

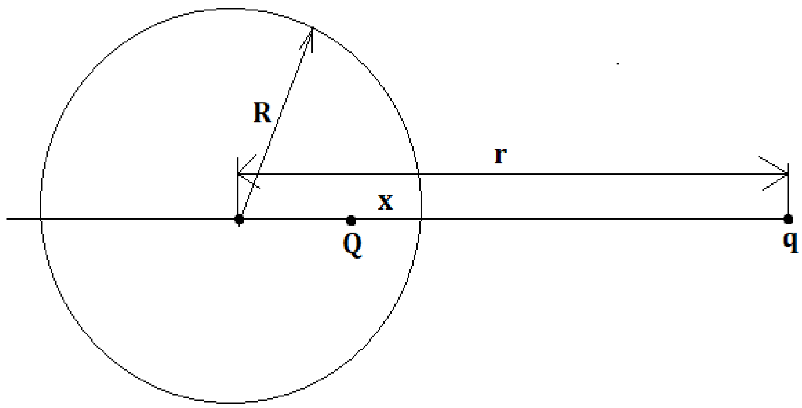
$$V_0 = \frac{4}{3}V_1 \qquad \textbf{(9)} \qquad \textbf{[0,5 балла]}$$

Подставляя (9) в (3) окончательно находим

$$Q = \frac{22}{3}\frac{kV_0{}^2}{S^2} \qquad \textbf{(10)} \qquad \textbf{[1 балл]}$$

**Задача 3. [9 баллов]**

Если бы на шар могло поступать сколько угодно заряда на нём бы установилось распределение заряда имитирующее поле заряда Q, такого, чтоб поверхность шара стала эквипотенциальной (см. подсказку 1). Его величину и местоположение при известном расстоянии до внешнего заряда можно найти, зная потенциалы в отдельных точках.




| | | |
|---|---|---|
| $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R-x)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)} = 0$ | **(1)** | **[0.5 балла]** |
| $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+x)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+R)} = 0$ | **(2)** | **[0.5 балла]** |

Откуда

| | | |
|---|---|---|
| $Q = -q\frac{R}{r}, x = \frac{R^2}{r}.$ | **(3)** | **[1 балл]** |

Такой же заряд (согласно теореме Гаусса) должен быть на поверхности шара.

Однако шар изолирован, и нескомпенсированный заряд $(-Q)$ должен быть распределён по поверхности шара, чтобы оставить шар эквипотенциальным. Его поле вне шара эквивалентно поля точечного заряда.

Внешний заряд будет притягиваться к шару с силой

| | | |
|---|---|---|
| $F = \frac{q\frac{R}{r}q}{4\pi\varepsilon_0(r-\frac{R^2}{r})^2} - \frac{q\frac{R}{r}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r}{(r^2-R^2)^2} - \frac{1}{r^3}\right)$ | **(4)** | **[2 балла]** |

Зная что $F\Delta r = -\Delta U$, получим $F = -\frac{\Delta U}{\Delta r}$ или $F = -\frac{dU}{dr}$ при переходе к бесконечно малым. Можно найти эффективную потенциальную энергию для дайной силы. Она будет равна (см. подсказку 2)

$$U=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2-R^2}\right)=\frac{q^2R^3}{8\pi\varepsilon_0 r^2(R^2-r^2)}$$ **(5)** **[2 балла]**

Воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса в отдалении от закрепленного шара и при наибольшем приближении (скорость в этот момент составляет прямой угол с направлением на его центр).

$$m\frac{{v_0}^2}{2}=m\frac{v^2}{2}-46{,}68\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$ **(6)** **[1 балл]**

$$2mv_0R=1.01mvR$$ **(7)** **[1 балл]**

Решение системы относительно $v_0$ даёт

$$v_0\approx\sqrt{\frac{16q^2}{\pi\varepsilon_0 Rm}}$$ **(8)** **[1 балл]**

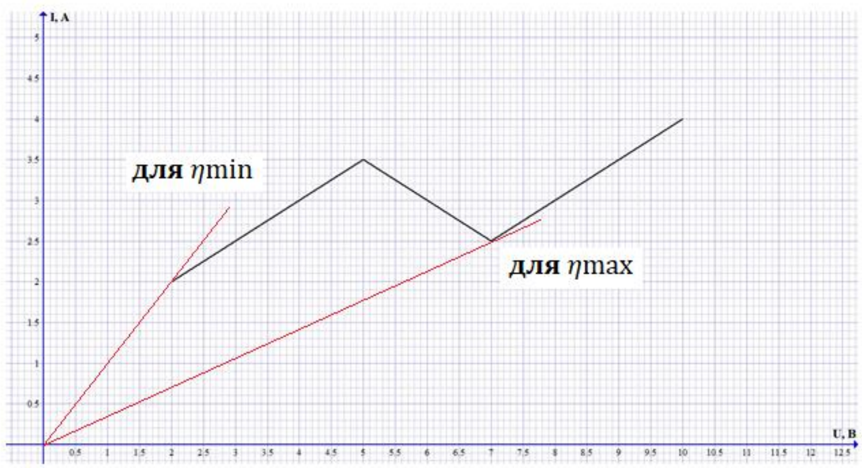
**Задача 4. [6 баллов]**

$$\eta=\frac{N}{\mathcal{E}}=\frac{U}{U+Ir}=\frac{1}{1+r\frac{I}{U}}$$ **(1)** **[1 балл]**

КПД тем больше, чем меньше соотношение $\frac{I}{U}$

$$\eta_{max}=\eta(7)\approx 0{,}36$$ **(2)** **[1 балл]**

$$\eta_{min}=\eta(2)\approx 0{,}17$$ **(3)** **[1 балл]**




Максимальная мощность соответствует

$$\frac{d(UI)}{dI}=I\frac{dU}{dI}+U\frac{dI}{dI}=I\frac{dU}{dI}+U=0$$ **(4)** **[1 балл]**

$$\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dI}}=-\frac{\mathrm{U}}{I}$$ **(5)** **[1 балл]**

Где первое есть тангенс угла наклона линии, второе - тангенс угла наклона радиус вектора, проведённого к точке. $\frac{U}{I}$ положительно, поэтому искомая точка находится на участке с отрицательным наклоном $-\frac{1}{2}$. Проводим из начала координат линию с угловым коэффициентом $\frac{1}{2}$ и на пересечении с линией находим точку точно – это (6;3)


$N_{max} = 6\text{В} * 3\text{А} = 18\ \text{Вт}$ **(6)** **[1 балл]**

.