Решение задач республиканской олимпиады по физике-2025
10 класс

Задача_1. «Солянка» [10,0 баллов]
Часть 1.1. Равновесие каната (3,0 балла)
Рассмотрим очень малое (виртуальное) перемещение каната dl вдоль горки направо:

Работа всех сил при этом перемещении должна быть равно изменению кинетической энергии каната:

$$A = \Delta K$$

В нашем случае работу совершают только сила тяжести. Работу силы тяжести можно представить через изменение потенциальной энергии:

$$+\frac{dl}{L}mg(y_1) - \frac{dl}{L}mg(y_2) = A = \Delta K \qquad (1)$$

Тут было использовано то, что канат однородный. Его малое перемещение можно представить как перемещение малого участка dl с левого конца на правый конец. $y_1, y_2 -$ расстояния от высшей точки горки до левого и правого конца каната по вертикали (потенциальная энергия отсчитывалась от высшей точки горки). $L -$длина каната.

Из условий мы знаем, что $y_1 = y_2$. Значит:

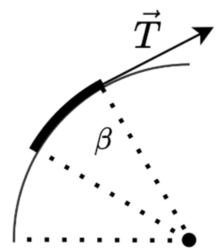
$$+\frac{dl}{L}mg(y_1) - \frac{dl}{L}mg(y_2) = 0 = \Delta K$$

Получается, что при малом перемещении каната все его кинетическая энергия не меняется. Потенциальная энергия системы стационарна (другими словами, производная потенциальной энергии по координатам равна 0). Канат находится в равновесии:

$$a = 0 \qquad (2)$$

Ускорение каната равно 0.

Для нахождения силы натяжения рассмотрим участок каната в дуге β:



Так как канат покоится, то суммарная работа всех сил при малом перемещении участка должна быть равна 0:

$$-dl \cdot T + \frac{dl}{L}mg\Delta y = 0$$

$\Delta y -$разность вертикальных координат конца и начала участка каната.

Получаем:

$$T = \frac{mg\Delta y}{L} \qquad (3)$$

Видно, что натяжение зависит только от вертикальной координаты, и оно максимально в наивысшей точке горки. Тогда:

$$\Delta y_{max} = R - R \cdot \cos\alpha = \frac{R}{2} \quad (4)$$

Найдём угол дуги каната на правой окружности используя условия равенства высот концов:

$$R(1-\cos\alpha) = 10R(1-\cos\phi)$$

$\phi -$ угол дуги каната от вертикали на правой окружности.

$$\cos\phi = \frac{19}{20} \quad (5)$$

Тогда находим длину:

$$L = R\alpha + 10R\phi = R\cdot\frac{\pi}{3} + 10R\cdot\arccos\frac{19}{20} \approx 4.22\cdot R \quad (6)$$

Находим максимальное натяжение:

$$T = \frac{mgR}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{3}+10\cdot\arccos\frac{19}{20}}\cdot\frac{1}{R} = \frac{mg}{\frac{2\pi}{3}+20\cdot\arccos\frac{19}{20}} \quad (7)$$

$$T \approx \frac{mg}{8.44} \approx mg\cdot 0.12$$

Критерии оценивания

Содержание	**Баллы**
Уравнение (1) для работы силы тяжести (либо эквивалент, из которого явно видно, что ускорение 0)	0.75
Верный ответ (2) $a = 0$	0.25
Уравнение (3) выражение для силы натяжения как явную функцию (без интеграла) вертикальной координаты или угла.	1
Уравнение (4) условие максимума натяжения (без обоснования баллы не ставятся)	0.25
Уравнение (5) угол дуги каната на правой окружности	0.25
Уравнение (6) найдена длина каната	0.25
Верный ответ (7)	0.25
Сумма	**3.0**

Часть 1.2 Кубическая зарядка (3,5 балла)

Кубики образуют систему сложных конденсаторов. При этом ёмкость каждого конденсатора зависит только от взаимного расположения кубиков, а не зарядов на них. Или, другими словами, потенциал на каждом кубике линейно зависит от заряда на этом же кубике и зарядов на других кубиках. В конце зарядки кубика A:

$$\varphi = V_0 Q_A, \quad (1)$$

V_0 –собственный коэффициент пропорциональности кубика. Она определяет какой потенциал создаётся на кубике зарядом самого кубика. Эта ёмкость одинакова для всех кубиков. В конце зарядки кубика B:

$$\varphi = V_0 Q_B + V_1 Q_A, \quad (2)$$

$V_1 -$ коэффициент пропорциональности, который определяет, какой потенциал создаётся на кубике от другого кубика на расстоянии $5a$. (или можно сказать “ёмкость по стороне квадрата”). В конце зарядки кубика C:

$$\varphi = V_0 Q_C + V_1 Q_A + V_2 Q_B, \quad (3)$$

V_1 − коэффициент пропорциональности, который определяет, какой потенциал создаётся на кубике от другого кубика, который находится на противоположной вершине квадрата. (или можно сказать “ёмкость по диагонали квадрата”). В конце зарядки кубика D:

$$\varphi = V_0 Q_D + V_1 Q_B + V_1 Q_C + V_2 Q_A \tag{4}$$

Из первых двух уравнений:

$$V_1 = \frac{V_0(Q_A - Q_B)}{Q_A}$$

Используя уравнение (3):

$$V_2 = \frac{V_0(Q_B - Q_C)}{Q_B}$$

Тогда из последнего уравнения находим Q_D:

$$Q_A - Q_D = \frac{Q_B}{Q_A}(Q_A - Q_B) + \frac{Q_C}{Q_A}(Q_A - Q_B) + \frac{Q_A}{Q_B}(Q_B - Q_C)$$

$$Q_D = \frac{Q_B^2}{Q_A} + \frac{Q_C Q_B}{Q_A} + \frac{Q_A Q_C}{Q_B} - Q_B - Q_C \tag{5}$$

