Решение задач республиканской олимпиады по физике-2025
9 класс

Задача 1 [10 баллов].

Часть 1.1. (3,5 балла)

Разделим цилиндрический сосуд на три части, и для каждой части найдем среднюю температуру. Так-как температура от высоты меняется линейно, и количество теплоты от температуры меняется линейно:

$t_1 = \frac{40°C + 20°C}{2} = 30°C$	(1)
$t_2 = \frac{20°C + 20°C}{2} = 20°C$	(2)
$t_3 = \frac{20°C + 10°C}{2} = 15°C$	(3)

Тепло, которое отдает нижняя часть жидкости

$Q_1 = cm_1(t_1 - \theta)$	(4)

Тепло, которое получают верхние части жидкости

$Q_2 = cm_2(\theta - t_2)$	(5)
$Q_3 = cm_3(\theta - t_3)$	(6)

Масса каждой части

$m_x = \rho V_x = \rho S x$	(7)

Тепловой баланс

$Q_1 = Q_2 + Q_3$	(8)
$x_1(t_1 - \theta) = x_2(\theta - t_2) + x_3(\theta - t_3)$	(9)

Ответ

$\theta = \frac{x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3}{x_1 + x_2 + x_3} = 22\ °C$	(10)

Тепловой баланс для второй части. c_0 – удельная теплоемкость жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, V_0 – объем жидкости, V – объем тела, t – начальная температура тела.

$c_0\rho_0(V_0 - V)(\theta_1 - \theta) = \frac{c_0}{2} 2\rho_0 V(t - \theta_1)$	(11)
$c_0\rho_0(V_0 - 2V)(\theta_2 - \theta) = \frac{c_0}{2} 2\rho_0 2V(t - \theta_2)$	(12)

Решаем систему уравнений

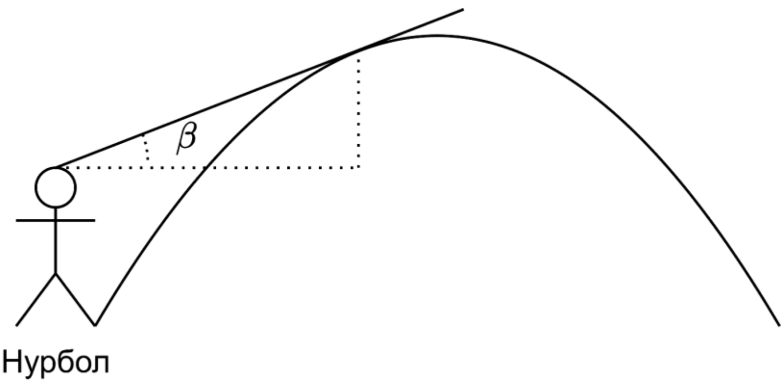
$\theta_1 = \theta + \frac{V}{V_0}(t - \theta)$	(13)

$$\theta_2 = \theta + \frac{2V}{V_0}(t - \theta)$$	(14)
$$\theta_2 = 2\theta_1 - \theta = 34\ °C$$	(15)

Критерии оценивания

№	Содержание	Баллы
1	$t_1 = \dfrac{40°C + 20°C}{2} = 30°C$	0.2
2	$t_2 = \dfrac{20°C + 20°C}{2} = 20°C$	0.2
3	$t_3 = \dfrac{20°C + 10°C}{2} = 15°C$	0.2
4	$Q_1 = cm_1(t_1 - \theta)$	0.2
5	$Q_2 = cm_2(\theta - t_2)$	0.2
6	$Q_3 = cm_3(\theta - t_3)$	0.2
7	$m_x = \rho V_x = \rho S x$	0.2
8	$Q_1 = Q_2 + Q_3$	0.2
9	$x_1(t_1 - \theta) = x_2(\theta - t_2) + x_3(\theta - t_3)$	0.2
10	$\theta = \dfrac{x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3}{x_1 + x_2 + x_3} = 22\ °C$	0.2
11	$c_0\rho_0(V_0 - V)(\theta_1 - \theta) = \dfrac{c_0}{2} 2\rho_0 V(t - \theta_1)$	0.3
12	$c_0\rho_0(V_0 - 2V)(\theta_2 - \theta) = \dfrac{c_0}{2} 2\rho_0 2V(t - \theta_2)$	0.3
13	$\theta_1 = \theta + \dfrac{V}{V_0}(t - \theta)$	0.3
14	$\theta_2 = \theta + \dfrac{2V}{V_0}(t - \theta)$	0.3
15	$\theta_2 = 2\theta_1 - \theta = 34\ °C$	0.3
	Всего	**3.5**

Часть 1.2. (3,0 балла)



Если провести линию от глаз Нурбола до наивысшей точки в перспективе Нурбола, то эта линия будет касательной к траектории мяча, которая является параболой. Тогда из прямоугольного треугольника на рисунке мы можем написать:

$$tg(\beta) = \frac{v_0 \sin(\alpha)\, t_1 - \frac{g t_1^2}{2} - h}{v_0 \cos(\alpha)\, t_1}, \tag{1}$$

где α — это начальный угол скорости мяча с горизонтом. Также из построенной касательной и условия максимальности точки траектории со стороны Нурбола, мы заключаем, что угол скорости мяча с горизонтом в момент времени t_1 должен быть равен β, то есть

