

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ДАРЫН»
ЧЕТВЕРТЫЙ (ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ) ЭТАП РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО
ПРЕДМЕТУ ФИЗИКА (2024-2025 УЧЕБНЫЙ ГОД)
11 класс, 1 тур

Время работы: 5 часов

Задача 1. «Солянка» [10,0 баллов]

Эта задача состоит из трех независимых частей.

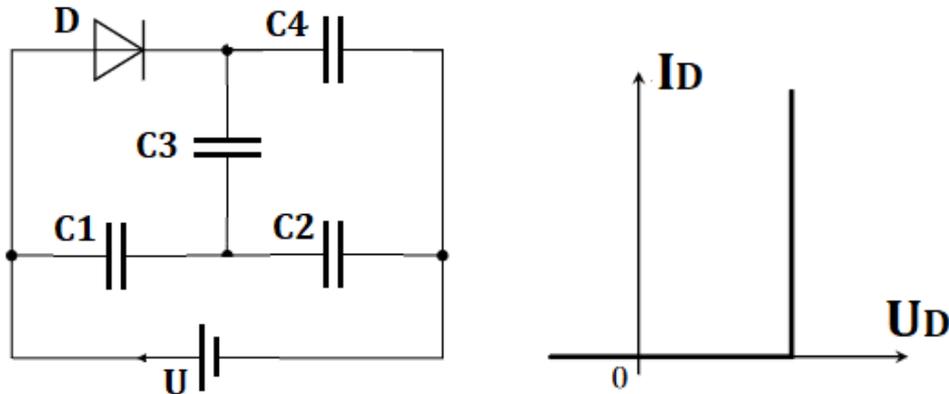
Часть 1.1. Плавающий параболоид (3,0 балла)

В различные жидкости, налитые в широкие сосуды, попеременно погружают вершиной вниз тело вращения, имеющее форму параболоида (осевое сечение – парабола вида $y = Ax^n$, а $x = 0$ соответствует вершине тела, верхнее сечение перпендикулярно оси). Известно, что тело при этом плавает, погружаясь на некоторую глубину, и для каждой жидкости измерен период малых вертикальных колебаний тела, которое не наклоняется и не переворачивается, так что его ось остается строго вертикальной. В таблице дана зависимость периода колебаний от глубины погружения тела. Определите степенной коэффициент n параболы. Расчёт погрешностей не требуется.

T, с	0.25	0.35	0.43	0.49	0.55
h, с	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30

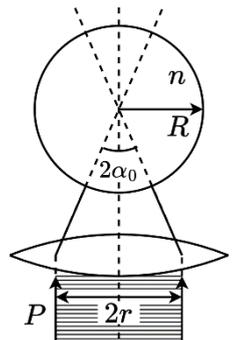
Часть 1.2 Диод всё меняет (3,5 балла)

Система из конденсаторов, каждый ёмкостью C , и диода D подключена к источнику постоянного напряжения U , значение которого медленно растёт от нулевого значения. Вольтамперная характеристика диода изображена на рисунке, излом графика – так называемый пробой диода, значение напряжения пробоя диода неизвестно. Когда через источник пройдёт известный заряд q_0 , перестанет выполняться прямая пропорциональность между входным напряжением U и протёкшим через источник зарядом q . Постройте график зависимости $q(U)$ в диапазоне изменения заряда через источник от 0 до $2q_0$. Какое количество теплоты Q выделится на диоде к моменту, когда через источник пройдет заряд $2q_0$?



Часть 1.3 Лазерная ловушка (3,5 балла)

Пучок света круглого сечения радиуса r падает на собирающую **Часть 1.3 Лазерная ловушка (3,5 балла)** несферическую линзу, после прохождения которой он образует конус с углом раствора $2\alpha_0$. В вершину светового конуса помещают маленький шарик радиуса R , изготовленный из прозрачного материала с показателем преломления n ; потерь на отражение и поглощение нет, центр шара совпадает с фокусом пучка. Найдите действующую на шарик возвращающую силу при его малом смещении x вдоль оси конуса светового пучка. Известно, что мощность пучка света P равномерно распределена по его сечению до попадания на линзу. Скорость света в вакууме c . Подсказка: В некоторых расчётах может оказаться полезной замена $u = \cos\alpha$.