Во втором случае мы получаем похожую систему уравнений:

$$\varphi = V_0 Q_A \tag{6}$$

$$\varphi = V_0 Q_D + V_2 Q_A \tag{7}$$

$$\varphi = V_0 Q_B + V_1 Q_A + V_1 Q_D \tag{8}$$

$$\varphi = V_0 Q_C + V_2 Q_B + V_1 Q_D + V_1 Q_A \tag{9}$$

Аналогично выражаем:

$$V_2 = \frac{V_0(Q_A - Q_D)}{Q_A}$$

$$V_1 = \frac{V_0(Q_A - Q_B)}{Q_A + Q_D}$$

Подставляем в последнее уравнение:

$$Q_A - Q_C = \frac{Q_B}{Q_A}(Q_A - Q_D) + Q_A - Q_B$$

$$Q_D = \frac{Q_C Q_A}{Q_B} \tag{10}$$

Критерии оценивания

Содержание	Баллы
За каждое из уравнений (1)-(4) по **0.25 балла**	1
Ответ (5)	0.75
За каждое из уравнений (6)-(9) по **0.25 балла**	1
Ответ (10)	0.75
в решении использована формула $\varphi = \frac{kq}{r}$	-1.5
Сумма	**3.5**

Если в решении в уравнениях (1)-(4) и (6)-(9) использована формула $\boldsymbol{\varphi = \frac{kq}{r}}$, то снимается 1.5 баллов. В случае отрицательных баллов ставится 0.

Например, если хотя бы один из ёмкостных коэффициентов взят в форме:

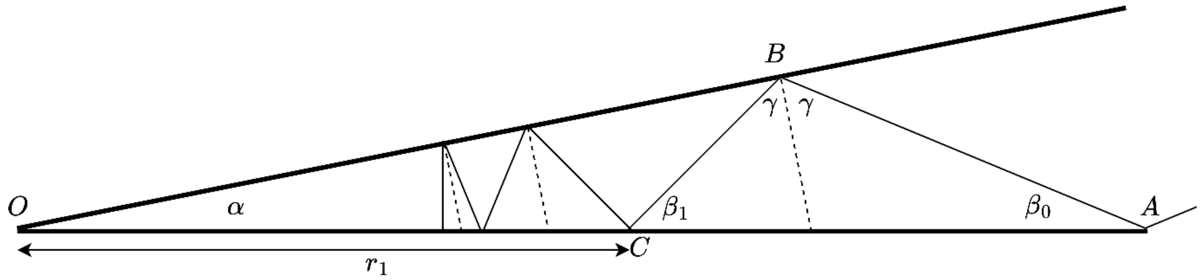
$$V_0 = \frac{k}{a},\ \ V_1 = \frac{k}{a5},\ \ V_2 = \frac{k}{a5\sqrt{2}}$$

То снимается 1.5 баллов. Значит даже если использована физически не верная формула, но все уравнения написаны в верной форме и верно получен ответ, то можно получить 2 балла.

Часть 1.3 Двойное зеркало (3,5 балла)

Решение 1

Рассмотрим несколько последовательных отражений луча:



(на данном рисунке угол альфа не такой как в условиях задачи, чтобы рисунок был лучше виднее) $\beta_0, \beta_1 -$ начальный и последующий угол луча с нижней стороной зеркала. Мы можем связать эти углы:

$$\gamma = 180 - \beta_0 - (90 + \alpha) \qquad \gamma = 180 - \beta_1 - (90 - \alpha)$$

Тогда получаем:

$$\beta_1 = \beta_0 + 2\alpha \tag{1}$$

Или для угла падения луча:

$$\delta_1 = \delta_0 - 2\alpha \tag{1}$$

Получается, что через каждые два отражение угол падения уменьшается на 2α. В какой-то момент угол станет 0 и луч начнёт двигаться по такой же траектории обратно, выходя из двугранного угла в обратную сторону. Чтобы l был минимальный, самый крайний луч должен выйти через отрезанную сторону ровно в момент, когда угол падения становится 0.

Начальный угол падения, или угол с нижней стороной:

$$\delta_o = 90 - 2\alpha \qquad \beta_0 = 2\alpha$$

Находим что через N отражений угол падения станет 0:

$$N = 2 \cdot \frac{90 - 2\alpha}{2\alpha} = 2 \cdot 7 = 14 \tag{2}$$

Это и есть максимальное количество отражений при минимальном k

Теперь попытаемся найти минимальное расстояние l_{min}.

Напишем теорему синусов для треугольников OBC, OBA:

$$\frac{OB}{\sin \beta_0} = \frac{R}{\sin(180 - \alpha - \beta_0)} \qquad \frac{OB}{\sin(180 - \beta_1)} = \frac{r_1}{\sin[180 - \alpha - (180 - \beta_1)]} \tag{3}$$

Приравнивая OB и преобразовывая синусы получаем:

$$\frac{R \sin \beta_0}{\sin(\alpha + \beta_0)} = \frac{r_1 \sin \beta_1}{\sin(\beta_1 - \alpha)}$$

Но из уравнения (1) мы уже знаем: $\beta_1 - \alpha = \beta_0 + \alpha$

Тогда получаем:

$$R \sin \beta_0 = \mathrm{r}_1 \sin \beta_1$$

Так как мы не уточняли значения углов бета, это соотношение работает для всех углов луча с нижней стороной:

$$r \sin \beta = const \tag{4}$$

$r -$ расстояние от точки отражения на нижней стороне до вершины двугранного угла. $\beta -$угол луча с нижней стороной (НЕ угол падения)

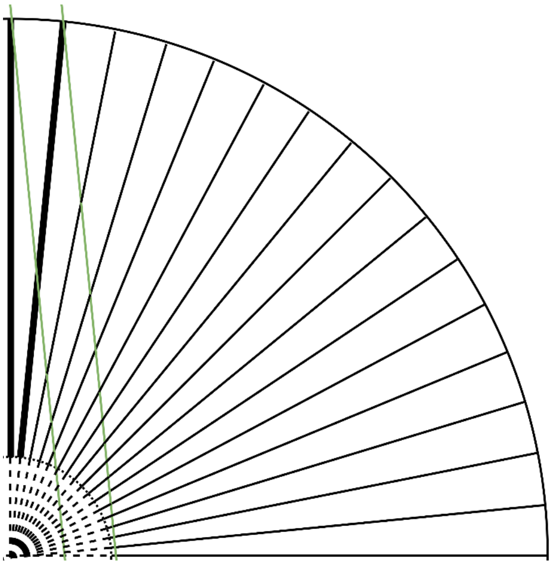
Тогда находим минимальный k:

$$l_{min} \cdot \sin 90° = R \sin 2\alpha \tag{5}$$

$$k_{min} = \sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{16} \tag{5}$$

