

Решение задач республиканской олимпиады по физике-2025
11 класс

Задача 1. «Солянка» [10,0 баллов]

Часть 1.1. Плавающий параболоид (3,0 балла)

Пусть масса тела m . Колебания вызовет прибавка к силе Архимеда из-за увеличения погруженного объема на Sx . $m\omega^2 x = \rho_{\text{ж}} g S x$	(1)
Используем связь с объемом вытесненной воды $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\rho_{\text{ж}} g S}{m} = \frac{g S}{V_{\text{п}}}$	(2)
Если $r = \left(\frac{h}{A}\right)^{\frac{1}{n}}$	(3)
$S = \pi \left(\frac{h}{A}\right)^{\frac{2}{n}}$	(4)
$V_{\text{п}} = \int S dh = \frac{\pi h^{\frac{2}{n}+1}}{\left(\frac{2}{n} + 1\right) A^{\frac{2}{n}}}$	(5)
$\frac{S}{V_{\text{п}}} = \frac{\frac{2}{n} + 1}{h}$	(6)
$n = \left(\frac{2\pi^2 h}{g T^2} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$	(7)
0.67 0.68 0.68 0.67 0.67	(8)
$n_{\text{ср}} \approx 0.67 \approx \frac{2}{3}$	(9)

(1)	0,5 балла
(2)	0,25 балла
(3)	0,25 балла
(4)	0,25 балла
(5)	0,5 балла
(6)	0,25 балла
(7)	0,25 балла
(8)	0,5 балла
(9)	0,25 балла

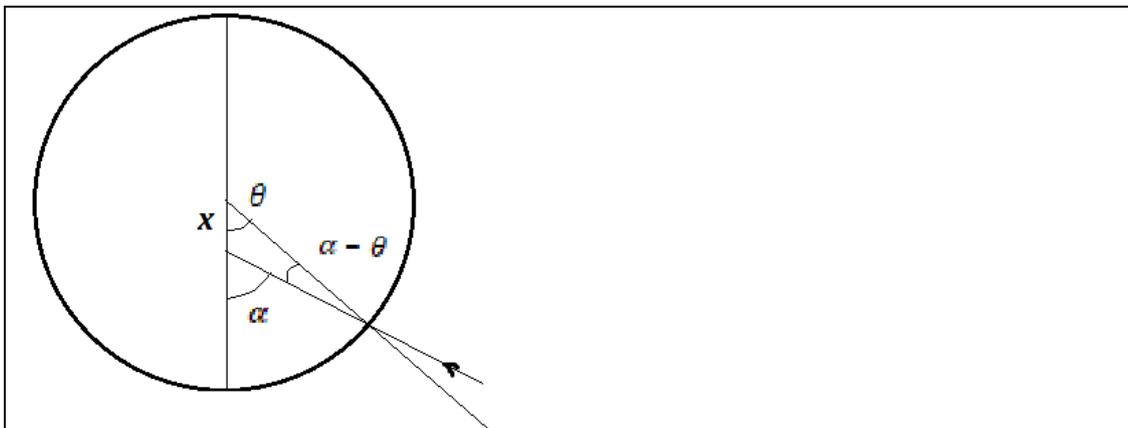
Часть 1.2 Диод всё меняет (3,5 балла)

До пробоя диода $q = \frac{3}{5} C U$	(1)
До пробоя диода заряды конденсаторов $q_1 = q$ и $q_3 = \frac{q}{3}$. $q = q_0$ - пробой конденсатора	(2)
Напряжение пробоя диода следует из закона Кирхгофа для контура, содержащего конденсаторы 1, 3 и диод. $U_{\text{д}} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{C} = \frac{4}{3} \frac{q_0}{C}$	(3)
$q_2 + q_3 = q_1$	(4)
	(5)

$\frac{q_3}{C} + \frac{q_4}{C} = \frac{q_2}{C}$ $U = U_d + \frac{q_4}{C} = \frac{4q_0}{3C} + \frac{q_4}{C}$	(6)
$q_1 = \frac{CU}{3} + \frac{4}{9}q_0$	(7)
$q_2 = \frac{2CU}{3} - \frac{4}{9}q_0$	(8)
$q_3 = \frac{8}{9}q_0 - \frac{CU}{3}$	(9)
$q_4 = CU - \frac{4}{3}q_0$	(10)
<p>Зависимость $q(U)$ на участке $q_0 \leq q \leq 2q_0$:</p> $q = q_2 + q_4 = \frac{5CU}{3} - \frac{16}{9}q_0$ <p>График зависимости $q(U)$:</p>	(11)
<p>Теплота на диоде начинает выделяться после его пробоя. Заряд прошедший через диод на участке от q_0 до $2q_0$:</p> $\Delta q_d = \Delta(q_4 - q_3) = \Delta\left(\frac{4}{3}CU - \frac{20}{9}q_0\right) = \frac{4}{3}C\Delta U$	(12)
<p>Изменение напряжения на системе:</p> $\Delta U = U(2q_0) - U(q_0) = \frac{3q_0}{5C}$	(13)
<p>Теплота выделенная на диоде равняется</p> $Q = U_d \Delta q_d = \frac{16q_0^2}{15C}$	(14)