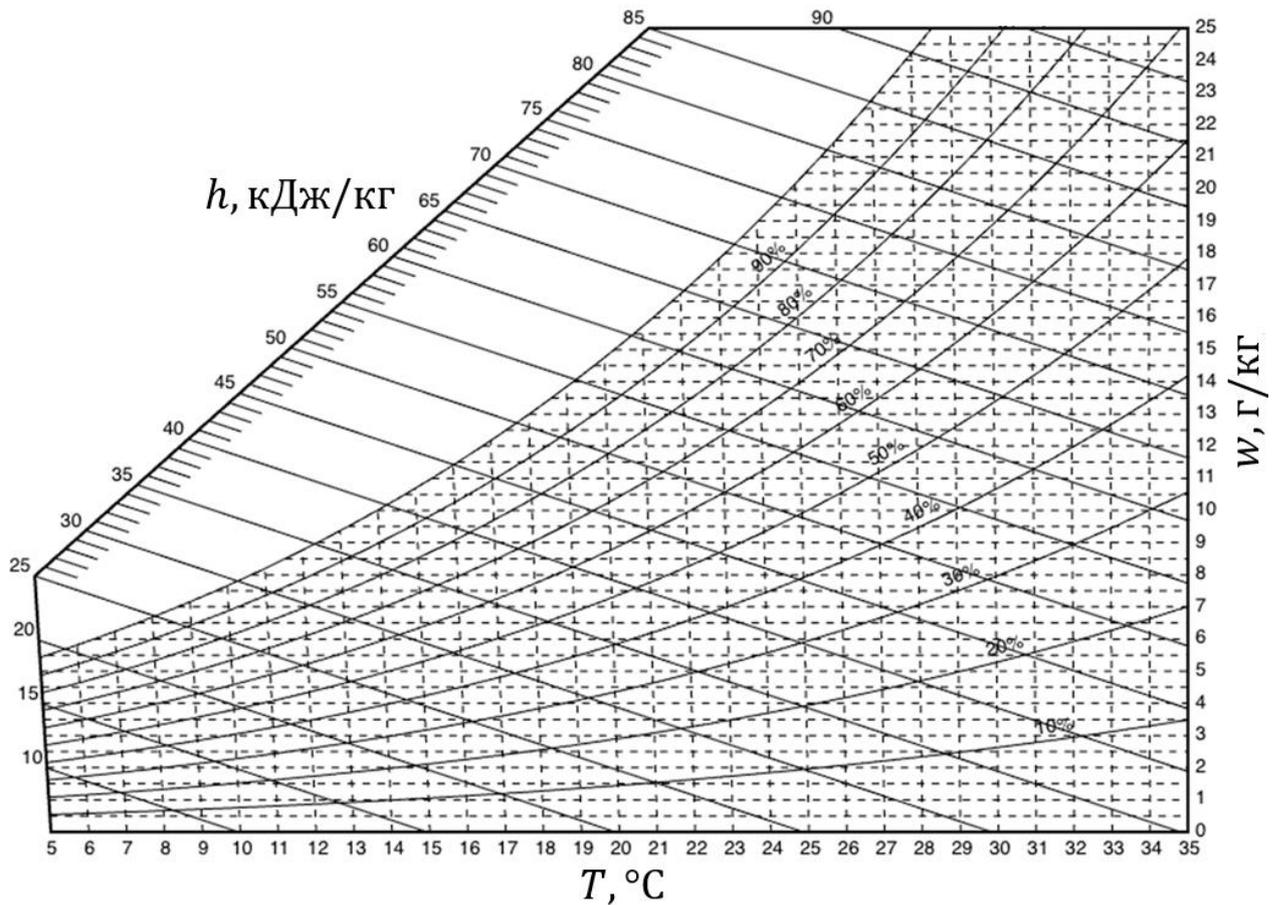
Задача_2. Проектирование системы кондиционирования воздуха [10,0 баллов]

В этой задаче мы применим концепции термодинамики для проектирования системы кондиционирования воздуха. Цель системы кондиционирования воздуха — поддерживать комнату при постоянной температуре $T_{IA} = 24^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\varphi_{IA} = 50\%$ для комфорта людей в помещении. Внешние условия составляют $T_{OA} = 32^\circ\text{C}$ и $\varphi_{OA} = 40\%$. Вам предоставлена психрометрическая диаграмма для помощи в расчетах, где линии постоянной относительной влажности отображены кривыми линиями. Ниже представлена психрометрическая диаграмма, которая графически отображает связь между температурой влажного воздуха T , его влагосодержанием w (масса воды в единице массы сухого воздуха), относительной влажностью воздуха φ и его удельной энтальпией h . Линии постоянной относительной влажности отображены кривыми линиями, а относительная влажность указана в процентах. Линии постоянной энтальпии являются наклонными прямыми, линии постоянного влагосодержания – горизонтальные прямые, а линии постоянной температуры – вертикальные прямые.