Решение 2

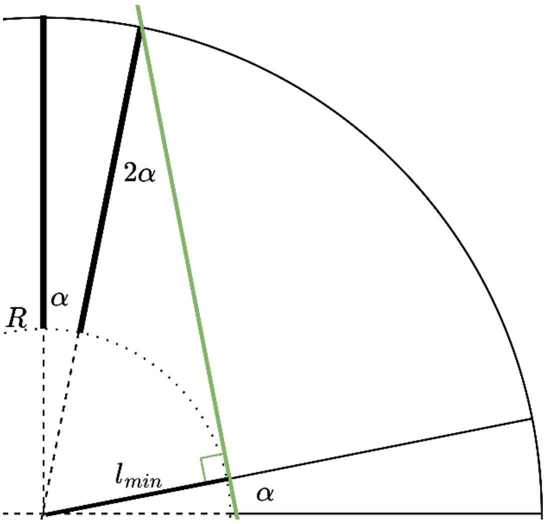
А теперь настоящее решение. Чтобы найти траекторию луча относительно зеркала, можно не отражать луч от поверхности, а отразить саму поверхность. Тогда получаем такую картину:



На рисунке мы отразили угол много раз формируя окружность. Толстой линей изображены изначальные поверхности зеркала, тонкой линей отражённые поверхности, штрихованной линией убранные поверхности зеркала. В такой форме траектория луча прямая. Каждый раз, когда луч пересекает тонкую или толстую линию, происходит отражение луча.

Круг из точек обозначает зону зайдя в которую луч попадает на убранную часть зеркала и вылетает из двугранного угла. Радиус круга из точек равен длине l

Рассмотрим траекторию самого крайнего луча, если он попадёт в круг из точек, то он выйдет из двугранного угла. Значит радиус круга должен быть равен минимальному расстоянию до траектории крайнего луча. Заметим:



Отраженная сторона зеркала, которая находится под углом α к горизонтали перпендикулярна траектории крайнего луча. Тогда из прямоугольного треугольника находим:

$$l_{min} = R \cdot \sin 2\alpha \tag{6}$$

$$k_{min} = \sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{16} \tag{6}$$

Также используя рисунок и минимальное значение k находим максимальное количество отражений:

$$N = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{32} \cdot 2}{\frac{\pi}{32}} = 14 \tag{7}$$

Критерии оценивания

Решение 1

Содержание	**Баллы**
Одно из уравнений (1). Найдено изменение угла между двумя последовательными отражениями	0.25
Найдено максимальное количество отражений (2) $N = 14$	1
Ошибся на единицу ($N = 13, N = 15$)	-0.5
Записана теорема синусов хотя бы для одного из треугольников (3)	0.25
Найден закон (4)	1.25
Верный ответ (5)	0.75
Всего	**3.5**

Решение 2

Содержание	**Баллы**
Явно использована идея отражения системы хотя бы 1 раз	0.25
Верный рисунок отражённой системы в виде четверти круга и прямая траектория луча. (должно быть видно хоть какое-то разделение на сектора, а не просто дуга круга)	1
Верный ответ (6)	1.5
Найдено максимальное количество отражений (7) $N = 14$	0.75
Ошибся на единицу ($N = 13, N = 15$)	-0.4
Всего	**3.5**

Баллы даются только по одному из критериев! В приоритете тот критерий, по которому у участника больше баллов.

Задача_2. Проектирование системы кондиционирования воздуха [10,0 баллов]

1. Найдём на психометрической диаграмме точку внешнего воздуха, а затем ищем точку с таким же влагосодержанием и температурой 24 градуса. Эта точка находится примерно посередине между линий 60% и 70% относительной влажности, но чуть ближе к линии 60%, следовательно относительная влажность будет равна 64%

Альтернативное решение:

При понижении температуры до температуры выше точки росы влагосодержание не изменится, следовательно оно останется равным 12г/кг. Для 24 градусов мы видим, что 17г/кг соответствует 90% относительной влажности, следовательно 12 г/кг будет соответствовать 12/17*90≈64%

2. Из психометрической таблицы видно, что линии относительной влажности 40% и температуры 32° пересекаются при $w_{OA} = 12\frac{g}{kg}$, а линии относительной влажности 50% и температуры 24°$- w_{IA} = 9.5\frac{g}{kg}$

3. Распишем выражение для разности энтальпий:

$$H_2 - H_1 = U_2 + PV_2 - U_1 - PV_1 = \Delta U + P\Delta V = \Delta U + A = Q$$

4. Из психометрической таблицы мы видим, что при изменении температуры с 10 до 35 градусов при нулевом содержании влаги удельная энтальпия меняется с 10 до 35кДж/кг. Следовательно, удельная теплоемкость воздуха:

$$c_A = 1.0\, kJ/kg$$

5. Из психометрической таблицы мы видим, что в одном килограмме при увеличении влагосодержания от 2 до 19,5 граммов, энтальпия изменится на 45кДж. Следовательно удельная теплота испарения воды примерно

$$L = 2600\, kJ/kg$$

6. Можем записать уравнения сохранения тепловой энергии для теплообмена наружного и возвращенного воздуха:

$$Q_{IA} + Q_{OA} = 0 \to c_A m_{IA}(T_{MA} - T_{IA}) + c_A m_{OA}(T_{MA} - T_{OA}), m_{IA} = 3m_{OA}, \;\; T_{MA} = \frac{3T_{IA} + T_{OA}}{4} = 26°C$$

Можем записать уравнения сохранения массы воды в смеси наружного m_{OW} и возвращенного воздуха m_{IW}:

$$m_{IW} + m_{OW} = m_{MW},\ m_{IW} = w_{IA}m_{IA},\ m_{OW} = w_{OA}m_{OA},\ w_{MA} = \frac{m_{MW}}{m_{IA}+m_{OA}} = \frac{3w_{IA}+w_{OA}}{4} = 10\,\frac{g}{kg}$$

