

Решение экспериментального тура РО по физике -2024

10 класс

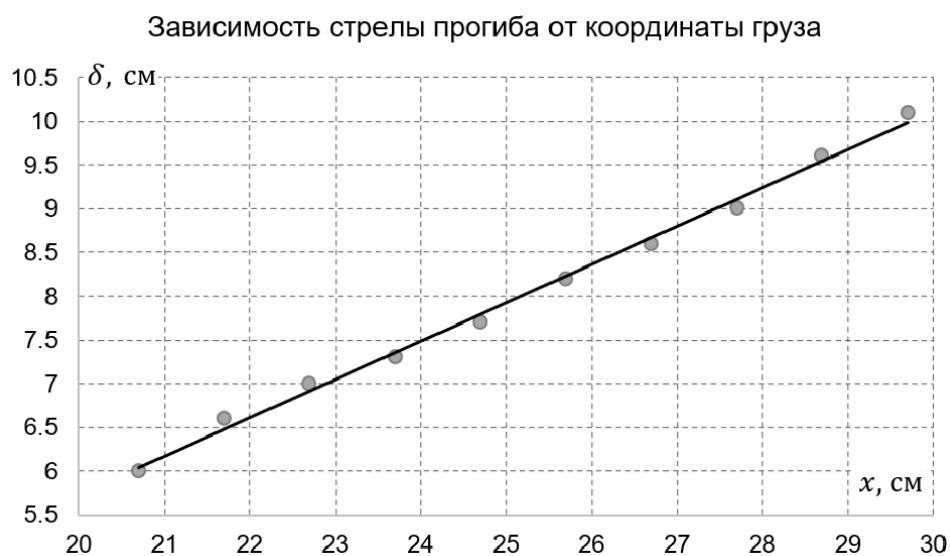
Упругие свойства линейки, 15 баллов

1. Для всего авторского решения выбраны значения $m = 100$ г и $L = 39$ см. В таблице 1 приведены измерения зависимости стрелы прогиба δ от координаты x груза.

Таблица 1

x , см	20.7	21.7	22.7	23.7	24.7	25.7	26.7	27.7	28.7	29.7
δ , см	6.0	6.6	7.0	7.3	7.7	8.2	8.6	9.0	9.6	10.1

К такому графику построим экспериментальную зависимость:



Как видно, данная зависимость является прямой пропорциональностью вида $\delta(x) = bx$. Можно продемонстрировать (однако это не требуется), что относительная погрешность свободного члена линейной зависимости значительно выше таковой для b , поэтому это слагаемое опускается.

Запишем уравнение баланса сил, действующих на груз m :

$$mg = k(x)\delta(x).$$

Поскольку $\delta(x)$ линейно зависит от x , можно судить о том, что коэффициент $\alpha = -1$.

Расчёт коэффициента b по наклону графика или методом наименьших квадратов даёт

$$b = 0.438.$$

Отсюда рассчитаем значение коэффициента k_0 :

$$k_0 = \frac{mg}{bL} = 5.73 \text{ Н/м.}$$

2. Теперь теоретически найдём зависимость периода малых колебаний линейки от координаты груза.