$$tg(\beta) = \frac{v_o \sin(\alpha) - g t_1}{v_o \cos(\alpha)}. \tag{2}$$

Приравнивая два уравнения, получим

$$h = \frac{gt_1^2}{2} = 1.90 \text{ м}. \tag{3}$$

Критерии оценивания

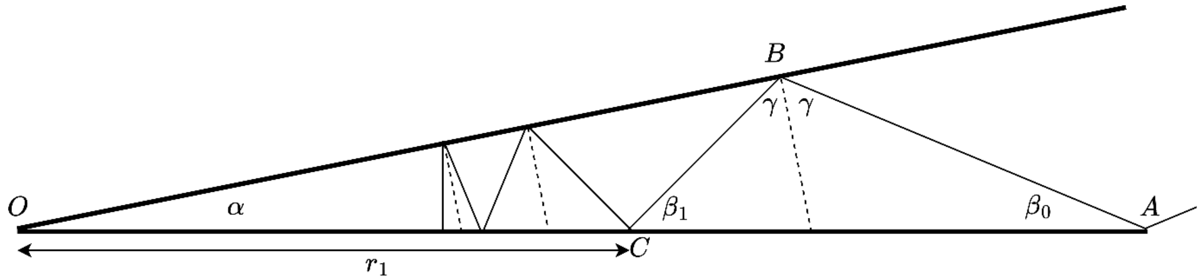
Содержание	Баллы
Верный и явный рисунок касательной **или** написано, что линия взгляда будет касательной к траектории. (если есть полностью верное уравнение (1) или (2) то за этот пункт полный балл)	0.5
Уравнение (1)	1
Уравнение (2)	1
Верный ответ (если ответ без вывода, то баллы не ставятся)	0.5
Всего	**3,0**

Просто за уравнение движения по осям баллы не ставятся.

Часть 1.3. (3,5 балла)

Решение 1

Рассмотрим несколько последовательных отражений луча:



(на данном рисунке угол альфа не такой как в условиях задачи, чтобы рисунок был лучше виднее)

$\beta_0, \beta_1 -$ начальный и последующий угол луча с нижней стороной зеркала. Мы можем связать эти углы:

$$\gamma = 180 - \beta_0 - (90 + \alpha) \qquad \gamma = 180 - \beta_1 - (90 - \alpha)$$

Тогда получаем:

$$\beta_1 = \beta_0 + 2\alpha \tag{1}$$

Или для угла падения луча:

$$\delta_1 = \delta_0 - 2\alpha \tag{1}$$

Получается, что через каждые два отражение угол падения уменьшается на 2α. В какой-то момент угол станет 0 и луч начнёт двигаться по такой же траектории обратно, выходя из двугранного угла в обратную сторону. Чтобы l был минимальный, самый крайний луч должен выйти через отрезанную сторону ровно в момент, когда угол падения становится 0.

Начальный угол падения, или угол с нижней стороной:

$$\delta_o = 90 - 2\alpha \qquad \beta_0 = 2\alpha$$

Находим что через N отражений угол падения станет 0:

$$N = 2 \cdot \frac{90 - 2\alpha}{2\alpha} = 2 \cdot 7 = 14 \tag{2}$$

Это и есть максимальное количество отражений при минимальном k

Теперь попытаемся найти минимальное расстояние l_{min}.

Напишем теорему синусов для треугольников OBC, OBA:

$$\frac{OB}{\sin \beta_0} = \frac{R}{\sin(180 - \alpha - \beta_0)} \qquad \frac{OB}{\sin(180 - \beta_1)} = \frac{r_1}{\sin[180 - \alpha - (180 - \beta_1)]} \tag{3}$$

Приравнивая OB и преобразовывая синусы получаем:

$$\frac{R \sin \beta_0}{\sin(\alpha + \beta_0)} = \frac{r_1 \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - \alpha)}$$

Но из уравнения (1) мы уже знаем: $\beta_1 - \alpha = \beta_0 + \alpha$
Тогда получаем:

$$R \sin\beta_0 = \mathrm{r}_1 \sin\beta_1$$

Так как мы не уточняли значения углов бета, это соотношение работает для всех углов луча с нижней стороной:

$$r \sin\beta = const \tag{4}$$

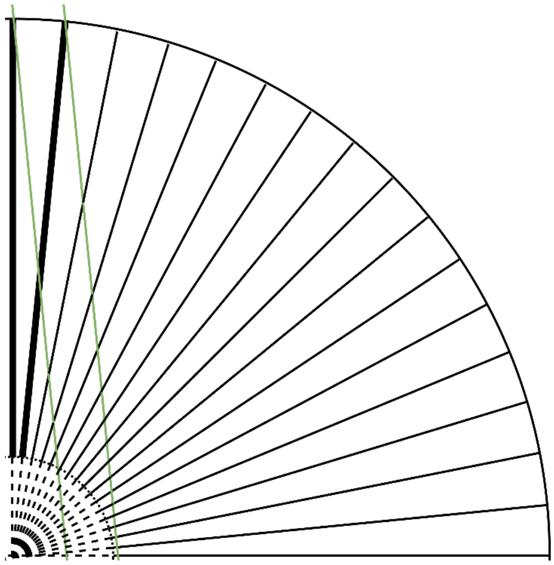
$r -$ расстояние от точки отражения на нижней стороне до вершины двугранного угла. $\beta -$угол луча с нижней стороной (НЕ угол падения)
Тогда находим минимальный k:

$$l_{min} \cdot \sin 90° = R \sin 2\alpha \tag{5}$$

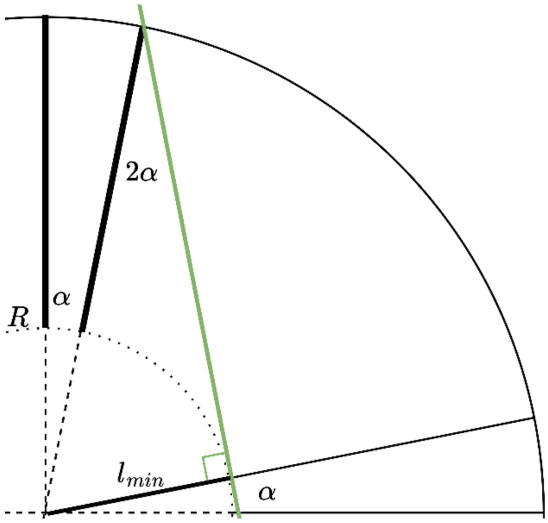
$$k_{min} = \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{16} \tag{5}$$

Решение 2

А теперь настоящее решение. Чтобы найти траекторию луча относительно зеркала, можно не отражать луч от поверхности, а отразить саму поверхность. Тогда получаем такую картину:



На рисунке мы отразили угол много раз формируя окружность. Толстой линей изображены изначальные поверхности зеркала, тонкой линей отражённые поверхности, штрихованной линией убранные поверхности зеркала. В такой форме траектория луча прямая. Каждый раз, когда луч пересекает тонкую или толстую линию, происходит отражение луча.
Круг из точек обозначает зону зайдя в которую луч попадает на убранную часть зеркала и вылетает из двугранного угла. Радиус круга из точек равен длине l.
Рассмотрим траекторию самого крайнего луча, если он попадёт в круг из точек, то он выйдет из двугранного угла. Значит радиус круга должен быть равен минимальному расстоянию до траектории крайнего луча. Заметим:



Отраженная сторона зеркала, которая находится под углом α к горизонтали перпендикулярна траектории крайнего луча. Тогда из прямоугольного треугольника находим:

$$l_{min} = R \cdot \sin 2\alpha \qquad (6)$$

$$k_{min} = \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{16} \qquad (6)$$

Также используя рисунок и минимальное значение k находим максимальное количество отражений:

$$N = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{32} \cdot 2}{\frac{\pi}{32}} = 14 \qquad (7)$$

Критерии оценивания

Решение 1

Содержание	**Баллы**
Одно из уравнений (1). Найдено изменение угла между двумя последовательными отражениями	0.25
Найдено максимальное количество отражений (2) $N = 14$	1
Ошибся на единицу ($N = 13, N = 15$)	-0.5
Записана теорема синусов хотя бы для одного из треугольников (3)	0.25
Найден закон (4)	1.25
Верный ответ (5)	0.75
Всего	**3.5**

Решение 2

Содержание	**Баллы**
Явно использована идея отражения системы хотя бы 1 раз	0.25
Верный рисунок отражённой системы в виде четверти круга и прямая траектория луча. (должно быть видно хоть какое-то разделение на сектора, а не просто дуга круга)	1
Верный ответ (6)	1.5
Найдено максимальное количество отражений (7) $N = 14$	0.75
Ошибся на единицу ($N = 13, N = 15$)	-0.4
Всего	**3.5**

Баллы даются только по одному из критериев! В приоритете тот критерий, по которому у участника больше баллов.

Задача_2. Небесная гавань Циолковского [10,0 баллов]

1) Критическое значение α_k соответствует высоте, на которой центробежная сила полностью компенсирует гравитацию, т.е.

$$F_г = F_ц \tag{1}$$

Гравитационная сила на расстоянии r от центра Земли:

$$F_г = \frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

Центробежная сила:

$$F_ц = m\omega^2 r \tag{3}$$

Учитывая что

$$r = R + H = R + \alpha_k R \tag{4}$$

$$\frac{GMm}{\left(R+\alpha_k R\right)^2} = m\omega^2\left(R+\alpha_k R\right) \tag{5}$$

$$\alpha_k = \left(\frac{GM}{\omega^2 R^3}\right)^{1/3} - 1 \tag{6}$$

$$\alpha_k \approx 5{,}61 \tag{7}$$

2) Когда капсула с грузом массой m находится на расстоянии r от центра Земли, его гравитационная потенциальная энергия $E_п$ выражается как:

$$E_п = -\frac{GMm}{r} \tag{8}$$

В точке у основания трубы (на станции снабжения):

$$E_{п0} = -\frac{GMm}{R} \tag{9}$$

В точке на высоте H+R, где находится корабль:

$$E_{п1} = -\frac{GMm}{H+R} = -\frac{GMm}{(\alpha+1)R} \tag{10}$$

Работа гравитационной силы при перемещении груза от станции снабжения до корабля:

$$A_г = E_{п0} - E_{п1} \tag{11}$$

Подставляем выражения из (9) и (10):

$$A_г = -\frac{\alpha GMm}{\left(\alpha+1\right)R} \tag{12}$$

$$A_г \approx -2{,}85 \times 10^{11}\ Дж \tag{13}$$

3) Когда капсула с грузом массой m находится на расстоянии R и R+H от центра Земли, центробежная сила инерции $F_ц$, возникающая из-за вращения Земли, выражаются как:

$$F_{ц1} = m\omega^2 R \tag{14}$$

$$F_{ц2} = m\omega^2 \left(R + H\right) \tag{15}$$

Так как $F_ц$ пропорциональна r, среднее значение силы можно использовать для расчета работы центробежной силы. Работа центробежной силы на пути от основания трубы до корабля:

$$A_ц == \frac{m\omega^2 \left[R + \left(H + R\right)\right]}{2} H \tag{16}$$

$$A_ц = \frac{1}{2}\alpha\left(\alpha + 2\right) m\omega^2 R^2 \tag{17}$$

$$A_ц \approx 6,61 \times 10^{10}\ Дж \tag{18}$$

4) После того, как груз покидает станцию снабжения, гравитационная сила уменьшается, а центробежная сила увеличивается. Когда центробежная сила становится больше гравитационной силы, больше не требуется поднимать груз с помощью внешней тяги. Следовательно, необходимая положительная работа выполняется до точки, в которой гравитационная сила и центробежная сила уравниваются. Обозначим радиус этой точки как r_0. Так как в этом положении центробежная сила равна гравитационной, имеем:

$$\frac{GMm}{r_0^2} = m\omega^2 r_0 \tag{19}$$

$$r_0 = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} \tag{20}$$

Работа гравитационной силы $A_г(r_0)$ при перемещении груза в точку r_0

$$A_г(r_0) = -\frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{R}{r_0}\right) \tag{21}$$

Работа центробежной силы

$$A_ц\left(r_0\right) = \frac{m\omega^2\left(r_0 + R\right)}{2}\left(r_0 - R\right) = \frac{m\omega^2}{2}\left(r_0^2 - R^2\right) \tag{22}$$

Теперь, чтобы переместить груз из станции снабжения в точку r_0, требуется работа внешней силы:

$$A_{\min} = -A_г\left(r_0\right) - A_ц\left(r_0\right) \tag{23}$$

$$A_{\min} = \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{R}{r_0}\right) - \frac{m\omega^2\left(r_0^2 - R^2\right)}{2} \tag{24}$$