7. Поток свежего (наружного) воздуха $\dot{V}_f = n\dot{V}_H$

Полный поток воздуха $\dot{V} = 4\dot{V}_f$

$$\dot{Q}_S = n\dot{Q}_{SH}$$

$$\dot{Q}_L = n\dot{Q}_{LH}$$

На увеличение температуры влияет не влияет тепло, выделенное через потоотделение:

$$c_A\dot{m}(T_{IA} - T_{SA}) = c_A\rho\dot{V}(T_{IA} - T_{SA}) = \dot{Q}_S,\ T_{SA} = T_{IA} - \frac{\dot{Q}_S}{c_A\rho\dot{V}} = 22°C$$

$$w_{SA} = w_{IA} - \frac{\dot{Q}_L}{L\rho\dot{V}} \approx 8.7\,\frac{g}{kg}$$

8. Так как при охлаждении произошла конденсация, значит из охлаждающего змеевика выходит воздух с насыщенным паром ($\varphi = 100\%$). Из психометрической диаграммы мы видим, что влажность 8.7 г/м соответствует температуре точки росы 12 ° С. Следовательно $T_{CA} = 12°C, \varphi_{CA} = 100\%$

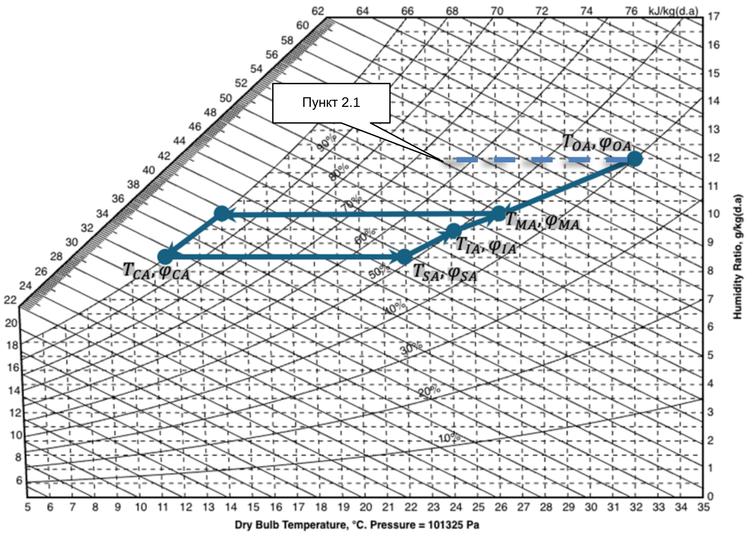
9. Вода образуется ввиду понижения влагосодержания воздуха от смешанного воздуха до поступающего в комнату воздуха: $\dot{m}_w = 4\rho n\dot{V}_H(w_{MA} - w_{SA}) = 1.7\frac{g}{s}$

10. Из психометрической таблицы мы видим, что при охлаждении удельная энтальпия падает с 52 до 34 кДж/кг. Следовательно $\dot{Q}_C = 4\rho n\dot{V}_H(52 - 34) = 21\ kW$

11. Из психометрической таблицы мы видим, что при нагревании удельная энтальпия растёт с 34 до 44 кДж/кг. Следовательно $\dot{Q}_H = 4\rho n\dot{V}_H(44 - 34) = 12\ kW$

12. Для тепловых машин Карно справедливо равенство: $\frac{P}{\dot{Q}_C} = \frac{T_{OA}-T_{CA}}{T_{CA}}$, следовательно:

$$P = \dot{Q}_C\frac{T_{OA}-T_{CA}}{T_{CA}} = 1.5kW$$



Содержание		Баллы	
Часть 1		3.0	
2.1	Примерно 64%	0.25	
2.2	w_{OA} = 12 g/kg,	0.25	0.5
	$w_{IA} = 9.5\ g/kg$	0.25	
2.3	$H_2 - H_1 = U_2 + PV_2 - U_1 - PV_1 = \Delta U + P\Delta V = \Delta U + A = Q$	0.75	
2.4	$c_a = 1.0\ kJ/kg$	0.75	
2.5	$L = 2500\ kJ/kg$	0.75	
Часть 2		7.0	

2.6	$c_a m_{IA}(T_{MA} - T_{IA}) = c_a m_{OA}(T_{OA} - T_{IA})$	0.25	1.0
	$T_{MA} = \dfrac{3T_{IA} + T_{OA}}{4} = 26°C$	0.25	
	$m_{IW} + m_{OW} = m_{MW}$	0.25	
	$w_{MA} = \dfrac{3w_{IA} + w_{OA}}{4} = 10\ g/kg$	0.25	
2.7	$c_a \dot{m}(T_{IA} - T_{SA}) = \dot{Q}_S$	0.25	1.0
	$T_{SA} = 22°C$	0.25	
	$w_{SA} = w_{IA} - \dfrac{\dot{Q}_L}{L_w \rho_a \dot{V}}$	0.25	
	$w_{SA} \approx 8.7 \dfrac{g}{kg}$	0.25	
2.8	$T_{CA} \approx 12°C$	1.0	1.75
	$\varphi_{CA} = 100\%$	0.75	
2.9	$\dot{m}_w = 4\rho n \dot{V}_H (w_{MA} - w_{SA})$	0.5	0.75
	$\dot{m}_w = 1.7 \dfrac{g}{s}$	0.25	
2.10	$\dot{Q}_C \approx 21\ kW$	0.75	
2.11	$\dot{Q}_H \approx 12\ kW$	0.75	
2.12	$\dfrac{P}{\dot{Q}_C} = \dfrac{T_{OA} - T_{CA}}{T_{CA}}$	0.75	1.0
	$P \approx 1.5 kW$	0.25	
	Итого		

Задача 3. Электродинамический космический трос (10,0 баллов)

Внимание: если справа от уравнения не стоит порядковый номер, то это уравнение оценивается в 0 баллов и лишь используется для детальности в авторском решении, либо существует в решении другое оцениваемое уравнение с аналогичным смыслом!