$$m\ddot{z} = mg - k(x)(bx + z) = -k(x)z.$$

Видно, что такому уравнению движения соответствует колебание с периодом

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k(x)}}$$

Если выразить $k(x)$, то будет видно, что

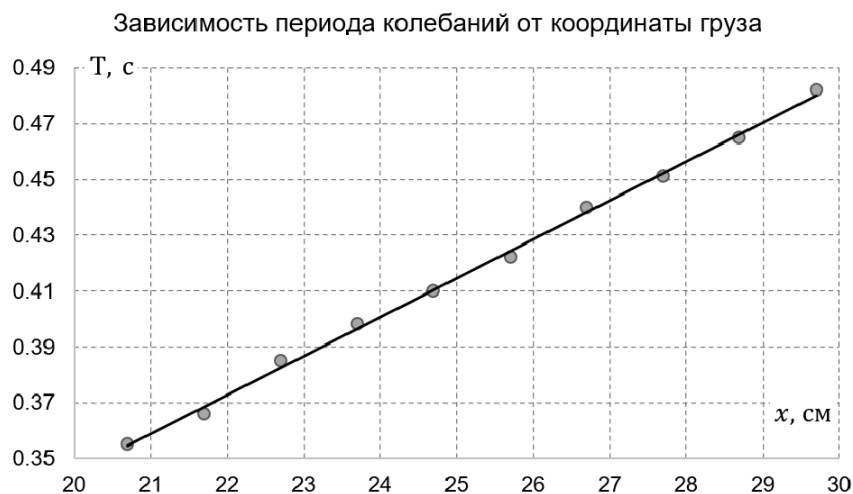
$$C = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0 L}}, \quad \beta = 1/2.$$

Экспериментально определим зависимость $T(x)$ и проверим выполнимость предложенной в условии степенной функции. Измерения в том же диапазоне x , что и в Таблице 1, дают

Таблица 2

x , см	20.7	21.7	22.7	23.7	24.7	25.7	26.7	27.7	28.7	29.7
T , с	0.355	0.366	0.385	0.398	0.410	0.422	0.440	0.451	0.465	0.482

Поскольку период колебаний относительно мал, очень важно тщательно проводить измерения по несколько раз, а также делать это в диапазоне достаточно больших x и/или m (но не переборщить с этим, иначе это повлияет на жёсткость линейки, а штатив может и вовсе перевернуться!). Графиком данной зависимости будет



Неожиданно, но зависимость оказалась линейной, а не «корневой»! В таком случае формулу $k(x)$ следует модифицировать под «динамический» случай, при котором линейной зависимости $T(x)$ соответствует $\alpha' = -2$, а теоретически зависимость примет вид

$$T(x) = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{m}{k'_0}} \cdot x.$$

Из графика численно определим коэффициент наклона

$$\frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{m}{k'_0}} = 0.0140 \text{ с/см.}$$

Отсюда динамический коэффициент жёсткости равен

$$k'_0 = 13.24 \text{ Н/м.}$$

Интересно, что данный результат оказывается более, чем в два раза выше значения k_0 !

3. Для последнего пункта теоретически выразим момент сил M и радиус кривизны R через исследуемые нами величины. Во-первых,

$$M = mgx,$$

и во-вторых, из экспериментальной установки видно, что если ввести угол φ , который будет охватывать дугу линейки, то

$$\varphi = L/R.$$

К тому же,

$$\delta = R(1 - \cos \varphi) \approx \frac{R\varphi^2}{2}.$$

Собирая вышеуказанные величины, определим, что исследуемой нами зависимостью будет

$$\delta(x) = \frac{6mgL^2}{Eah^3} \cdot x.$$

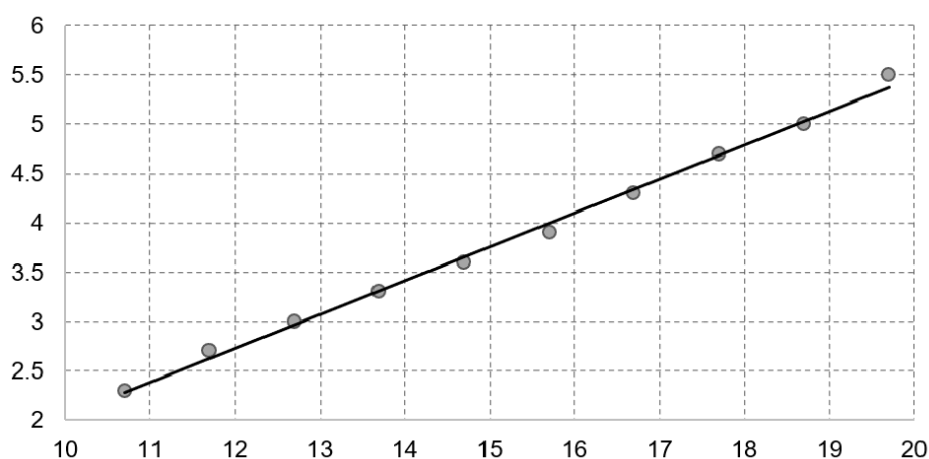
Следует обратить внимание, что данная зависимость хорошо работает при малых δ . Для этого лучшим способом более точно измерить модуль Юнга является либо подбор более лёгкого груза m , либо измерения в диапазоне более малых x . В данном решении последуем по второму пути. Экспериментально снятая зависимость представлена в таблице ниже:

Таблица 3

x , см	10.7	11.7	12.7	13.7	14.7	15.7	16.7	17.7	18.7	19.7
δ , см	2.3	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.3	4.7	5	5.5

График зависимости будет таковым:

Зависимость стрелы прогиба от координаты груза
(малые отклонения)



Поскольку в данном пункте следует также рассчитывать погрешность измерений, определим по методу наименьших квадратов как само значение наклона

$$b = \frac{6mgL^2}{Eah^3} = 0.343,$$

так и погрешность измерений

$$\Delta b = 2 \sqrt{\frac{\sigma_Y^2 / \sigma_X^2 - b^2}{N - 2}} = 0.015.$$

$Y = a + bX$

Это к тому же говорит о том, что значение k_0 слегка зависит от того, в каком диапазоне x участник измерял $\delta(x)$ в первой части задачи. В частности, если участник решал пункт 1, измеряя значения так, как это было сделано в пункте 4 авторского решения, то его результат должен быть близок к значению

$$k_0 = 7.31 \text{ Н/м.}$$

Это будет принято во внимание при оценивании пункта 1. Итак, модуль Юнга равен

$$E = 104.1 \text{ ГПа,}$$

а погрешность его значения равна

$$\Delta E = E \cdot \frac{\Delta b}{b} = 4.7 \text{ ГПа.}$$

Содержание	Баллы
Пункт 1	4.25
Таблица точек зависимости $\delta(x)$: оценивается, если результаты отличаются от авторского не более, чем на 25%, с учётом подобранных участником m , L , и диапазона значений x .	1.75
- Диапазон изменения x как минимум 7 см (<i>не более 5 см, не более 3 см</i>)	0.50 (0.25, 0.00)
- Число точек 10 и более (<i>5-9 точек, меньше 5 точек</i>)	0.75 (0.25, 0.00)
- Получена линейная зависимость	0.50
Построение графика зависимости $\delta(x)$: оценивается в соответствии с таблицей.	1.25
- Оси подписаны и оцифрованы	0.25
- Нанесены все точки в соответствие с таблицей (<i>больше 70% точек, меньше 70%</i>)	0.75 (0.25, 0.00)
- Проведена сглаживающая линия	0.25
Расчёт коэффициента k_0	1.25
- Расчёт коэффициента наклона b по МНК или графически (<i>по 2-3 точкам, по одной точке</i>)	0.40 (0.20, 0.10)
- Вывод $\alpha = -1$ (<i>ответ без вывода</i>)	0.15
- Вывод $k_0 = mg/bL$	0.20
- Численное значение k_0 с допустимым отличием не более 5% от авторского ответа (<i>не более 10%, 10% и более</i>). Для $x \in (20 \text{ см}, 30 \text{ см})$ будет $k_0 = 5.73 \text{ Н/м}$, для $x \in (10 \text{ см}, 20 \text{ см})$ будет $k_0 = 7.31 \text{ Н/м}$.	0.5 (0.25, 0.00)
- Потеряна/неверно указана размерность	(-0.25)
Пункт 2Г	0.75
Теоретический вывод $T(x)$:	0.75
- Указано, необязательно с выводом, что $T(x) = 2\pi\sqrt{m/k(x)}$.	0.30
- Указан C	0.25
- Указан β	0.20