Справка: Энтальпия – это функция состояния системы, определяемая как:

$$H = U + PV,$$

где U – внутренняя энергия, P – давление, V – объем. Таким образом, на левой стороне диаграммы находится ось удельной энтальпии h , то есть энтальпии на единицу массы сухой части воздуха $h = \Delta H / \Delta m$.



2.1. Используя диаграмму, определите, какой будет относительная влажность, если просто охладить наружный воздух до T_{IA} .

2.2. Используя психрометрическую диаграмму, найдите влагосодержание наружного w_{OA} и внутреннего w_{IA} воздуха.

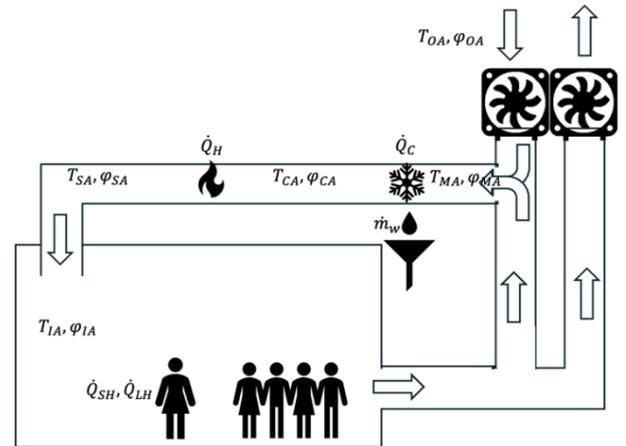
2.3. Энтальпия обычно используется для определения количества тепла в процессе. Предполагая, что процесс является изобарическим (давление P) и происходит переход из состояния с энтальпией H_1 в состояние с энтальпией H_2 , выведите выражение для количества тепла Q , добавленного в систему.

Далее предполагаем, что все процессы являются изобарическими и проходят при атмосферном давлении.

2.4. Используя диаграмму, определите удельную теплоемкость сухого воздуха c_A .

2.5. Используя диаграмму, определите удельную теплоту испарения воды L .

Комната, для которой мы проектируем кондиционер, содержит $n = 30$ человек. Каждый человек должен получать $\dot{V}_H = 8$ л/с свежего (наружного) воздуха для обеспечения санитарных норм. Чтобы уменьшить количество энергии, необходимой для охлаждения воздуха, свежий наружный воздух смешивается с возвращаемым из комнаты воздухом в пропорции 1:3. Смешанный воздух затем проходит через охлаждающий змеевик, где он охлаждается до T_{CA} ; при этом часть воды конденсируется (вы могли наблюдать утечку такой воды из кондиционеров). После этого, воздух подогревается до T_{SA} с помощью нагревательного змеевика и подается в помещение. Для упрощения можно считать, что плотность воздуха остается постоянной во всей системе и равна $\rho = 1.23$ кг/м³. Человеческое тело выделяет $\dot{Q}_{SH} = 80$ Вт тепла за счет теплообмена с окружающим воздухом и $\dot{Q}_{LH} = 80$ Вт за счет испарения пота.



2.6. Выведите выражение для T_{MA} , w_{MA} смешанного воздуха и найдите их значения.

2.7. Выведите выражение для T_{SA} , w_{SA} и найдите их значения.

2.8. Найдите T_{CA} , ϕ_{CA} .

2.9. Найдите скорость конденсации воды \dot{m}_w .

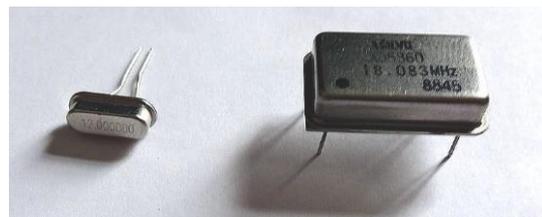
2.10. Найдите количество теплоты, отводимой охлаждающим змеевиком \dot{Q}_C .