3.1. Используем стандартное соотношение

$$GM = gR_E^2. \tag{1}$$

С учётом того, что ускорение свободного падения снижается как квадрат расстояния до центра Земли, гравитационное притяжение на спутник равно

$$F_1 = \frac{GMm_1}{(R_E + h)^2} = m_1 g \cdot \frac{R_E^2}{(R_E + h)^2}, \tag{2}$$

и на анод, соответственно,

$$F_2 = \frac{GMm_2}{(R_E + h - L)^2} = m_2 g \cdot \frac{r^2}{(R_E + h - L)^2}. \tag{3}$$

Учитывая силу натяжения троса, второй закон Ньютона запишется в виде

$$m_1 \Omega^2 (R_E + h) = F_1 + T, \tag{4}$$

$$m_2 \Omega^2 (R_E + h - L) = F_2 - T. \tag{5}$$

Итого, складывая (4) и (5) и используя (1)-(3), получаем

$$\Omega = \sqrt{gR_E^2 \cdot \frac{\dfrac{m_1}{(R_E + h)^2} + \dfrac{m_2}{(R_E + h - L)^2}}{m_1(R_E + h) + m_2(R_E + h - L)}}. \tag{6}$$

При $L = 0$ это соответствует

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{(R_E^2 + h)^3}}, \tag{7}$$

которой соответствует орбитальная скорость

$$v = \Omega_0(R_E + h) = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E + h}}. \tag{8}$$

В итоге получаем

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \sqrt{\frac{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(1 - \frac{L}{R_E + h}\right)^{-2}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(1 - \frac{L}{R_E + h}\right)}} - 1 = \frac{3m_2 L}{2(m_1 + m_2)(R_E + h)}.$$

Видно, что

$$\alpha = \frac{3m_2}{2(m_1 + m_2)}. \tag{9}$$

3.2. Заметим, что $F_1 = m_1\Omega_0^2(R_E + h)$. Подставляя в (4), получаем

$$T = m_1(\Omega^2 - \Omega_0^2)(R_E + h) \approx 2m_1\Omega_0\Delta\Omega(R_E + h) = 2\alpha\Omega_0^2 L = \frac{3m_1 m_2\Omega_0^2 L}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда получаем

$$\mu = \frac{3m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

с численным значением натяжения

$$T \approx 6.5 \text{ Н}. \tag{11}$$

Можно отметить, что полезно использовать лёгкие и тонкие тросы ввиду низкого натяжения

3.3. Рассмотрим произвольное отклонение спутника на малый угол θ, как показано на рисунке. В таком случае расстояния от спутника и анода до их центра масс равны соответственно

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}L, \tag{12}$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}L. \tag{13}$$

Далее запишем гравитационное притяжение в данном случае:

$$F_1' = \frac{m_1 g R_E^2}{\big(R_E + h - l_1(1 - \cos\theta)\big)}, \quad F_2' = \frac{m_2 g R_E^2}{\big(R_E + h - L + l_2(1 - \cos\theta)\big)}.$$

Как видно, изменения сил создают отклонение порядка θ^2, так что можно вместо этого использовать выражения (2) и (3). В неинерциальной системе отсчёта, вращающейся с угловой скоростью Ω вместе со спутником, появляются фиктивные центробежные силы

$$f_1 = m_1\Omega^2\big(R_E + h - l_1(1 - \cos\theta)\big), \quad f_2 = m_2\Omega^2\big(R_E + h - L + l_2(1 - \cos\theta)\big),$$

где аналогичным образом можно использовать соответствующие левые части уравнений (4) и (5). Со стороны спутника и анода вклады в момент сил относительно центра масс равны

$$M_1 = (F_1 - f_1)l_1\sin\theta = -Tl_1\sin\theta, \tag{14}$$

$$M_2 = (f_2 - F_2)l_2\sin\theta = -Tl_2\sin\theta. \tag{15}$$

Момент инерции такой системы равен

$$J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}L^2, \tag{16}$$

и динамика вращательного движения запишется в виде

$$J\varepsilon = M_1 + M_2. \tag{17}$$

В результате получим

$$\varepsilon + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot \mu \Omega_0^2 \theta = \varepsilon + 3\Omega_0^2 \theta = 0.$$

Это – уравнение колебаний, с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\mu \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \Omega_0 = \sqrt{3}\Omega_0. \qquad (18)$$

Соответствующий период колебаний численно равен

$$T_0 = \frac{2\pi(R_E + h)}{\sqrt{3}R_E} \sqrt{\frac{R_E + h}{g}} = 53 \text{ мин}. \qquad (19)$$

3.4. Поперечное сечение проводника равно

$$S = bh,$$

так что при длине L его электрическое сопротивление равно

$$R = \frac{\rho L}{S} \qquad (20)$$

и соответствующая сила тока $I = U_0/R$. Дрейфовая скорость $v_д$ движения электронов связана с силой тока как

$$I = nev_д S. \qquad (21)$$

Рассмотрим взаимодействие электрона проводимости с магнитным полем. При его дрейфовой скорости v сила Лоренца равна

$$F_B = ev_д B, \qquad (22)$$

а накапливающиеся на гранях электроны создают поперечную разность потенциалов U_y, вызываемую поперечным электрическим полем E_y, связанным с напряжением как

$$E_y b = U_y. \qquad (23)$$

Создаваемое электрическое поле воздействует на электроны проводимости с силой

$$F_E = eE_y, \qquad (24)$$

и в установившемся режиме

$$F_E = F_B.$$

Обратите внимание на важность равенства формул (22) и (24). Фактически, электроны движутся в скрещенных электрическом и магнитных полях, где воздействие магнитного поля компенсируется поперечным электрическим: $E_y = vB$. Данная формула также фигурирует в преобразованиях между системами отсчёта, когда поля E и B начинают трансформировать друг в друга. Таким образом можно, к примеру, в области электромагнитного поля перейти в движущуюся систему отсчёта, где есть только магнитное поле: скорость такой системы отсчёта относительно изначальной в нерелятивистском случае дана выражением $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$. В общем случае подобные трансформации рассматриваются на курсе специальной теории относительности и выходят за рамки силлабуса данной олимпиады.