После упрощения:

$$A_{\min} = \frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 - \frac{3}{2}m\left(GM\omega\right)^{2/3} \tag{25}$$

$$A_{\min} \approx 2,42\times10^{11}\ Дж \tag{26}$$

5) Рассмотрим уравнение (12) для работы гравитационной силы и уравнение (17) для работы центробежной силы. Чтобы найти высоту, на которой суммарная работа этих сил равна нулю, приравняем их:

$$\frac{\alpha GMm}{(\alpha+1)R} = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+2)m\omega^2R^2 \tag{27}$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2\left(1-\frac{GM}{\omega^2R^3}\right) = 0 \tag{28}$$

Решаем квадратное уравнение относительно α:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-3\pm\left(1+\frac{8GM}{\omega^2R^3}\right)^{1/2}\right] \tag{29}$$

Так как α — безразмерная высота, мы отбрасываем отрицательный корень и оставляем только положительное значение:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left[-3+\left(1+\frac{8GM}{\omega^2R^3}\right)^{1/2}\right] \tag{30}$$

$$\alpha_1 = 22,55 \tag{31}$$

Таким образом, высота, на которой гравитационная и центробежная силы полностью компенсируют друг друга**,** равна:

$$H_0 = \alpha_1 R \tag{32}$$

$$H_0 = 144000\,км \tag{33}$$

6) Для определения силы, с которой станция снабжения действует на трубу**,** сначала вычислим работу, совершаемую гравитационной силой, центробежной силой и силой со стороны станции при бесконечно малом перемещении трубы вниз на расстояние Δh.

Так как труба находится в равновесии, то сумма работ всех сил при любом бесконечно малом перемещении должна быть равна нулю. Для вычисления работы гравитационной силы и центробежной силы рассмотрим верхнюю бесконечно малую часть трубы длиной Δh, масса которой равна

$$\Delta m = m_t\frac{\Delta h}{H} \tag{34}$$

которая медленно перемещается вниз**.**

Гравитационная потенциальная энергия бесконечно малого элемента трубы на высоте r от центра Земли равна:

$$E_п = -\frac{GM\Delta m}{r} \tag{35}$$

Центробежная сила, действующая на элемент трубы:

$$F_ц = \Delta m\omega^2 r = \frac{1}{L}m_t\omega^2 r\,\Delta h \tag{36}$$

При медленном перемещении элемента трубы вниз от верхней границы трубы (высота H+R**)** к более низкой точке:

$$A_г = E_п\left(H+R\right) - E_п\left(R\right) \tag{37}$$

$$A_г = \frac{GMm_t}{HR}\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)\Delta h \tag{38}$$

или

$$A_г = \frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2}\Delta h \tag{39}$$

Для бесконечно малого элемента работу центробежной силы можно записать:

$$A_ц = -\frac{1}{2}\left[F_ц\left(R\right)+F_ц\left(H+R\right)\right]H \tag{40}$$

или

$$A_ц = -\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2 R\Delta h \tag{41}$$

Станция снабжения действует силой F вниз. Работа этой силы:

$$A_F = F\Delta h \tag{42}$$

Так как система находится в равновесии:

$$A_г + A_ц + A_F = 0 \tag{43}$$

Из баланса работ всех сил для бесконечно малого перемещения Δh трубы вниз получаем:

$$\frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2}\Delta h - \frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2 R\Delta h + F\Delta h = 0 \tag{44}$$

Разделив уравнение на Δh, получаем выражение для силы, с которой платформа снабжения «Терра-1» воздействует на трубу:

$$F = -\frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2} + \frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2 R \tag{45}$$

$$F = -2,43\times10^9\ H \tag{46}$$

7) В точках A и B радиус-вектор спутника равен:

$$r_A = a - c \tag{47}$$

$$r_B = a + c \tag{48}$$

где c – расстояние от фокуса до центра эллипса.

Согласно второму закону Кеплера, площадь, заметаемая радиус-вектором спутника за единицу времени, является постоянной.

Заметаемые площади за единицу времени в точках A и B:

$$S_A = \frac{1}{2}r_A v_A \tag{49}$$

$$S_A = \frac{1}{2}(a-c)v_A \tag{50}$$

$$S_B = \frac{1}{2} r_B v_B \tag{51}$$

$$S_B = \frac{1}{2}(a+c)v_B \tag{52}$$

где v_A и v_B - скорости спутника в точках А и В соответственно.

Из второго закона Кеплера следует, что $S_A = S_B$, то есть:

$$(a-c)v_A = (a+c)v_B \tag{53}$$

Из (53) можно найти соотношение скоростей в точках А и В:

$$v_B = v_A \frac{a-c}{a+c} \tag{54}$$

Полная механическая энергия движения спутника определяется суммой кинетической энергии и гравитационной потенциальной энергии.

В точке А:

$$E_A = \frac{mv_A^2}{2} - G\frac{mM}{(a-c)} \tag{55}$$

В точке В:

$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} - G\frac{mM}{(a+c)} \tag{56}$$

По закону сохранения энергии $E_A = E_B$, что дает:

$$\frac{mv_A^2}{2} - G\frac{mM}{(a-c)} = \frac{mv_B^2}{2} - G\frac{mM}{(a+c)} \tag{57}$$

Из уравнений (54) и (57):

$$v_A^2 = \frac{GM}{a}\frac{a+c}{a-c} \tag{58}$$

Или

$$v_B^2 = \frac{GM}{a}\frac{a-c}{a+c} \tag{59}$$

$$E = -G\frac{mM}{2a} \tag{60}$$

8) Из уравнений (58-59) и (50-52) получим выражение для площади, заметаемой в единицу времени:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{GM\left(1-\frac{c^2}{a}\right)} \tag{61}$$

Из геометрии эллипса:

$$b = \sqrt{a^2-c^2} \;\Rightarrow\; 1-\frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \tag{62}$$

$$S=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}} \tag{63}$$

9) Площадь эллипса равна

$$S_{\text{э}}=\pi ab \tag{64}$$

Поэтому период равен

$$T=\frac{S_{\text{э}}}{S} \tag{65}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \tag{66}$$