2.11. Найдите количество теплоты, подаваемой нагревательным змеевиком \dot{Q}_H .

2.12. Если температура охлаждающего змеевика поддерживается на уровне T_{CA} и он работает как холодильник Карно с температурой нагревателя T_{OA} , найдите полную потребляемую мощность охлаждающего змеевика.

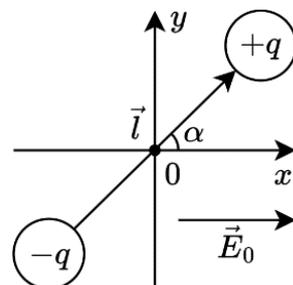
Задача 3. Кварцевый резонатор (10,0 баллов)

Данная задача посвящена кварцевому резонатору – электронному прибору, в основе которого заложен механический резонанс и пьезоэлектрический эффект – который нашёл широкое применение в часовых схемах, полосовых фильтрах, генераторах с фиксированной частотой, и прочих элементах электротехники, требующих высокую стабильность частоты сигнала. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



Поляризация

Из школьной физики известно, что диэлектрики поляризуются под внешним электрическим полем. Для более глубокого понимания механизма поляризации следует ввести понятие об электрическом диполе. В простейшей модели диполь – два жёстко связанных точечных заряда с равными, но противоположными зарядами q . Вектор \vec{l} расстояния между этими зарядами направлен от отрицательного заряда к положительному, а также не меняется по модулю. Тогда вводят понятие о дипольном моменте $\vec{p} = q\vec{l}$. Рассмотрим один диполь с описанными выше параметрами, геометрический центр которого находится в начале координат во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 вдоль оси x .



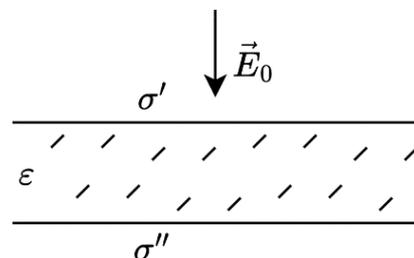
3.1. Пусть \vec{l} составляет угол α с осью x . Рассчитайте потенциальную энергию диполя U в поле E_0 , считая $U = 0$ в положении устойчивого равновесия. Выразите ответ через p , E_0 и α .

3.2. У упругого диполя дипольный момент является наведенным, то есть появляется вследствие действия самого поля, так что $\vec{p} = \beta \epsilon_0 \vec{E}_0$, где β – так называемая поляризуемость. Рассчитайте изменение потенциальной энергии ΔU упругого диполя при $\alpha = 0$, который медленно внесли в поле \vec{E}_0 и выразите его через β и E_0 .

Молекулы вещества диэлектрика можно представить как упругие диполи, которые, как это видно из **3.1-3.2**, ориентируются в направлении внешнего электрического поля \vec{E}_0 , и в сумме создают внешнее макроскопическое поле, которое ослабляет E_0 внутри диэлектрика. Характеристикой поляризованного диэлектрика служит вектор поляризации \vec{P} , суть которого – суммарный дипольный момент вещества на единицу его объёма. Согласно модели упругих диполей, $\vec{p} \propto \vec{E}_0$, откуда $\vec{P} \propto \vec{E}_0$, и потому вводят понятие о диэлектрической проницаемости ϵ .

3.3. Для решения пункта **3.4** вам поможет вспомогательная задача: найдите напряжённость поля E от равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ бесконечной плоскости.

Рассмотрим плоскопараллельную диэлектрическую пластину проницаемостью ϵ в вакууме, на которую нормально падает однородное электрическое поле E_0 . Ввиду её поляризации, на обеих поверхностях пластины появляется поверхностный заряд, создающий поле \vec{E}' и ослабляющий \vec{E}_0 внутри пластины. В таком случае вектор поляризации определяется как $\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}'$. В случае однородного E_0 объёмная плотность поляризационных зарядов в пластинке равна нулю.