Собирая вместе (20)-(24), получаем для напряжения

$$U_y = \frac{U_0 bB}{ne\rho L}. \qquad (25)$$

3.5. В поперечном направлении проводник ведёт себя как конденсатор, на обкладках которого накапливаются равные, но противоположные по знаку заряды:

$$q_1 = -q_2. \qquad (26)$$

Ёмкость такого конденсатора, тривиально, равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 Lh}{b}. \qquad (27)$$

Поскольку сила Лоренца отклоняла электроны в сторону нижней обкладки, нужно, чтобы $q_1 > 0$, так что

$$q_1 = CU_y.$$

Итого получаем

$$q_1 = \frac{\varepsilon_0 Lh}{b} \cdot \frac{U_0 bB}{ne\rho L} = \frac{U_0 \varepsilon_0 LhB}{ne\rho}. \tag{28}$$

Для получения ответа (29) можно было так же использовать тот факт, что внутри конденсатора создаваемое электрическое поле равно

$$E_y = \frac{q_1}{\varepsilon_0 Lh}, \tag{27'}$$

что эквивалентно формуле (27) и получается из стандартной задачи о конфигурации электрического поля около бесконечной равномерно заряженной плоскости.

3.6. Когда стержень проходит расстояние Δx, заметаемый им магнитный поток равен $\Phi = BL\Delta x$. По закону Фарадея, скорость изменения магнитного потока (с учётом направления по правилу Ленца) равна индуцируемому ЭДС. Тогда можно записать

$$U = BL\dot{x} = BLv. \tag{29}$$

Это создаёт напряжение на конденсаторе:

$$\frac{q}{C} = U. \tag{30}$$

В процессе движения на стержень действует сила Ампера

$$F_A = BIL, \tag{31}$$

где $I = dq/dt$ – скорость изменения заряда на конденсаторе. Итого уравнение динамики записывается в виде

$$ma = mg - F_A. \tag{32}$$

Подставляя (30) в (31), дифференцируя последнее, и комбинируя с (32), (33), получаем, что ускорение постоянно:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{CB^2L^2}{m}}, \tag{33}$$

так что законом движения тривиально будет

$$x(t) = \frac{at^2}{2}, \tag{34}$$

где под a понимается выражение (33).

3.7. Удельное сопротивление равно

$$R_1 = \frac{\rho L}{S_0} = 83.3 \text{ Ом}. \tag{35}$$

В среднем, скорость орбитального движения спутника равна (8), и из пунктов **3.5-3.7** становится понятным, что на спутнике образуется ЭДС

$$U = BLv, \tag{36}$$

так что протекающая сила тока равна

$$I = \frac{U}{R_0 + R_1}, \tag{37}$$

а генерируемая на нагрузке мощность

$$P = I^2 R_0. \tag{38}$$

Для нахождения максимального значения можно решить $dP/dR_0 = 0$, либо выразить квадратное уравнение по R_0 и приравнять дискриминант нулю. Тогда получим

$$R_0 = R_1 \tag{39}$$

с максимальной мощностью

$$P_{\max} = \frac{U^2}{4R_1} = \frac{B^2L^2v^2}{4R_1} = \frac{B^2L^2gr^2}{4R_1(r+h)} = 44.4 \text{ кВт}. \tag{40}$$

Коэффициент полезного действия становится равным

$$\eta = \frac{P_{\max}}{IU} = \frac{1}{2}. \tag{41}$$

3.8. Полная механическая энергия системы с $m = m_1 + m_2$ равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R_E + h}, \tag{42}$$

причём используя (8), это упрощается до

$$E = -\frac{GMm}{2(R_E + h)} = -\frac{mgR_E^2}{2(R_E + h)}. \tag{43}$$

Сила Ампера, создаваемая на тросе, равна

$$F_A = BIL,$$

и в режиме замедления она противонаправлена направлению скорости. Используя (38), (39), (41), и выражение для скорости (37), приведём эту силу к удобной для дальнейших расчётов форме:

$$F_A = \frac{B^2L^2}{2R_1}\sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E + h}}.$$

Работа силы Ампера направлена на убывание полной энергии, то есть

$$\frac{dE}{dt} = -F_A v. \tag{44}$$

Обратите внимание на то, что уравнение (44) с достаточным приближением работает тогда, когда относительное изменение радиуса орбиты за один период очень мало, либо когда эксцентриситет орбиты несильно отличается от нуля. Итого мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{B^2L^2(R_E + h)}{mR_1}, \tag{45}$$

интегрируя которое по h от h до 0 и по t от 0 до τ, получаем

$$\tau = \frac{mR_1}{B^2L^2}\ln\left(1 + \frac{h}{R_E}\right) \approx 10700 \text{ с} \approx 3 \text{ ч}. \tag{46}$$

Как оказывается, $\Omega_0\tau \approx 2$, что не совсем подтверждает предположения в условии; однако вычисления, тем не менее, достаточно близки к действительности оттого, что орбита несильно отклоняется от круговой. Стоит отметить, что, хоть тормозящая сила появилась за счёт силы Ампера, магнитное поле Земли (как и в абсолютно любых других случаях с магнитным полем) не совершает работы в данном случае. Правильнее сказать, что снижение механической энергии всецело уходит на джоулеву теплоту: $dE/dt = -BILv = -IU$, где U определён в (36). Сила Ампера служит лишь неким «связующим звеном» в трансформации запасённой энергии.

3.9. Площади лобового сечения спутника и анода равны соответственно

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Поэтому, в виду неупругого характера ударов молекул, силы сопротивления для спутника и анода равны

$$F_1 = \rho(h)\big(\Omega(R+h)\big)^2 S_1 \approx \rho(h)\big(\Omega(R+h)\big)^2\frac{\pi D^2}{4}, \tag{47}$$

$$F_2 = \rho(h-L)\big(\Omega(R+h-L)\big)^2 S_2 \approx \rho(h)\big(\Omega_0(R+h)\big)^2\frac{\pi d^2}{4}. \tag{48}$$

Для получения ответа достаточно просуммировать силы, то есть

$$F = F_1 + F_2.$$

Переведём зависимость $P(h)$ в $\rho(h)$ через уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$\rho_0 = \frac{\mu P_0}{RT} = 3.38 \cdot 10^{-10}\ \text{кг/м}^3, \tag{50}$$

так что зависимостью будет

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right).$$

В таком случае сила сопротивления воздуха равна

$$F = \frac{\pi \rho_0 g R_E^2}{4(R_E + h)}\left(1 - \frac{h}{h_0}\right)(D^2 + d^2) = 6.02 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}. \tag{51}$$

Можно показать, что учёт изменения плотности и поступательной скорости на $\pm L$ вносит вклад в F более высокого порядка малости. Поскольку сила сопротивления пренебрежимо мала, достаточно снизить силу тока до нуля через противодействие ЭДС индукции бортовым напряжением V_0:

$$V_0 = BLv = BL\sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E + h}} \approx 3850\ \text{В}. \tag{52}$$

В дальнейшем, для простоты, будем использовать соотношение $v = V_0/BL$.