Формула (1)	0,5 балла
Формулы (2-3)	0,2*2 балла
Формулы (4-6)	0,2*3 балла
Формула (8)	0,2 балла
Формула (10)	0,2 балла
Формула (11)	0,25 балла
График – участки сшиваются, участок 1 верный, участок 2 верный	0,2*3 балла
Формулы (12-14)	0,25*3 балла

Часть 1.3 Лазерная ловушка (3,5 балла)



Пусть шарик сдвинулся вдоль оси пучка на x . Луч, входивший в центр шара под углом α к оси пучка, теперь составляет с радиусом и нормалью малый угол $(\alpha - \theta)$,

$$(1)$$

После преломления он отклонится от оси на $(1 - \frac{1}{n})(\alpha - \theta)$ и на столько же после выхода. Итого

$$\Delta\alpha = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\alpha - \theta), \quad (2)$$

Из теоремы синусов

$$\frac{x}{\alpha - \theta} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

$$\Delta\alpha = \frac{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)x \sin \alpha}{R}, \quad (4)$$

этот угол также малый.

Если в диапазон углов $d\alpha$ вблизи угла α попадало количество фотонов dN с энергией $dW = dN\hbar\omega$, то они несли импульс

$$dp = \frac{dN\hbar\omega}{c} = \frac{dW}{c}, \quad (5)$$

После отклонения изменение импульса вдоль оси (радиальные изменения компенсируют друг друга)

$$dp\Delta(\cos \alpha) = -dp \sin(\alpha)\Delta\alpha = -\frac{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)x \sin^2 \alpha}{R} dp, \quad (6)$$

Сила вызванная этим

$$\begin{aligned} dF &= \frac{dp\Delta(\cos \alpha)}{dt} = -\frac{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)x \sin^2 \alpha}{R} \frac{dp}{dt} = \\ &= -\frac{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)x \sin^2 \alpha}{cR} \frac{dW}{dt} = -\frac{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)x \sin^2 \alpha}{cR} dP, \end{aligned} \quad (7)$$

Мощность в угол $d\alpha$ попадала с кольцевого участка луча радиусом ρ и толщиной $d\rho$

$$\rho = r \operatorname{ctg} \alpha_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$

$$d\rho = \frac{r \operatorname{ctg} \alpha_0 d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad (9)$$

$$dP = P \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi r^2} = \frac{2P \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 \sin \alpha d\alpha}{\cos^3 \alpha}, \quad (10)$$

$$dF = - \frac{4P \left(1 - \frac{1}{n}\right) x \operatorname{ctg}^2 \alpha_0 \sin^3 \alpha \, d\alpha}{cR \cos^3 \alpha}, \quad (11)$$

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\sin^3 \alpha \, d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \int_0^{\alpha_0} \frac{(\cos^2 \alpha - 1) d(\cos \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \int_0^{\alpha_0} \frac{d(\cos \alpha)}{\cos \alpha} - \int_0^{\alpha_0} \frac{d(\cos \alpha)}{\cos^3 \alpha} =$$

$$= \ln \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha_0}, \quad (12)$$

$$F = \left(\ln \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha_0} \right) \frac{4P \left(1 - \frac{1}{n}\right) x \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{cR}, \quad (13)$$

Формула	Баллы
(1)	0,3 балла
(2)	0,2 балла
(3)	0,2 балла
(4)	0,2 балла
(5)	0,3 балла
(6)	0,3 балла
(7)	0,3 балла
(8)	0,2 балла
(9)	0,3 балла
(10)	0,3 балла
(11)	0,2 балла
(12)	0,5 балла
(13)	0, балла
Итого	3.5 балла

Задача 2. Проектирование системы кондиционирования воздуха [10,0 баллов]

1. Найдём на психометрической диаграмме точку внешнего воздуха, а затем ищем точку с таким же влагосодержанием и температурой 24 градуса. Эта точка находится примерно посередине между линий 60% и 70% относительной влажности, но чуть ближе к линии 60%, следовательно относительная влажность будет равна 64%

Альтернативное решение:

При понижении температуры до температуры выше точки росы влагосодержание не изменится, следовательно оно останется равным 12г/кг. Для 24 градусов мы видим, что 17г/кг соответствует 90% относительной влажности, следовательно 12 г/кг будет соответствовать $12/17 \cdot 90 \approx 64\%$

2. Из психометрической таблицы видно, что линии относительной влажности 40% и температуры 32° пересекаются при $w_{OA} = 12 \frac{g}{kg}$, а линии относительной влажности 50% и температуры 24° – $w_{IA} = 9.5 \frac{g}{kg}$
3. Распишем выражение для разности энтальпий:

$$H_2 - H_1 = U_2 + PV_2 - U_1 - PV_1 = \Delta U + P\Delta V = \Delta U + A = Q$$
4. Из психометрической таблицы мы видим, что при изменении температуры с 10 до 35 градусов при нулевом содержании влаги удельная энтальпия меняется с 10 до 35кДж/кг. Следовательно, удельная теплоемкость воздуха:

$$c_A = 1.0 \text{ kJ/kg}$$

5. Из психометрической таблицы мы видим, что в одном килограмме при увеличении влагосодержания от 2 до 19,5 граммов, энтальпия изменится на 45кДж. Следовательно удельная теплота испарения воды примерно

$$L = 2600 \text{ kJ/kg}$$

6. Можем записать уравнения сохранения тепловой энергии для теплообмена наружного и возвращенного воздуха:

$$Q_{IA} + Q_{OA} = 0 \rightarrow c_A m_{IA} (T_{MA} - T_{IA}) + c_A m_{OA} (T_{MA} - T_{OA}), m_{IA} = 3m_{OA}, \quad T_{MA} = \frac{3T_{IA} + T_{OA}}{4} = 26^\circ\text{C}$$

