Решение задач республиканской олимпиады по физике-2023
9 класс
Задача 1. «Солянка» (10,0 баллов)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (4,0 балла)

1. Для любого движения по круговой орбите будет справедливо равенство:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} \qquad (2)$$

Для Земли:

$$v_з = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{R_з}} \approx 29{,}8 \text{ км}/c \qquad (3)$$

Для Сатурна:

$$v_с = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{R_с}} \approx 9{,}94 \text{ км}/c. \qquad (4)$$

2. Для любого эллиптического движения справедливы следующие равенства энергии и момента импульса:

$$m \cdot \frac{v_1^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{R_1} = m \cdot \frac{v_2^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{R_2} \qquad (5)$$

$$m\, v_1\, R_2 = m\, v_2\, R_2 \qquad (6)$$

$$\frac{v_1^2}{2} - G \cdot \frac{M}{R_1} = \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - G \cdot \frac{M}{R_2} \qquad (7)$$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = GM \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (8)$$

Выразим $\frac{R_1}{R_2} = \beta$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \beta^2) = G\frac{M}{R_1} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right) \qquad (9)$$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \beta^2) = G\frac{M}{R_1} \cdot (1 - \beta) \qquad (10)$$

$$v_1^2 = G\frac{M}{R_1} \cdot \frac{2}{1 + \beta} \qquad (11)$$

R_1 является малой осью, которая в случае нашей задачи является круговой орбитой земли $R_з$

$$v_1 = v_з \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \beta}} \qquad (12)$$

v_1 больше орбитальной скорости Земли $v_з$, поэтому начальное увеличение скорости для ракеты “Шу” является отрицательным и равно:

$$\Delta v_1 = v_з\left(\sqrt{\frac{2}{1+\beta}} - 1\right) \approx 10{,}2\ \text{км}/c. \tag{13}$$

3. Теперь решим уравнения (5) и (6) относительно v_2 :

$$\frac{v_2^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}^2\right) = G\frac{M}{R_2}\cdot\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \tag{14}$$

$$v_2^2 = G\frac{M}{R_2}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{\beta}} \tag{15}$$

$$v_2 = v_c \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\frac{1}{\beta}}} \tag{16}$$

v_2 меньше орбитальной скорости Сатурна v_c, поэтому второе уменьшение скорости для ракеты “Шу” является положительным и равно:

$$\Delta v_2 = v_c\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{1}{\beta}}}\right) \approx 5{,}5\ \text{км/с} \tag{17}$$

4. По 3 закону Кеплера мы можем найти время орбитального перемещения ракеты “Шу”:

$$\frac{T}{T_с} = \frac{1}{2}\left(\frac{(R_з + R_c)/2}{R_c}\right)^{1,5} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{1,5} \tag{18}$$

Угол на который переместился Сатурн за это время:

$$\gamma = 2\pi\cdot\frac{T}{T_с} = \pi\cdot\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{1,5} \tag{19}$$

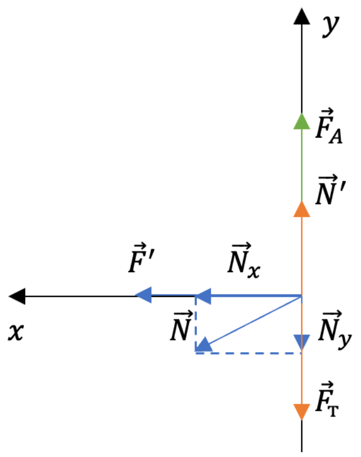
Начальное угловое расстояние между Землей и Сатурном:

$$\alpha = \pi\left(1 - \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^{1,5}\right) \approx 0{,}59\pi \tag{20}$$

	Содержание	Баллы
1.	Формула (3) и численный ответ:	0,1
6	Формула (4) и численный ответ:	0,1
3.	Формула (5) :	0,4
4.	Формула (6):	0,4
5.	Формула (11):	0,25
6.	Формула (12):	0,25
7.	Формула (13):	0,25
8.	Численный ответ $\Delta v_1 \approx 10{,}2$ км$/c$.	0,25
9.	Формула (15):	0,25
10.	Формула (16):	0,25
11.	Формула (17):	0,25
12.	Численный ответ $\Delta v_2 \approx 5{,}5$ км/с	0,25
13.	Формула (18):	0,25
14.	Формула (19):	0,25
15.	Формула (20):	0,25
16.	Ответ $\alpha \approx 0{,}59\pi$	0,25
	Итого	**4,0**