	Содержание	**Балл**	
1	$F_{\text{г}}=F_{\text{ц}}$	0,1	**0,4**
	$r=R+H=R+\alpha_k R$	0,1	
	$\frac{GMm}{\left(R+\alpha_k R\right)^2}=m\omega^2\left(R+\alpha_k R\right)$	0,1	
	$\alpha_k\approx 5,61$	0,1	
2	$E_{n0}=-\frac{GMm}{R}$	0,1	**0,5**
	$E_{n1}=-\frac{GMm}{H+R}=-\frac{GMm}{(\alpha+1)R}$	0,1	
	$A_{\text{г}}=E_{n0}-E_{n1}$	0,1	
	$A_{\text{г}}=-\frac{\alpha GMm}{\left(\alpha+1\right)R}$	0,1	
	$A_{\text{г}}\approx -2,85\times 10^{11}$ *Дж*	0,1	
3	$F_{\text{ц}1}=m\omega^2 R$	0,1	**0,5**
	$F_{\text{ц}2}=m\omega^2\left(R+H\right)$	0,1	
	$A_{\text{ц}}==\frac{m\omega^2\left[R+\left(H+R\right)\right]}{2}H$	0,1	
	$A_{\text{ц}}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+2\right)m\omega^2 R^2$	0,1	
	$A_{\text{ц}}\approx 6,61\times 10^{10}$ *Дж*	0,1	
4	$\frac{GMm}{r_0^2}=m\omega^2 r_0$	0,2	**2**
	$r_0=\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3}$	0,2	
	$A_{\text{г}}(r_0)=-\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{R}{r_0}\right)$	0,25	
	$A_{\text{ц}}\left(r_0\right)=\frac{m\omega^2\left(r_0+R\right)}{2}\left(r_0-R\right)=\frac{m\omega^2}{2}\left(r_0^2-R^2\right)$	0,25	
	$A_{\min}=-A_{\text{г}}\left(r_0\right)-A_{\text{ц}}\left(r_0\right)$	0,5	
	$A_{\min}=\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{R}{r_0}\right)-\frac{m\omega^2\left(r_0^2-R^2\right)}{2}$	0,2	
	$A_{\min}=\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m\omega^2R^2-\frac{3}{2}m\left(GM\omega\right)^{2/3}$	0,2	
	$A_{\min}\approx 2,42\times 10^{11}$ *Дж*	0,2	
5	$\frac{\alpha GMm}{\left(\alpha+1\right)R}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+2\right)m\omega^2R^2$	0,2	**1,6**

	$\alpha^2+3\alpha+2\left(1-\frac{GM}{\omega^2R^3}\right)=0$	0,2	
	$\alpha_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-3\pm\left(1+\frac{8GM}{\omega^2R^3}\right)^{1/2}\right]$	0,2	
	$\alpha_1=\frac{1}{2}\left[-3+\left(1+\frac{8GM}{\omega^2R^3}\right)^{1/2}\right]$	0,2	
	$\alpha_1=22,55$	0,3	
	$H_0=\alpha_1R$	0,2	
	$H_0=144000\,км$	0,3	
6	$\Delta m=m_t\frac{\Delta h}{H}$	0,5	**3**
	$E_п=-\frac{GM\,\Delta m}{r}$	0,25	
	$F_ц=\Delta m\omega^2r=\frac{1}{L}m_t\omega^2r\,\Delta h$	0,25	
	$A_г=E_п\left(H+R\right)-E_п\left(R\right)$	0,25	
	$A_г=\frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2}\Delta h$	0,25	
	$A_ц=-\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2R\Delta h$	0,25	
	$A_F=F\Delta h$	0,25	
	$A_г+A_ц+A_F=0$	0,25	
	$\frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2}\Delta h-\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2R\Delta h+F\Delta h=0$	0,25	
	$F=-\frac{GMm_t}{\left(\alpha+1\right)R^2}+\frac{1}{2}\left(\alpha+2\right)m_t\omega^2R$	0,25	
	$F=-2,43\times10^9\ H$	0,25	
7	$r_A=a-c$	0,1	**1,4**
	$r_B=a+c$	0,1	
	$S_A=\frac{1}{2}(a-c)v_A$	0,2	
	$S_B=\frac{1}{2}(a+c)v_B$	0,2	
	$(a-c)v_A=(a+c)v_B$	0,1	
	$v_B=v_A\frac{a-c}{a+c}$	0,1	
	$E_A=\frac{mv_A^2}{2}-G\frac{mM}{(a-c)}$	0,2	
	$E_B=\frac{mv_B^2}{2}-G\frac{mM}{(a+c)}$	0,2	
	$\frac{mv_A^2}{2}-G\frac{mM}{(a-c)}=\frac{mv_B^2}{2}-G\frac{mM}{(a+c)}$	0,1	
	$E=-G\frac{mM}{2a}$	0,1	
8	$S=\frac{1}{2}\sqrt{GM\left(1-\frac{c^2}{a}\right)}$	0,2	**0,4**
	$S=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$	0,2	

9	$T = \frac{S_э}{S}$	0,1	**0,2**
	$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$	0,1	
Всего		**10**	

Задача 3 [10,0 баллов].

Задача 3. Нелинейные элементы и электрический мост (10.0 баллов)

3.1. Согласно известному условию для балансировки мостика Уитстона:

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}. \tag{1}$$

Отсюда получаем численное значение

$$R_0 = \frac{R_1 R_3}{R_2} = 30 \text{ Ом}. \tag{2}$$

3.2. Из второго правила Кирхгофа имеем

$$U_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2, \quad \text{либо} \quad U_0 = I_0 R_0' + I_3 R_3, \tag{3}$$

$$I_0 R_0' = I_1 R_1, \tag{4}$$

$$I_3 R_3 = I_2 R_2. \tag{5}$$

По первому правилу Кирхгофа достаточно записать два из следующих трёх уравнений:

$$I_A = \pm(I_2 - I_1), \quad \text{либо} \quad I_A = \pm(I_3 - I_0), \quad \text{либо} \quad I_0 + I_1 = I_2 + I_3. \tag{6}$$