Можем записать уравнения сохранения массы воды в смеси наружного m_{OW} и возвращенного воздуха m_{IW} :

$$m_{IW} + m_{OW} = m_{MW}, m_{IW} = w_{IA} m_{IA}, m_{OW} = w_{OA} m_{OA}, w_{MA} = \frac{m_{MW}}{m_{IA} + m_{OA}} = \frac{3w_{IA} + w_{OA}}{4} = 10 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$$

7. Поток свежего (наружного) воздуха $\dot{V}_f = n\dot{V}_H$

$$\text{Полный поток воздуха } \dot{V} = 4\dot{V}_f$$

$$\dot{Q}_S = n\dot{Q}_{SH}$$

$$\dot{Q}_L = n\dot{Q}_{LH}$$

На увеличение температуры влияет не влияет тепло, выделенное через потоотделение:

$$c_A \dot{m} (T_{IA} - T_{SA}) = c_A \rho \dot{V} (T_{IA} - T_{SA}) = \dot{Q}_S, T_{SA} = T_{IA} - \frac{\dot{Q}_S}{c_A \rho \dot{V}} = 22^\circ\text{C}$$

$$w_{SA} = w_{IA} - \frac{\dot{Q}_L}{L \rho \dot{V}} \approx 8.7 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$$

8. Так как при охлаждении произошла конденсация, значит из охлаждающего змеевика выходит воздух с насыщенным паром ($\varphi = 100\%$). Из психометрической диаграммы мы видим, что влажность 8.7 г/м соответствует температуре точки росы 12°C . Следовательно $T_{CA} = 12^\circ\text{C}, \varphi_{CA} = 100\%$

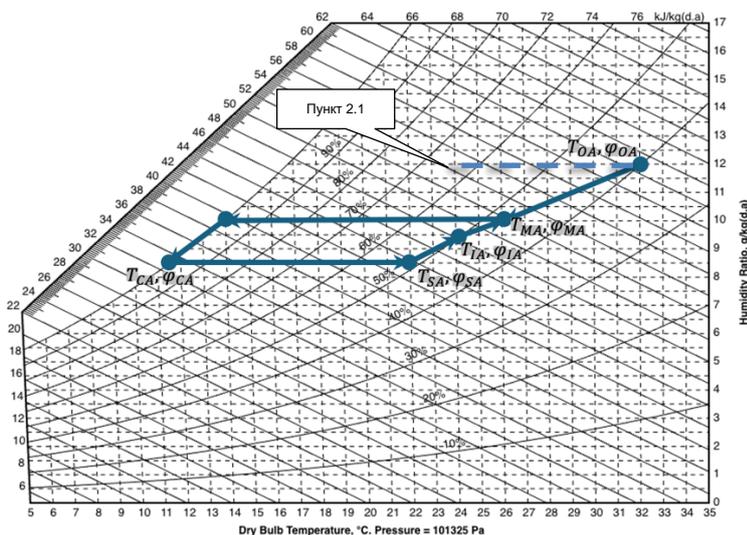
9. Вода образуется ввиду понижения влагосодержания воздуха от смешанного воздуха до поступающего в комнату воздуха: $\dot{m}_w = 4\rho n \dot{V}_H (w_{MA} - w_{SA}) = 1.7 \frac{\text{g}}{\text{s}}$

10. Из психометрической таблицы мы видим, что при охлаждении удельная энтальпия падает с 52 до 34 кДж/кг. Следовательно $\dot{Q}_C = 4\rho n \dot{V}_H (52 - 34) = 21 \text{ kW}$

11. Из психометрической таблицы мы видим, что при нагревании удельная энтальпия растёт с 34 до 44 кДж/кг. Следовательно $\dot{Q}_H = 4\rho n \dot{V}_H (44 - 34) = 12 \text{ kW}$

12. Для тепловых машин Карно справедливо равенство: $\frac{P}{\dot{Q}_C} = \frac{T_{OA} - T_{CA}}{T_{CA}}$, следовательно:

$$P = \dot{Q}_C \frac{T_{OA} - T_{CA}}{T_{CA}} = 1.5 \text{ kW}$$



Содержание		Баллы	
Часть 1		3.0	
2.1	Примерно 64%	0.25	
2.2	$w_{OA} = 12 \text{ g/kg}$,	0.25	0.5
	$w_{IA} = 9.5 \text{ g/kg}$	0.25	
2.3	$H_2 - H_1 = U_2 + PV_2 - U_1 - PV_1 = \Delta U + P\Delta V = \Delta U + A = Q$	0.75	
2.4	$c_a = 1.0 \text{ kJ/kg}$	0.75	
2.5	$L = 2500 \text{ kJ/kg}$	0.75	
Часть 2		7.0	
2.6	$c_a m_{IA}(T_{MA} - T_{IA}) = c_a m_{OA}(T_{OA} - T_{IA})$	0.25	1.0
	$T_{MA} = \frac{3T_{IA} + T_{OA}}{4} = 26^\circ\text{C}$	0.25	
	$m_{IW} + m_{OW} = m_{MW}$	0.25	
	$w_{MA} = \frac{3w_{IA} + w_{OA}}{4} = 10 \text{ g/kg}$	0.25	
2.7	$c_a \dot{m}(T_{IA} - T_{SA}) = \dot{Q}_S$	0.25	1.0
	$T_{SA} = 22^\circ\text{C}$	0.25	
	$w_{SA} = w_{IA} - \frac{\dot{Q}_L}{L_w \rho_a \dot{V}}$	0.25	
	$w_{SA} \approx 8.7 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$	0.25	
2.8	$T_{CA} \approx 12^\circ\text{C}$	1.0	1.75
	$\varphi_{CA} = 100\%$	0.75	
2.9	$\dot{m}_w = 4\rho n \dot{V}_H (w_{MA} - w_{SA})$	0.5	0.75
	$\dot{m}_w = 1.7 \frac{\text{g}}{\text{s}}$	0.25	
2.10	$\dot{Q}_C \approx 21 \text{ kW}$	0.75	
2.11	$\dot{Q}_H \approx 12 \text{ kW}$	0.75	
2.12	$\frac{P}{\dot{Q}_C} = \frac{T_{OA} - T_{CA}}{T_{CA}}$	0.75	1.0
	$P \approx 1.5 \text{ kW}$	0.25	
Итого			

Задача 3. Кварцевый резонатор (10,0 баллов)

Внимание: если справа от уравнения не стоит порядковый номер, то это уравнение оценивается в 0 баллов и лишь используется для детальности в авторском решении, либо существует в решении другое оцениваемое уравнение с аналогичным смыслом!

3.1. На каждый заряд в диполе действует сила

$$F_0 = qE_0. \quad (1) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Теперь нужно найти работу электрического поля. Это можно сделать двумя способами. Первый способ учитывает нахождение момента сил

$$M = -2 \cdot F_0 \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha = -pE_0 \sin \alpha \quad (2) \quad (0.2 \text{ балла})$$

(знак минус означает стремление к уменьшению угла α) и его интегрирования для определения работы электрического поля:

$$A = \int_{\alpha}^0 M d\alpha = qlE_0(1 - \cos \alpha) = pE_0(1 - \cos \alpha). \quad (3) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Второй способ использует прямое определение работы поля. Смещение положительного заряда на Δx вдоль оси икс равно

$$\Delta x = \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha), \quad (2') \quad (0.2 \text{ балла})$$

и потому совершаемая электрическим полем работа

$$A = 2F_0\Delta x = pE_0(1 - \cos \alpha). \quad (3') \quad (0.2 \text{ балла})$$

Множитель 2 учитывает отрицательный заряд. Поскольку работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии,

$$A = -(U(0) - U(\alpha)) = U(\alpha),$$

то выражение (3) или (3') и есть искомая потенциальная энергия.

3.2. В данной части можно проинтегрировать процесс растяжения диполя: при малом смещении одного заряда на dx дипольный момент увеличивается на

$$dp = 2qdx \quad (4) \quad (0.2 \text{ балла})$$

и поэтому

$$A = 2 \cdot \int_0^{l/2} Fdx = \int_0^{E_0} E dp = \beta \int_0^{E_0} E dE = \frac{\beta \varepsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (5) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Ответ можно найти другим способом: достаточно заметить, что

$$F_0 = qE_0 = \frac{q^2}{\beta \varepsilon_0} x, \quad (4') \quad (0.2 \text{ балла})$$

то есть в эффективном смысле мы рассматриваем растяжение пружины с коэффициентом жёсткости $k = q^2/\beta \varepsilon_0$. В таком случае внешняя работы равняется

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{p^2}{2\beta \varepsilon_0} = \frac{\beta \varepsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (5') \quad (0.3 \text{ балла})$$

Поскольку $A = -\Delta U$, искомым ответом будет

$$\Delta U = -\frac{\beta \varepsilon_0 E_0^2}{2}. \quad (6) \quad (0.2 \text{ балла})$$

3.3. Задача тривиальная и решается как законом Кулона, так и теоремой Гаусса. Для первого способа нужно сначала записать заряд, принадлежащий малому кольцу радиусом r :

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr \quad (7) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Тогда, если рассматриваемая точка находится на расстоянии h от плоскости, вклад данного кольца в электрическое поле равен

$$dE = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{dq}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}. \quad (8) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Интегрированием (7) по всей плоскости получим

$$E = \int_0^\infty dE = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (9) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Другой, более быстрый способ – запись теоремой Гаусса. Из соображения симметрии ясно, что электрическое поле должно быть однородно и перпендикулярно плоскости. Мысленно построив замкнутый цилиндр площадью S , проходящий перпендикулярно через плоскость, запишем теорему Гаусса

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}. \quad (7') \quad (0.2 \text{ балла})$$

Поток электрического поля Φ через цилиндр с обеих торцов равен

$$\Phi = 2ES, \quad (8') \quad (0.2 \text{ балла})$$

откуда получается идентичный ответ (9).