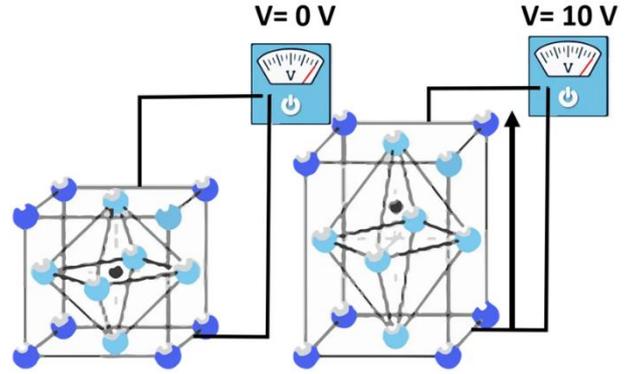


3.4. Определите \vec{P} и поверхностные плотности σ' и σ'' зарядов на поверхностях пластинки.

3.5. Найдите связь между β из **3.2** и ϵ , если концентрация молекул диэлектрика равна n .

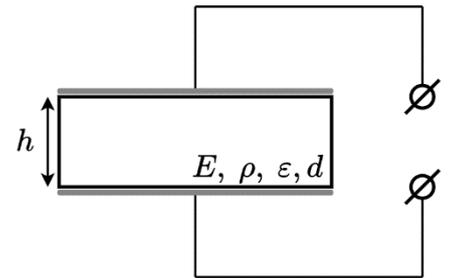
Пьезоэлектрик

Пьезоэлектрик – материал, отличительной чертой которого является появление электрической поляризации под действием внешнего механического напряжения (прямой пьезоэлектрический эффект), или появление внутренних сил напряжения под действием внешнего электрического поля (обратный пьезоэлектрический эффект). На молекулярном уровне, к примеру, прямой пьезоэлектрический эффект, как это схематически указано на рисунке справа, проявляется по той причине, что при механическом воздействии на кристалл (например, кварца SiO_2) появляется анизотропность внутренней структуры, отчего дипольные моменты в ионных связях складываются в определенном направлении, макроскопически вызывая поляризацию кристалла.



Характеристикой пьезоэлектричества (в случае одномерного механического напряжения) является $P = d \cdot \tau$, где P – модуль вектора поляризации, τ – механическое натяжение (сила на единицу площади) на пьезоэлектрик, а $d = 2.33 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н для кварца. В пунктах 3.6-3.7 и 3.12 считайте также известными для кварца: модуль Юнга $E = 72$ ГПа, плотность $\rho = 2200$ кг/м³, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 4$.

Из пьезоэлектрика собирают кварцевый резонатор следующим образом: на плоскопараллельный кварц толщиной $h = 1.6$ мм по обе его стороны наносят электроды – проводящие металлические полоски, выполненные напылением в вакууме плёнки металла на заданные поверхности кристалла. Получается импровизированный плоский конденсатор, в качестве диэлектрика которого служит пьезоэлектрический кварц.



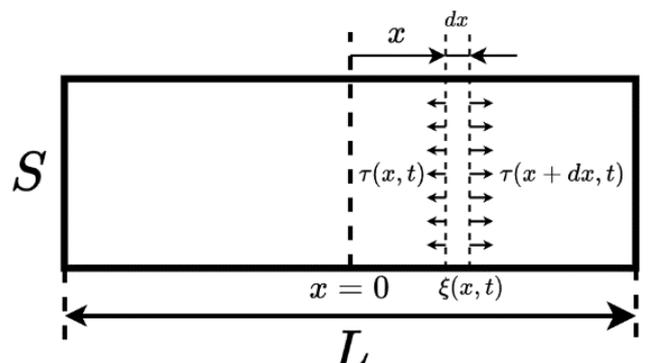
3.6. Определите разность потенциалов $\Delta\varphi$ на таком конденсаторе под действием атмосферного давления $P_0 = 10^5$ Па при отсутствии внешнего напряжения.

3.7. Теперь конденсатор внесли в вакуум, и ему сообщили внешнее напряжение $V = 9$ В. Определите отношение W_d/W_e запасённой энергии деформации кварца W_d к электрической энергии соответствующего конденсатора W_e . Объёмная плотность упругой энергии равна $w_d = \tau^2/2E$.

Собственная частота колебаний кварца

Из предыдущей части видно, что кварцевый резонатор при приложении внешнего напряжения, растягивается и набирает запас упругой энергии, отчего при отключении питания он начинает упруго вибрировать с некоторой собственной частотой и вызывать на своих пластинках переменную ЭДС.