Обратите внимание, что в первых двух уравнениях знак «$\pm$» должен быть одним и тем же; участник может также записать эти соотношения без «$\pm$», однако нужно иметь в виду два разных значения для силы тока I_A. Итак, решением (3)-(7) получаем

$$R_0' = \frac{R_1 R_3 (U_0 \mp I_A R_2)}{U_0 R_2 \pm I_A (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}. \tag{7}$$

Численно получаются два значения:

$$R_0' = 20.0 \text{ Ом} \quad \text{или} \quad R_0' = 47.0 \text{ Ом}. \tag{8}$$

Изменение сопротивления резистора обусловлено его тепловым нагревом. Как было сказано в начале условия задачи, сопротивление резистора должно уменьшаться с повышением температуры. Следовательно, верному ответу соответствует $R_0' = 20.0$ Ом $(0.2$ балла$)$ (не оценивается, если не был показан второй результат $R_0' = 47.0$ Ом).

3.3. Площадь сечения проволоки равна

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \tag{9}$$

и сопротивление шунта равно

$$R_{\text{sh}} = \frac{\rho L}{S}. \tag{10}$$

Идея состоит в том, чтобы подключить амперметр <u>параллельно</u> шунту, чтобы входящий ток мог распределиться таким образом, чтобы не повредить амперметр. Зная внутреннее сопротивление R_A и записав правила Кирхгофа для параллельного соединения (промежуточные расчёты не показаны, так как это идейно повторяет **3.2**), получим, что

$$I'_{\max} = I_{\max} \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R_{\text{sh}}}\right). \tag{11}$$

Раскрыв выражение для сопротивления шунта, получаем

$$L = \frac{\pi d^2 R_A}{4\rho} \cdot \frac{I_{\max}}{I'_{\max} - I_{\max}} = 10.5 \text{ см}. \tag{12}$$

3.4. Обратим внимание, что при обращении в нуль показаний амперметра мы снова имеем балансировку моста Уитстона с регулируемым сопротивлением в нижнем участке цепи. При расстоянии l_X можно сразу же записать

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_X + \sigma l_X}{R_Y + \sigma(L_0 - l_X)}. \quad (13)$$

Когда R_X и R_Y меняются местами, мы получаем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_Y + \sigma l_Y}{R_X + \sigma(L_0 - l_Y)}. \quad (14)$$

Быстрым способом решения системы этих уравнений является прибавление обеих частей уравнения на 1 – тогда получится

$$\frac{R_1}{R_2} + 1 = \frac{R_X + R_Y + \sigma L_0}{R_Y + \sigma(L_0 - l_X)} = \frac{R_X + R_Y + \sigma L_0}{R_X + \sigma(L_0 - l_Y)}.$$

Следовательно, знаменатели обеих соотношений должны быть равны. Отсюда, окончательно,

$$R_X = R_Y - \sigma(l_X - l_Y). \quad (15)$$

Интересно, что R_1 и R_2 сокращаются в этом уравнении. Более того, при более точном анализе, паразитические сопротивления между $R_{X,Y}$ и шунтом тоже сокращаются в финальном ответе!

3.5. Мы знаем, что

$$\sigma = \frac{4\rho}{\pi d^2}, \quad (16)$$

а максимально измеряемая разница в сопротивлениях $|R_X - R_Y|$ происходит при

$$l_Y = 0, \quad l_X = L_0, \quad (17)$$

так что

$$L_0 = \frac{\pi d^2 R_0}{4\rho} = 2.09 \text{ м}. \quad (18)$$

3.6. Сила тока, протекающая через R_X при сбалансированном мосте:

$$I = \frac{U_0}{R_X + R_Y + \sigma L_0}. \quad (19)$$

Раскрывая, приводим к более удобному для расчётов виду:

$$I = \frac{U_0}{3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)} = \frac{U_0/R_0}{3 - (l_X - l_Y)/L_0}. \quad (20)$$

Напряжение на полупроводниковом элементе R_X, следовательно, равно

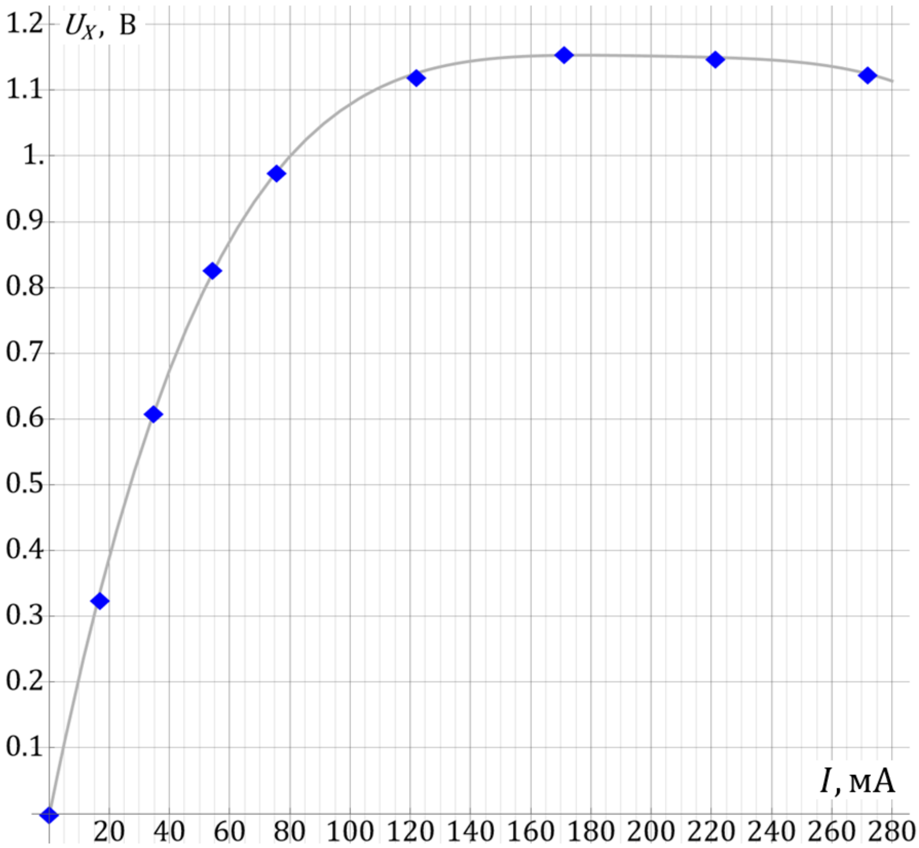
$$U_X = U_0 - I(R_Y + \sigma L_0). \quad (21)$$