3.4. Внутри диэлектрической пластины электрическое поле падает в ε раз:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}. \quad (10) \quad (0.1 \text{ балл})$$

То есть существует поле \vec{E}' , суммарное действие которого с \vec{E}_0 должно давать \vec{E} , то есть

$$\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_0. \quad (11) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Собирая вместе и умножая на ε_0 , получаем для вектора поляризации

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}' = -\varepsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (12) \quad (0.1 \text{ балл})$$

В нижней части пластины электрическое поле также равно \vec{E}_0 . Учитывая результат пункта 3.3, получаем, во-первых,

$$\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma''}{2\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma' = -\sigma'' \quad (13) \quad (0.1 \text{ балл})$$

и, во-вторых,

$$E' = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma''}{2\varepsilon_0}, \quad (14) \quad (0.2 \text{ балла})$$

что приводит к

$$\sigma' = -\varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \sigma'' = \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (15) \quad (0.1 \text{ балл})$$

3.5. Так как вектор поляризации имеет смысл дипольного момента на единицу объёма, записываем

$$|P| = n|p|. \quad (16) \quad (0.2 \text{ балла})$$

В данном случае определение для упругой диполи представится в виде

$$p = \beta \varepsilon_0 \cdot \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (17) \quad (0.2 \text{ балла})$$

где было учтено, что отдельно взятый диполь находится в диэлектрике, поэтому «внешнее» поле имеет сниженное значение. Применяя (17) с (12), получаем

$$\varepsilon = 1 + n\beta. \quad (18) \quad (0.1 \text{ балл})$$

3.6. Разность потенциалов определяется наличием электрического поля в конденсаторе:

$$\Delta\varphi = Eh, \quad (19) \quad (0.1 \text{ балл})$$

а электрическое поле вызвано вектором поляризации через формулу к пунктам 3.4-3.5 (в таком случае $E' = E$):

$$E = \frac{P}{\varepsilon_0}. \quad (20) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Используя пьезоэлектрический эффект, из (17) и (18) получаем

$$\Delta\varphi = \frac{P_0 h d}{\varepsilon_0} = 42 \text{ В}. \quad (21) \quad (0.1 \text{ балл})$$

3.7. Ёмкость конденсатора равна

$$C_0 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{h}, \quad (22) \quad (0.1 \text{ балл})$$

так что запасённая в конденсаторе электрическая энергия равна

$$W_e = \frac{C_0 U^2}{2}. \quad (23) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Либо же можно сразу записать объёмную плотность электрической энергии вместо (21)-(22):

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E'^2}{2}, \quad (23') \quad (0.2 \text{ балла})$$

где $U = E'h$. При обратном пьезоэлектрическом эффекте используем формулу (12),

$$P = \frac{\varepsilon_0 U}{h} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon},$$

так что механическое напряжение однородно по объёму пьезоэлектрика и равно $\tau = P/d$. Применяя формулу для объёмной плотности упругой энергии, разделяя на (21'), либо умножая (23) на объём пьезоэлектрика Sh и разделяя на (21), получаем

$$\frac{W_d}{W_e} = \frac{w_d}{w_e} = \frac{\varepsilon_0}{Ed^2} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon^3} = \frac{9\varepsilon_0}{64Ed^2} = 3.2. \quad (24) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Интересно отметить, что результат зависит исключительно от характеристик кварца.

3.8. Под действием нескомпенсированной силы $d\tau S$ малый элемент

$$dm = \rho S dx \quad (25) \quad (0.2 \text{ балла})$$

имеет ускорение $\ddot{\xi}$, так что

$$\frac{\partial \tau(x, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (26) \quad (0.2 \text{ балла})$$

3.9. Закон Гука для упругого материала записывается в виде

$$\tau(x, t) = \frac{E \Delta l}{l}. \quad (27) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Относительным удлинением $\Delta l/l$ для малого элемента dx выступает роль $\partial \xi(x, t)/\partial x$, так что

$$\tau(x, t) = E \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}. \quad (28) \quad (0.2 \text{ балла})$$

3.10. Если продифференцировать (27) по x (то есть в мгновенный момент t) и подставить в (26), выйдет

$$\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2},$$

Это – волновое уравнение. Подставляя предложенную зависимость для $\xi(x, t)$ из условия, получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (29) \quad (0.4 \text{ балла})$$

что является скоростью распространения возмущений в материале.

3.11. Поскольку цилиндр свободен с обеих сторон, следует положить

$$\tau\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = 0. \quad (30) \quad (0.5 \text{ баллов})$$

Это означает, что фазы $\omega x/c + \theta$ с обеих сторон должны быть равны полуцелому количеству π . Взаимно отнимая обе фазы и избавляясь от θ , получаем условие

$$\frac{\omega L}{c} = m\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{m\pi c}{L}, \quad (31) \quad (0.5 \text{ баллов})$$