Пункт 2Е	4.75
<p>Таблица точек зависимости $T(x)$: оцениваются точки, для которых $T > 0.3$ с (им обычно соответствует $x > 20$ см при $L \approx 40$ см, иначе измерять период колебаний слишком сложно) и результаты отличаются от авторского не более, чем на 25%, с учётом подобранных участником m, L, и диапазона значений x.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Диапазон изменения x как минимум 7 см (<i>не более 5 см, не более 3 см</i>) - Число точек, в которых $T > 0.3$ с, 10 и более (<i>5-9 точек, меньше 5 точек</i>) - Получена линейная зависимость 	<p style="text-align: center;">1.75</p> <p style="text-align: right;">0.50 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.75 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.50</p>
<p>Построение графика зависимости $T(x)$: оценивается в соответствии с таблицей.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Оси подписаны и оцифрованы - Нанесены все точки в соответствии с таблицей (<i>больше 70% точек, меньше 70%</i>) - Проведена сглаживающая линия 	<p style="text-align: center;">1.25</p> <p style="text-align: right;">0.25</p> <p style="text-align: right;">0.75 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.25</p>
<p>Расчёт коэффициента k'_0</p> <ul style="list-style-type: none"> - Расчёт коэффициента наклона b по МНК или графически (<i>по 2-3 точкам, по одной точке</i>) - Указано $\alpha = -2$ - Указано $b = (2\pi/L)\sqrt{m/k'_0}$ - Численное значение k'_0 с допустимым отклонением не более 5% от авторского ответа (<i>не более 10%, 10% и более</i>). Для $x \in (10 \text{ см}, 20 \text{ см})$ будет $k'_0 = 13.24$ Н/м. Более сильное отклонение k'_0 от авторского ответа из-за других подобранных параметров не учитывается. - Потеряна/неверно указана размерность 	<p style="text-align: center;">1.75</p> <p style="text-align: right;">0.40 (0.20, 0.10)</p> <p style="text-align: right;">0.25</p> <p style="text-align: right;">0.35</p> <p style="text-align: right;">0.75 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">(-0.25)</p>
Пункт 3	5.25
<p>Теоретический расчёт $\delta(x)$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Указано $M = mgx$ - Указано $\varphi = L/R$ - Указано $\delta = R\varphi^2/2$ - Указано $\delta = 6mgL^2/Eah^3 \cdot x$ 	<p style="text-align: center;">0.5</p> <p style="text-align: right;">0.1</p> <p style="text-align: right;">0.1</p> <p style="text-align: right;">0.1</p> <p style="text-align: right;">0.20</p>
<p>Таблица точек зависимости $\delta(x)$: оцениваются точки $\delta < 7$ см (иначе форма линейки будет менее точно сходиться к окружности) и результаты отличаются от авторского не более, чем на 25%, с учётом подобранных участником m, L, и диапазона значений x.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Диапазон изменения x как минимум 7 см (<i>не более 5 см, не более 3 см</i>) - Число точек, в которых $\delta < 7$ см, 10 и более (<i>5-9 точек, меньше 5 точек</i>) - Получена линейная зависимость 	<p style="text-align: center;">1.75</p> <p style="text-align: right;">0.50 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.75 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.50</p>
<p>Построение графика зависимости $\delta(x)$: оценивается в соответствии с таблицей.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Оси подписаны и оцифрованы - Нанесены все точки в соответствии с таблицей (<i>больше 70% точек, меньше 70%</i>) - Проведена сглаживающая линия 	<p style="text-align: center;">1.25</p> <p style="text-align: right;">0.25</p> <p style="text-align: right;">0.75 (0.25, 0.00)</p> <p style="text-align: right;">0.25</p>

Расчёт модуля Юнга E	1.75
- Расчёт коэффициента наклона b по МНК или графически (<i>по 2-3 точкам, по одной точке</i>)	0.40 (0.20, 0.10)
- Оценка погрешности наклона Δb	0.35
- Численное значение $E = 100.0$ ГПа с допустимым отклонением не более 5% от авторского ответа (<i>не более 10%, не более 15%, 15% и более</i>).	1.00 (0.50, 0.25, 0.00)
- Потеряна/неверно указана размерность	(-0.25)
Итого	15.00