Рассмотрим неподвижный упругий цилиндр площадью S и длиной L , центр которого находится в начале координат как указано на рисунке справа; модуль Юнга и плотность материала цилиндра равны E и ρ . Цилиндр может продольно вибрировать; при этом для простоты положим, что его концы свободны. Характеристикой вибраций служат механическое напряжение $\tau(x, t)$ и возмущение $\xi(x, t)$ (смещение рассматриваемого



элемента цилиндра толщиной dx ; возмущения малы, то есть $\xi \ll dx$).

3.8. Если $\tau(x, t)$ неравномерен в пространстве, то $\xi(x, t)$ меняется во времени. Запишите второй закон Ньютона для элемента толщины dx в заданной точке x под действием приращения напряжения $d\tau(x, t)$.

3.9. Выразите изменение возмущения $d\xi(x, t)$ малого элемента dx цилиндра через напряжение $\tau(x, t)$ и модуль Юнга E в заданный момент t .

В дальнейшем воспользуйтесь тем фактом, что общее решение для возмущения цилиндра

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{\omega x}{c} + \theta\right),$$

где c – скорость звука в цилиндре, а ω – циклическая частота вибраций.

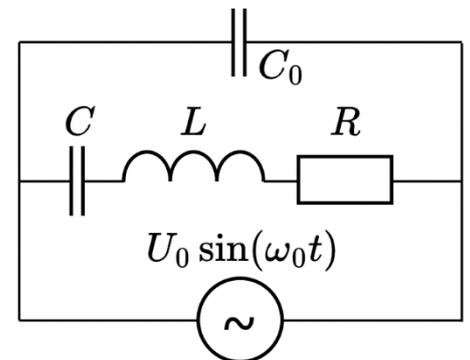
3.10. Используя результаты пунктов **3.8-3.9**, определите c через параметры цилиндра.

3.11. Запишите необходимое условие для $\tau(\pm L/2, t)$. Из этого определите возможные значения, которые может принимать ω .

3.12. Рассчитайте численное значение частоты f_0 вибраций кварца толщиной $h = 1.6$ мм, связанной с наименьшим (так называемым фундаментальным) значением ω .

Аналогия с резонаторным контуром

Собственные колебания кристалла в результате пьезоэлектрического эффекта наводят на электродах дополнительную ЭДС, и поэтому кварцевый резонатор электрически ведёт себя подобно резонансной цепи. По этой причине кварц в первом приближении ведёт себя как указанный на рисунке справа RLC -участок с малыми омическими потерями. Рассмотрим схему подключения кварцевого резонатора с генератором переменного напряжения амплитудой U_0 и частотой ω_0 . Поскольку резонатор – это конденсатор ёмкостью C_0 с кварцевым диэлектриком, к RLC -участку в аналогичной электрической цепи следует также параллельно подключить ёмкость C_0 . Полученная эквивалентная схема показана на рисунке справа.



3.13. Чему равна разность фаз φ между колебаниями напряжения на сопротивлении R и конденсаторе C_0 в установившемся режиме?

В такой эквивалентной схеме наблюдается два режима резонанса, происходящие при частотах генератора $\omega_0 = \omega_1$ и $\omega_0 = \omega_2$. При ω_1 происходит *резонанс напряжений* – частота генератора совпадает с резонансной частотой RLC -участка; при этом амплитуда силы тока через генератор резко возрастает. При ω_2 же происходит *резонанс токов* – ток через генератор значительно снижается (хотя при ω_2 он необязательно минимален), и внутренний контур, состоящий из RLC -участка и C_0 , ведёт себя как непроницаемая пробка, внутри которой совершаются свободные колебания тока с малыми затуханиями (что компенсируется небольшой подачей малого тока от внешнего генератора); тогда ω_2 равен собственной частоте таких свободных колебаний.

3.14. Определите значения ω_1 и ω_2 через приведённые параметры контура.

Для описания колебательных систем с низкими потерями энергии вводят понятие о добротности $Q = 2\pi \cdot E / \Delta E$, где E – максимально возможный запас энергии в системе, а ΔE – потери энергии за один период.

3.15. Оцените Q , если $C = 0.5 \cdot 10^{-12}$ Ф, $C_0 = 50 \cdot 10^{-12}$ Ф, $R \approx 10$ Ом, а $\omega_0 = \omega_1 = 2\pi f_0$, где f_0 численно определён в пункте **3.12**.