или же

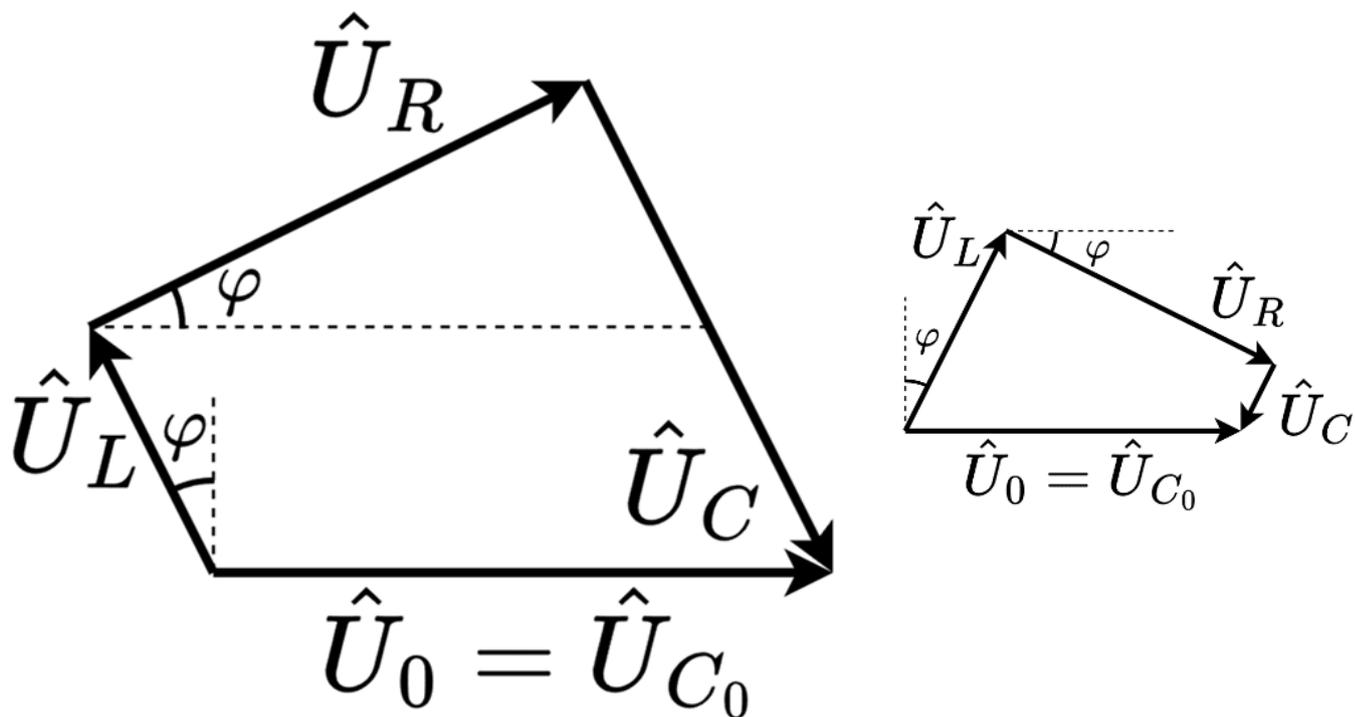
$$\omega = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (32) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$.

3.12. Используя $\omega = 2\pi f$ в случае $m = 1$, получаем

$$f_0 = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1.79 \text{ МГц}. \quad (33) \quad (0.3 \text{ балла})$$

3.13. Известно, что разность фаз при последовательном соединении активного сопротивления и катушки составляет $+\pi/2$, а при последовательном соединении активного сопротивления и конденсатора $-\pi/2$. Так как сумма напряжений на RLC -участке должна быть равна напряжению на C_0 (что то же самое, что и напряжение внешнего генератора), векторная диаграмма будет как слева (0.5 баллов):



Обратите внимание на то, что возможно перепутать знак угла, и получить не совсем верную диаграмму, как показано справа. (0.4 балла вместо 0.5).

Здесь модуль реактивного сопротивления для катушки равен

$$Z_L = \omega_0 L, \quad (34) \quad (0.1 \text{ балл})$$

и для конденсатора

$$Z_C = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (35) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Поскольку сила тока для рассматриваемых элементов одна и та же, получаем

$$\tan \varphi = \frac{Z_C - Z_L}{R}. \quad (36) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Второй способ использует метод комплексных амплитуд, что несколько выходит за рамки школьной программы, однако приведено здесь как альтернативное решение и полезное дополнение. Поскольку индуктивность опережает последовательно подключенное сопротивление по фазе $\pi/2$, так что его комплексное сопротивление $\hat{Z}_L = i\omega_0 L$; сопротивление же, в свою очередь, опережает по фазе подключенный последовательно конденсатор на $\pi/2$, так что комплексное сопротивление последнего $\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega_0 C} = -\frac{i}{\omega_0 C}$. Сопротивление RLC -участка равно

$$\hat{Z}_{RCL} = R + \hat{Z}_C + \hat{Z}_L = R + i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right). \quad (34') \quad (0.3 \text{ балла})$$

Напряжение на сопротивлении, в таком случае, равно

$$\hat{U}_R = \frac{U_0 e^{i\omega_0 t}}{\hat{Z}}, \quad (35') \quad (0.2 \text{ балла})$$

или же, раскрыв (34'), получим

$$\hat{U}_R = \frac{U_0 (R - i(\omega_0 L - 1/\omega_0 C))}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}} e^{i\omega_0 t},$$

Для комплексного множителя $R - i(\omega_0 L - 1/\omega_0 C)$ можно получить результат для разности фаз (тангенс аргумента комплексного числа), что приводит к ответу (36). Раскрывая, получим окончательно

$$\varphi = \arctan \frac{1 - \omega_0^2 LC}{\omega_0 RC}. \quad (37) \quad (0.2 \text{ балла})$$

3.14. Для нахождения ω_1 достаточно поставить условие

$$\varphi = 0, \quad (38) \quad (0.2 \text{ балла})$$

поскольку в результате напряжение от активного сопротивления становится в фазе с внешним напряжением, а напряжения на реактивных элементах становятся чисто мнимыми, что приводит к резкому скачку силы тока. Итак,

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (39) \quad (0.2 \text{ балла})$$