3.10. При неупругом столкновении анода с мусором их поступательные скорости сразу после удара становятся равными. Поскольку мы рассматриваем максимальную массу m_0, рассмотрим случай разворота скорости анода:

$$m_2 v - m_0 v = (m_0 + m_2) v'. \tag{53}$$

В таком случае энергия мусора теперь становится равной

$$E' = \frac{m_0 v'^2}{2} - \frac{GMm_0}{R_E + h}, \tag{54}$$

и для того, чтобы мусор упал на Землю, в предельном случае он должен, по своей эллиптической орбите, упасть на него с диаметрально противоположной стороны, причём в зависимости от направления дальнейшего падения могут быть два решения относительно m_0, которые как раз соответствуют максимальному и минимальному массам. Ввиду сохранения момента импульса,

$$m_0 v'(R_E + h) = m_0 v'' R_E, \tag{55}$$

и сохранения энергии,

$$E' = \frac{m_0 v''^2}{2} - \frac{GMm_0}{R_E}. \tag{56}$$

Собирая вместе, получаем

$$m_0 = m_2 \cdot \frac{\pm\sqrt{1 + h/2R} - 1}{\pm\sqrt{1 + h/2R} + 1} = m_2 \cdot \frac{4R_E + h \pm 2\sqrt{2R_E(h + 2R_E)}}{h}, \tag{57}$$

с максимальным и минимальным значениями

$$m_{\max} \approx 14760\ \text{кг}, \tag{58}$$

$$m_{\min} \approx 0.7\ \text{г}. \tag{59}$$

3.11. Ввиду наличия бортового источника, сила тока теперь равна

$$I = \frac{V - V_0}{R_1}, \tag{60}$$

Сообщённый спутнику от космического мусора момент импульса равен

$$\mathcal{L} = m_0 l_2 (v + v') = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_0}{m_0 + m_2} Lv. \tag{61}$$

Создаваемый силой Ампера момент сил равен

$$M = F_A \cdot \left(\frac{L}{2} - l_1\right) = BL \cdot \frac{V - V_0}{R_1} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \tag{62}$$

так что время Δt_1 равно

$$\Delta t_1 = \frac{\mathcal{L}}{M} = \frac{4m_1m_2m_0}{(m_0+m_2)(m_1-m_2)} \cdot \frac{R_1}{B^2L^2} \cdot \frac{V_0}{V-V_0} \approx 65 \text{ мин.} \tag{63}$$

3.12. Поскольку скорость спутника меняется менее, чем на 2%, отклонение орбиты от круговой несильное, а значит можно рассматривать чисто поступательное ускорение. В таком случае запишем

$$\Delta t_2 = \frac{(m_1+m_2)(v-v')}{F_A}. \tag{64}$$

Как и в прошлый раз, выражая v из (54), получаем

$$\Delta t_2 = \frac{2m_0(m_1+m_2)}{m_2+m_0} \cdot \frac{R_1}{B^2L^2} \cdot \frac{V_0}{V-V_0} \approx 38 \text{ мин.} \tag{65}$$

№	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $GM = gR_E^2$	0.1	**1.2**
	Формула (2): $F_1 = \frac{GMm_1}{(R_E+h)^2}$ или $F_1 = m_1 g \cdot \frac{R_E^2}{(R_E+h)^2}$	0.1	
	Формула (3): $F_2 = \frac{GMm_2}{(R_E+h-L)^2}$ или $F_2 = m_2 g \cdot \frac{r^2}{(R_E+h-L)^2}$	0.1	
	Формула (4): $m_1\Omega^2(R_E+h) = F_1 + T$	0.2	
	Формула (5): $m_2\Omega^2(R_E+h-L) = F_2 - T$	0.2	
	Формула (6): $\Omega = \sqrt{gR_E^2 \cdot \frac{\frac{m_1}{(R_E+h)^2}+\frac{m_2}{(R_E+h-L)^2}}{m_1(R_E+h)+m_2(R_E+h-L)}}$	0.1	
	Формула (7): $\Omega_0 = \sqrt{\frac{gR_E^2}{(R_E^2+h)^3}}$	0.1	
	Формула (8): $v = \Omega_0(R_E+h) = \sqrt{\frac{gR_E^2}{R_E+h}}$	0.1	
	Формула (8) необязательна для решения ***3.1****, однако будет часто применяться в дальнейшем, поэтому она может быть оценена из любой части задачи*		
	Формула (9): $\alpha = \frac{3m_2}{2(m_1+m_2)}$	0.2	
3.2	Формула (10): $\mu = \frac{3m_1m_2}{m_1+m_2}$ *($\mu = 2\alpha$ не принимается; требуется Формула (9))*	0.3	**0.5**
	Численное значение (11): $T \approx 6.5$ Н	0.2	
3.3	Формула (12): $l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}L$	0.1	**1.2**
	Формула (13): $l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}L.$	0.1	
	Формула (14): $M_1 = (F_1 - f_1)l_1 \sin\theta$	0.2	
	Формула (15): $M_2 = (f_2 - F_2)l_2 \sin\theta$	0.2	
	Формула (16): $J = m_1l_1^2 + m_2l_2^2$	0.1	
	Формула (17): $J\varepsilon = M_1 + M_2$	0.1	
	Формула (18): $\omega = \sqrt{\mu\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}\Omega_0$ или $\omega = \sqrt{3}\Omega_0$	0.2	
	Формула (19): $T_0 = \frac{2\pi(R_E+h)}{\sqrt{3}R_E}\sqrt{\frac{R_E+h}{g}}$ *(требуется раскрыть Ω_0 и μ)*	0.1	
	Численное значение (19): $T_0 = 53$ мин	0.1	
3.4	Формула (20): $R = \frac{\rho L}{S}$	0.1	**0.8**
	Формула (21): $I = nev_д S$ или $j = nev_д$ (плотность тока)	0.2	
	Формула (22): $F_B = ev_д B$	0.1	
	Формула (23): $E_y b = U_y$	0.1	
	Формула (24): $F_E = eE_y$	0.1	
	Формула (25): $U_y = \frac{U_0 bB}{ne\rho L}$	0.2	