Раскрывая, получим

$$U_X = U_0 - 2IR_0 = U_0 \cdot \frac{R_0 - \sigma(l_X - l_Y)}{3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)} = U_0 \cdot \frac{1 - (l_X - l_Y)/L_0}{3 - (l_X - l_Y)/L_0}. \quad (22)$$

Итак, мы получили в параметрическом виде зависимость $U_X(U_0, \xi)$ от силы тока $I(U_0, \xi)$, где $\xi = l_X - l_Y$. Для получения графика $U_X(I)$ нужно пересчитать по отдельности каждое из значений, отмеряя вертикальное расстояние между парой точек l_X и l_Y. Результат получится следующим (оценивается только наличие последних трёх столбцов):

U_0, В	l_X, см	l_Y, см	$l_X - l_Y$, см	U_X, В	I, мА
0	168	168	0	0	0
1	170	163	7	0.33	17
2	178	152	26	0.61	35
3	188	138	50	0.83	54
4	197	123	74	0.98	76
6	213	100	113	1.12	122
8	223	84	139	1.15	171
10	230	75	155	1.15	221
12	234	68	166	1.13	272



Из графика видно, что максимальное значение напряжения равно

$$U_{\max} = 1.15 \text{ В}. \tag{23}$$

3.7. Согласно закону Джоуля-Ленца,

$$A\Delta t = U_X I. \tag{24}$$

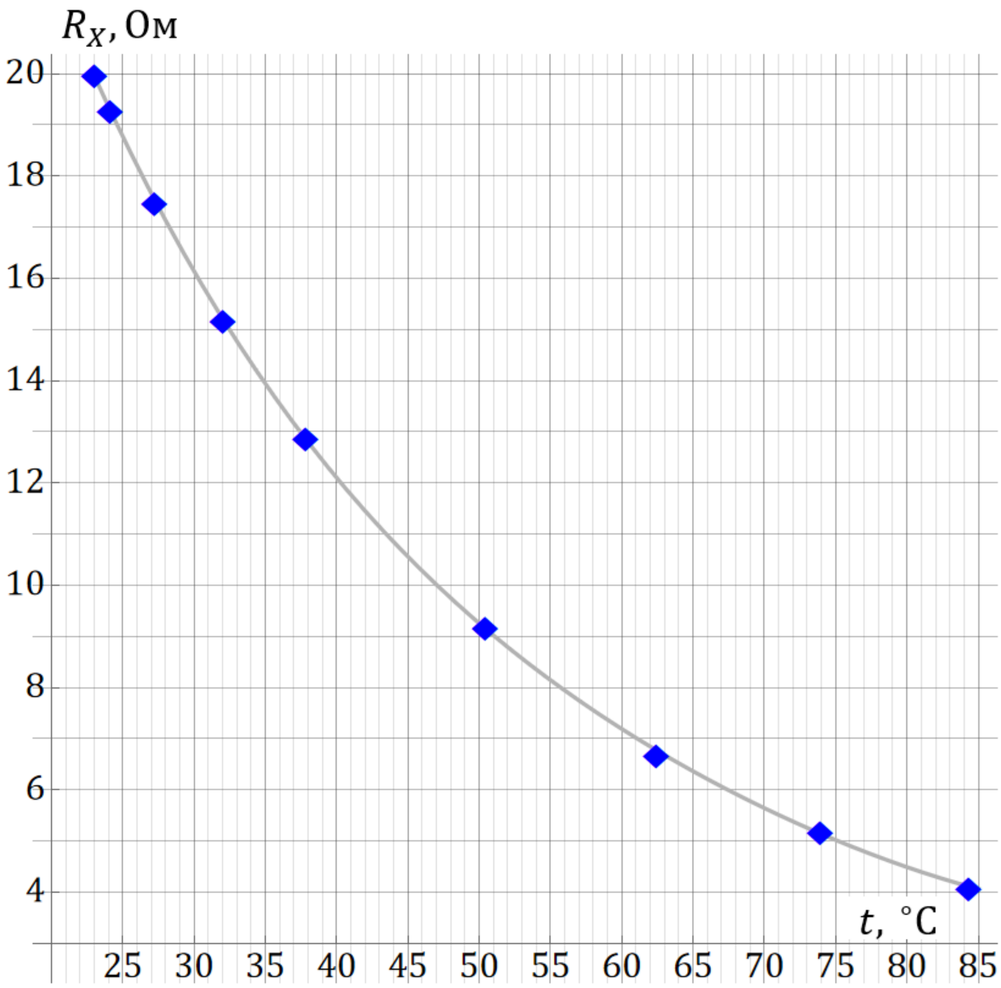
Это, учитывая, что $\Delta t = t - t_0$, в дальнейшем раскрывается как

$$t = t_0 + \frac{U_0^2}{\text{A}} \cdot \frac{R_0 - \sigma(l_X - l_Y)}{\left(3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)\right)^2} = t_0 + \frac{U_0^2}{AR_0} \cdot \frac{1 - (l_X - l_Y)/L_0}{(3 - (l_X - l_Y)/L_0)^2}. \tag{25}$$

Учитывая выражение (15), мы снова находим зависимость температуры от двух независимых параметров $t(U_0, \xi)$ (оценивается только наличие последних двух столбцов):