В случае $\omega_0 = \omega_2$ резонанс токов должен происходить в случае, если полное сопротивление цепи сильно увеличивается, чтобы свободные колебания по внутреннему контуру были автономны относительно внешнего генератора. Для этого напряжение на катушке должно быть в противофазе относительно суммы напряжений на двух конденсаторах. Рассматривая внутренний контур, мы наблюдаем последовательную RLC' -цепь с общей ёмкостью

$$C' = \frac{CC_0}{C + C_0}. \quad (40) \quad (0.3 \text{ балла})$$

С учётом такой эквивалентной ёмкости резонансная частота равна

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}. \quad (41) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Такой результат понятен и из метода комплексных амплитуд. Вместо соотношений (38) и (40) можно записать полный импеданс цепи

$$\hat{Z} = \frac{\hat{Z}_{C_0}(R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C)}{R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C + \hat{Z}_{C_0}} = \frac{1}{i\omega_0 C_0} \cdot \frac{R + i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)}{R + i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)\right)}. \quad (38') \quad (0.5 \text{ баллов})$$

Как видно, в такой эквивалентной схеме наблюдается два вида резонанса – последовательный, который наступает при равенстве модулей реактивных сопротивлений Z_C и Z_L и для которого частота

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (39) \quad (0.2 \text{ балла})$$

и параллельный резонанс, при котором Z_L равен последовательно соединённым конденсаторам Z_{C,C_0} , и тогда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C + C_0}{LCC_0}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}. \quad (41) \quad (0.3 \text{ балла})$$

В первом случае модуль импеданса мал и практически равен R ; во втором случае полное сопротивление цепи велико, так как ток при резонансе протекает во внутреннем контуре, а сам он ведёт себя как непроницаемая пробка, в которую входит небольшая порция внешнего тока ввиду некоторых потерь на сопротивление.

3.15. При последовательном резонансе, а амплитуда силы тока через центральный участок равна $I_{RCL,0} = U_0/R$, так что усреднённая мощность потерь энергий на данном участке равна

$$\langle P \rangle = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (42) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Умножая на полный период, получаем потерю энергии

$$\Delta E = \langle P \rangle \cdot \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\langle P \rangle}{f_0}. \quad (43) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Максимально запасённая энергия на конденсаторе C_0 тривиально равна

$$E_{C_0} = \frac{C_0 U_0^2}{2} \quad (44) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Так как \hat{U}_R идёт в фазе с внешним напряжением, а $(\hat{U}_C \parallel \hat{U}_L) \perp \hat{U}_{C_0}$, энергия RCL -участка постоянна во времени и равна

$$E_{RCL} = \frac{LU_0^2}{2R^2}. \quad (45) \quad (0.2 \text{ балла})$$

Это видно при сравнении $\frac{LI_{RCL,0}^2}{2} = \frac{LU_0^2}{2R^2}$ и $\frac{q_{RCL,0}^2}{2C} = \frac{U_0^2}{2\omega_1^2 R^2 C} = \frac{LU_0^2}{2R^2}$, и использовании факта того, что запасы энергий различаются в фазе на $\pi/2$ между последовательно соединёнными катушкой и конденсатором, и потому можно использовать энергию лишь одного из них. При этом максимально возможная энергия системы за период равна

$$E = E_{RCL} + E_{C_0} \quad (46) \quad (0.1 \text{ балл})$$

Подставляя (43) и (46) в определение для добротности, получаем

$$Q = \frac{1}{2\pi f_0 RC} + 2\pi f_0 RC_0 \approx \frac{1}{2\pi f_0 RC} = 1.78 \cdot 10^4. \quad (47) \quad (0.3 \text{ балла})$$

Как видно, $E_{RCL} \gg E_{C_0}$, однако отсутствие (46) должно быть в таком случае обосновано участником.

№	Содержание	Баллы
3.1	Формула (1): $F_0 = qE_0$	0.1
	Формула (2) или (2'): $M = -pE_0 \sin \alpha$ или $\Delta x = \frac{l}{2}(1 - \cos \alpha)$	0.2
	Формула (3) или (3'): $A = pE_0(1 - \cos \alpha)$	0.2
	<i>Лишний минус</i>	-0.1
3.2	Формула (4) или (4'): $dp = 2qdx$ или $F_0 = qE_0 = q^2 x / \beta \epsilon_0$	0.2
	Формула (5) или (5'): $A = \beta \epsilon_0 E_0^2 / 2$	0.3
	<i>Лишний минус</i>	-0.1
	Формула (6): $\Delta U = -\beta \epsilon_0 E_0^2 / 2$	0.2
	<i>Если в (5) стоит лишний минус, принимается $\Delta U = \frac{\beta \epsilon_0 E_0^2}{2}$ с учётом штрафа; если участник посчитал (5), ошибочно выдавая работу внешнего поля за ΔU, балл за (6) не ставится (но всё равно ставится за (5))</i>	
3.3	Формула (7) или (7'): $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$ или $\Phi = \sigma S / \epsilon_0$	0.2
	Формула (8) или (8'): $dE = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ или $\Phi = 2ES$	0.2
	Формула (9): $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	0.3
3.4	Формула (10): $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}$ (скалярная запись принимается)	0.1
	Формула (11): $\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_0$ (скалярная запись с верным знаком или графически указанным направлением принимается)	0.2
	Формула (12): $\vec{P} = -\epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$ (скалярная запись с верным знаком или графически указанным направлением принимается)	0.1
	Формула (13): $\frac{\sigma'}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma''}{2\epsilon_0} = 0$ или $\sigma' = -\sigma''$	0.1
	Формула (14): $E' = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma''}{2\epsilon_0}$	0.2
	Формула (15): $\sigma' = -\epsilon_0 E_0 \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$ или $\sigma'' = \epsilon_0 E_0 \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}$	0.1
	<i>Если нет (13) но стоят оба варианта (15), ставится балл за (13)</i>	
3.5	Формула (16): $P = np$	0.2
	Формула (17): $p = \beta \epsilon_0 E_0 / \epsilon$	0.2
	Формула (18): $\epsilon = 1 + n\beta$	0.1
3.6	Формула (19): $\Delta \varphi = Eh$	0.1
	Формула (20): $E = P / \epsilon_0$	0.1