3.5	Формула (26): $q_1 = -q_2$	0.1	**0.5**
	Формула (27) или (27'): $C = \frac{\varepsilon_0 Lh}{b}$ или $E_y = \frac{q_1}{\varepsilon_0 Lh}$	0.2	
	Формула (28): $q_1 = \frac{\varepsilon_0 Lh}{b} \cdot \frac{U_0 bB}{ne\rho L} = \frac{U_0 \varepsilon_0 LhB}{ne\rho}$ или $q_2 = -\frac{U_0 \varepsilon_0 LhB}{ne\rho}$	0.2	
3.6	Формула (29): $U = BL\dot{x} = BLv$	0.1	**0.8**
	Формула (30): $\frac{q}{C} = U$	0.1	
	Формула (31): $F_A = BIL$	0.2	
	Формула (32): $ma = mg - F_A$	0.1	
	Формула (33): $a = \frac{g}{1+\frac{CB^2L^2}{m}}$	0.2	
	Формула (34): $x(t) = \frac{at^2}{2}$, *балл ставится только при наличии Формулы (33)*	0.1	
3.7	Численное значение (35): $R_1 = 83.3$ Ом	0.1	**0.8**
	Формула (36): $U = BLv$	0.1	
	Для получения балла необходимо открыто показать применимость (36) в данном пункте; за запись (29) балл за (36) автоматически не выставляется		
	Формула (37): $I = \frac{U}{R_0+R_1}$	0.1	
	Формула (38): $P = I^2 R_0$	0.1	
	Формула (39): $R_0 = R_1$	0.1	
	Численное значение (40): $P_{\max} = 44.4$ кВт	0.1	
	Формула (41): $\eta = \frac{P_{\max}}{IU}$	0.1	
	Численное значение (41): $\eta = \frac{1}{2}$	0.1	
3.8	Формула (42): $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R_E+h}$	0.1	**1.0**
	Формула (43): $E = -\frac{GMm}{2(R_E+h)}$ или $E = -\frac{mgR_E^2}{2(R_E+h)}$	0.1	
	Формула (44): $\frac{dE}{dt} = -F_A v$	0.2	
	Формула (45): $\frac{dh}{dt} = -\frac{B^2L^2(R_E+h)}{mR_1}$	0.1	
	Формула (46): $\tau = \frac{mR_1}{B^2L^2}\ln\left(1+\frac{h}{R_E}\right)$	0.3	
	Численное значение (46): $\tau \approx 10700$ с ≈ 3 ч	0.2	
3.9	Формула (48): $F_1 = \rho(h)\big(\Omega(R+h)\big)^2 S_1 \approx \rho(h)\big(\Omega(R+h)\big)^2 \frac{\pi D^2}{4}$	0.1	**0.8**
	Формула (49): $F_2 = \rho(h-L)\big(\Omega(R+h-L)\big)^2 S_2 \approx \rho(h)\big(\Omega_0(R+h)\big)^2 \frac{\pi d^2}{4}$	0.1	
	Формула (50): $\rho_0 = \frac{\mu P_0}{RT}$ или $\rho(h) = \frac{\mu P(h)}{RT}$	0.1	
	Численное значение (51): $F = 6.02 \cdot 10^{-2}$ Н (указать $F = 0$ недостаточно!)	0.1	
	Формула (52): $V_0 = BLv$	0.2	
	Численное значение (52): $V_0 \approx 3850$ В	0.1	
3.10	Формула (53): $m_2 v - m_0 v = \pm(m_0 + m_2)v'$	0.2	**1.0**
	Формула (54): $E' = \frac{m_0 v'^2}{2} - \frac{GMm_0}{R_E+h}$	0.1	
	Формула (55): $m_0 v'(R_E+h) = m_0 v'' R_E$	0.2	
	Формула (56): $E' = \frac{m_0 v''^2}{2} - \frac{GMm_0}{R_E}$	0.1	
	Формула (57): $m_0 = m_2 \cdot \frac{\pm\sqrt{1+h/2R}-1}{\pm\sqrt{1+h/2R}+1} = m_2 \cdot \frac{4R_E+h\pm2\sqrt{2R_E(h+2R_E)}}{h}$	0.2	
	Численное значение (58): $m_{\max} \approx 14760$ кг	0.1	
	Численное значение (59): $m_{\min} \approx 0.7$ г (указывать $m_{\min} = 0$ неверно!)	0.1	
3.11	Формула (60): $I = \frac{V-V_0}{R_1}$	0.1	**0.8**

	Формула (61): $\mathcal{L} = m_0 l_2 (v + v')$	0.2	
	Формула (62): $M = F_A \cdot \left(\frac{L}{2} - l_1\right)$	0.2	
	Формула (63): $\Delta t_1 = \frac{4m_1 m_2 m_0}{(m_0+m_2)(m_1-m_2)} \cdot \frac{R_1}{B^2 L^2} \cdot \frac{V_0}{V-V_0}$ (просто записать $\Delta t_1 = \frac{\mathcal{L}}{M}$ недостаточно!)	0.2	
	Численное значение (63): $\Delta t_1 \approx 65$ мин	0.1	
3.12	Формула (64): $\Delta t_2 = \frac{(m_1+m_2)(v-v')}{F_A}$	0.3	**0.6**
	Формула (65): $\Delta t_2 = \frac{2m_0(m_1+m_2)}{m_2+m_0} \cdot \frac{R_1}{B^2 L^2} \cdot \frac{V_0}{V-V_0}$	0.2	
	Численное значение (65): $\Delta t_2 \approx 38$ мин	0.1	
Итого		**10.0**	