U_0, В	l_X, см	l_Y, см	$l_X - l_Y$, см	U_X, В	I, мА	t, °C	R_X, Ом
0	168	168	0	0	0	23.0	20.0
1	170	163	7	0.33	17	24.1	19.3
2	178	152	26	0.61	35	27.2	17.5
3	188	138	50	0.83	54	32.0	15.2
4	197	123	74	0.98	76	37.8	12.9
6	213	100	113	1.12	122	50.4	9.2
8	223	84	139	1.15	171	62.4	6.7
10	230	75	155	1.15	221	73.9	5.2
12	234	68	166	1.13	272	84.3	4.1

Графически получаем следующую зависимость:



Интересный факт: подобная зависимость появляется по той причине, что электроны преодолевают некий энергетический барьер ΔE из уровня Ферми в зону проводимости, «вырываются» из кристаллической решётки полупроводника, и перемещаются под внешним электрическим полем, вызванным разностью напряжений на полупроводнике. Чем выше температура, тем «проще» электронам «перепрыгнуть» в зону проводимости. Вообще говоря, сопротивление полупроводника асимптотически стремится к некоторому фиксированному значению R' в пределе очень больших температур, и хорошо описывается функцией $R_X = R' \exp\left(\frac{\Delta E}{2k_B T}\right)$, где k_B – постоянная Больцмана, и T – абсолютная температура в Кельвинах. Использованный Галымом полупроводник имел $\Delta E \approx 0.47$ эВ $= 7.56 \cdot 10^{-20}$ Дж.

№	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$	0.2	**0.4**
	Численное значение (2): $R_0 = 30$ Ом	0.2	
3.2	Формула (3): $U_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2$, либо $U_0 = I_0 R_0' + I_3 R_3$	0.2	**1.5**
	Формула (4): $I_0 R_0' = I_1 R_1$	0.1	
	Формула (5): $I_3 R_3 = I_2 R_2$	0.1	
	Формула (6): $I_A = \pm(I_2 - I_1)$, либо $I_A = \pm(I_3 - I_0)$, либо $I_0 + I_1 = I_2 + I_3$ (только два уравнения из трёх)	0.1×2	
	Формула (7): $R_0' = \frac{R_1 R_3 (U_0 \mp I_A R_2)}{U_0 R_2 \pm I_A (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}$ (знак $\pm$ необязателен)	0.3	
	Численные значения (8): $R_0' = 20.0$ Ом и $R_0' = 47.0$ Ом	0.2×2	
	Указано, что должно быть $R_0' = 20.0$ Ом (только при наличии $R_0' = 47.0$ Ом)	0.2	
3.3	Формула (9): $S = \frac{\pi d^2}{4}$	0.1	**1.0**
	Формула (10): $R_{\text{sh}} = \frac{\rho L}{S}$	0.2	
	Формула (11): $I'_{\max} = I_{\max} \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R_{\text{sh}}}\right)$	0.3	

	Формула (12): $L = \frac{\pi d^2 R_A}{4\rho} \cdot \frac{I_{\max}}{I'_{\max} - I_{\max}}$	0.2	
	Численный ответ в (12): $L = 10.5$ см	0.2	
3.4	Формула (13): $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_X + \sigma l_X}{R_Y + \sigma(L_0 - l_X)}$	0.3	**1.2**
	Формула (14): $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_Y + \sigma l_Y}{R_X + \sigma(L_0 - l_Y)}$	0.3	
	Формула (15): $R_X = R_Y - \sigma(l_X - l_Y)$	0.6	
3.5	Формула (16): $\sigma = \frac{4\rho}{\pi d^2}$	0.1	**0.7**
	Формула (17): $l_Y = 0$, или $l_X = L_0$	0.2	
	Формула (18): $L_0 = \frac{\pi d^2 R_0}{4\rho}$	0.2	
	Численный ответ в (18): $L_0 = 2.09$ м	0.2	
3.6	Формула (19): $I = \frac{U_0}{R_X + R_Y + \sigma L_0}$	0.3	**3.2**
	Формула (20): $I = \frac{U_0}{3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)}$ или $I = \frac{U_0/R_0}{3 - (l_X - l_Y)/L_0}$	0.2	
	Формула (21): $U_X = U_0 - I(R_Y + \sigma L_0)$	0.3	
	Формула (22): $U_X = U_0 - 2IR_0 = U_0 \cdot \frac{R_0 - \sigma(l_X - l_Y)}{3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)} = U_0 \cdot \frac{1 - (l_X - l_Y)/L_0}{3 - (l_X - l_Y)/L_0}$ (один из трёх вариантов)	0.2	
	Таблица 1: записаны $l_X - l_Y$ с отличием ± 2 см или точнее от авторских значений (по 0.1 баллу за каждые 2 точки)	0.1×4	
	Таблица 1: записаны U_X с отличием ± 0.05 В или точнее от авторских значений (по 0.1 баллу за каждые 2 точки)	0.1×4	
	Таблица 1: записаны I с отличием ± 5 мА или точнее от авторских значений (по 0.1 баллу за каждые 2 точки)	0.1×4	
	График 1: нанесены все точки из таблицы	0.3	
	График 1: оси подписаны и оцифрованы	0.2	
	График 1: проведена сглаживающая кривая	0.2	
	Численное значение (23): $U_{\max} = 1.15 \pm 0.05$ В	0.3	
3.7	Формула (24): $A\Delta t = U_X I$	0.3	**2.0**
	Формула (25): $t = t_0 + \frac{U_0^2}{A} \cdot \frac{R_0 - \sigma(l_X - l_Y)}{\left(3R_0 - \sigma(l_X - l_Y)\right)^2}$ или $t = t_0 + \frac{U_0^2}{AR_0} \cdot \frac{1 - (l_X - l_Y)/L_0}{(3 - (l_X - l_Y)/L_0)^2}$	0.2	
	Таблица 2: записаны t с отличием ± 0.5°C или точнее от авторских значений (по 0.1 баллу за каждые 2 точки)	0.1×4	
	Таблица 2: записаны R_X с отличием ± 0.2 Ом или точнее от авторских значений (по 0.1 баллу за каждые 2 точки)	0.1×4	
	График 2: нанесены все точки из таблицы	0.3	
	График 2: оси подписаны и оцифрованы	0.2	
	График 2: проведена сглаживающая кривая	0.2	
Итого		**10.0**	