	Формула (21): $\Delta\varphi = P_0hd/\varepsilon_0$	0.1	
	Численное значение (21): $\Delta\varphi = 42$ В	0.1	
3.7	Формула (22): $C_0 = \varepsilon\varepsilon_0S/h$	0.1	0.5
	Формула (23): $W_e = C_0U^2/2$	0.1	
	Формула (22'): $w_e = \varepsilon_0\varepsilon E'^2/2$ (вместо формул (22) и (23))	0.2	
	Формула (24): $\frac{W_d}{W_e} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon d^2} \cdot \frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon^3} = \frac{9\varepsilon_0}{64\varepsilon d^2}$	0.2	
	Численный ответ (24): $W_d/W_e = 3.2$	0.1	
3.8	Формула (25): $dm = \rho Sdx$	0.2	0.5
	Формула (26): $\frac{\partial\tau(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}$ (тут и в (28) засчитываются d вместо ∂)	0.3	
3.9	Формула (27): $\tau(x,t) = \frac{EAt}{l}$	0.2	0.5
	Формула (28): $\tau(x,t) = E \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$ (полный балл за (27) при наличии (28))	0.3	
3.10	Формула (29): $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	0.4	0.4
3.11	Формула (30): $\tau\left(\pm\frac{L}{2}, t\right) = 0$	0.3	1.0
	Формула (31): $\omega L/c = m\pi$	0.5	
	Формула (32): $\omega = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad m \in \mathbb{N}$	0.2	
3.12	Формула (33): $f_0 = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	0.2	0.3
	Численный ответ (33): $f_0 = 1.79$ МГц	0.1	
3.13	Векторная диаграмма: \hat{U}_L опережает \hat{U}_R на $\pi/2$	0.1	1.2
	Векторная диаграмма: \hat{U}_R опережает \hat{U}_C на $\pi/2$	0.1	
	Векторная диаграмма: показано, что $\hat{U}_L + \hat{U}_C + \hat{U}_R = \hat{U}_0$	0.1	
	Векторная диаграмма: указано, что $\hat{U}_{C_0} = \hat{U}_0$	0.1	
	Векторная диаграмма: \hat{U}_R опережает \hat{U}_0 на угол φ против часовой стрелки	0.1	
	Формула (34): $Z_L = \omega_0L$ или $\hat{Z}_L = i\omega_0L$	0.1	
	Формула (35): $Z_C = \frac{1}{\omega_0C}$ или $\hat{Z}_C = 1/i\omega_0C$	0.1	
	Формула (36): $\tan\varphi = (Z_C - Z_L)/R$	0.3	
	Лишний минус	-0.1	
	Формула (34'): $\hat{Z}_{RCL} = R + i\left(\omega_0L - \frac{1}{\omega_0C}\right)$ (вместо векторной диаграммы)	0.3	
	Формула (35'): $\hat{U}_R = \frac{U_0 e^{i\omega_0 t}}{\hat{Z}}$ (вместо векторной диаграммы)	0.2	
	Формула (37): $\varphi = \arctan \frac{1 - \omega_0^2 LC}{\omega_0 RC}$	0.2	
При лишнем минусе двойного штрафа нет			
3.14	Формула (38): $\varphi = 0$	0.2	1.0
	Формула (39): $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$	0.2	
	Формула (40): $C' = \frac{CC_0}{C+C_0}$	0.3	
	Формула (41): $\omega_2 = \sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}$	0.3	
	Формула (38'): $\hat{Z} = \frac{1}{i\omega_0 C_0} \cdot \frac{R + i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)}{R + i\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)}\right)}$ (вместо (38) и (40))	0.5	
3.15	Формула (42): $\langle P \rangle = U_0^2/2R$	0.3	1.0
	Формула (43): $\Delta E = \langle P \rangle \cdot 2\pi/\omega = \langle P \rangle/f_0$	0.1	
	Формула (44): $E_{C_0} = C_0 U_0^2/2$	0.1	
	Формула (45): $E_{RCL} = LU_0^2/2R^2$	0.2	

	Формула (46): $E = E_{RCL} + E_{C_0}$, или указано $E_{RCL} \gg E_{C_0}$	0.1	
	Формула (47): $Q = \frac{1}{2\pi f_0 RC} + 2\pi f_0 RC_0 \approx \frac{1}{2\pi f_0 RC}$	0.2	
	Численный ответ (47): $Q = 1.78 \cdot 10^4$	0.1	
Итого		10.0	