Часть 1.2 Взаимодействие шара (3,0 балла)

На рисунке ниже изображены силы, которые действуют на шар при движений сосуда с постоянным горизонтальным ускорением a:



$\vec{F}'$ и $\vec{F}_A$ - две проекции результирующей силы давления со стороны воды на шар, $\vec{N}$ - реакция стенки сосуда на шар, $\vec{F}_т$ - сила тяжести шара, $\vec{N}'$ - сила реакции дна сосуда на шар. Так как сосуд движеться с ускорением $\vec{a}$, сила $\vec{F}' = \rho V\vec{a}$, сила $\vec{F}_A = \rho_0 V\vec{g}$.

Запишем уравнение движения шара проекцируя на горизонтальные и вертикальные оси.

По горизонтальной оси уравнение движения будет иметь вид:

$$ox: \rho V a + N sin\alpha = \rho_0 V a \qquad (1)$$

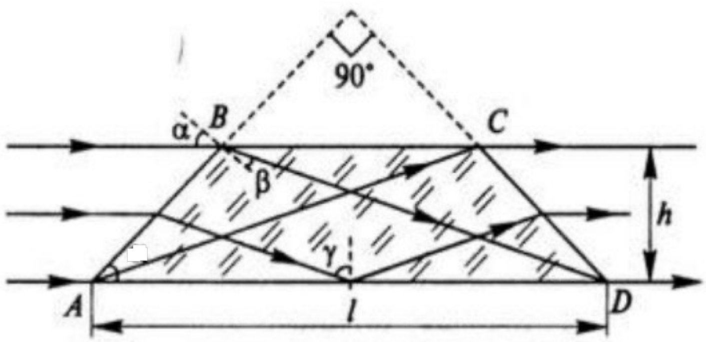
$$oy: \rho V g + N' - \rho_0 V g - N cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить искомую величину

$$N^{'} = \left((\rho_0 - \rho)\frac{4}{3}\pi R_0^3 (g + a \cdot ctg\alpha) \right) \qquad (3)$$

Содержание	Баллы
За правильное изображение всех сил ($\vec{F}^{'}$, $\vec{F}_A, \vec{N}, \vec{N}^{'}, \vec{F}_т$)	0,1 на каждую силу всего 0,5
Формула (1): $\rho V a + N sin\alpha = \rho_0 V a$	1,0
Формула (2): $\rho V g + N' - \rho_0 V g - N cos\alpha = 0$	1,0
Формула (3): $N^{'} = \left((\rho_0 - \rho)\frac{4}{3}\pi R_0^3 (g + a \cdot ctg\alpha) \right)$	0,5
Итого	**3.0**

Часть 1.3 Призма Дове (3,0 балла)



Сечение будет максимальным если луч из точки B идёт в точку D, а луч из точки A идёт в точку C. Чтобы свет не выходил из призмы должно выполняться следующее условие:

$$sin\alpha_{кр} = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Из уравнения Снеллиуса

$$sin\alpha_{кр} = n\sin\beta \qquad (2)$$

Итого, получаем

$$l = h(1 + 1/tg(\alpha - \beta)) \qquad (3)$$

Тогда $l = 10$ см.

Содержание	Баллы
За правильное утверждение о максимальном сечений	1,0
Формула (1): $sin\alpha_{кр} = \frac{1}{n}$	0,5
Формула (2): $sin\alpha_{кр} = n\sin\beta$	0,5
Формула (3): $l = h(1 + 1/tg(\alpha - \beta))$	0,5
Получен правильный численный ответ $l = 10$ см.	0,5
Итого	**3,0**

Задача_2. Теплоизолированный сосуд [10 баллов]

Решение длинной задачи тепло:

0. Необходимое давление 10^4 Па будет достигнуто гидростатическим давлением:

$$P = \rho g h_0 \qquad (1)$$

$$h_0 = \frac{P}{\rho g} = 1 \text{ метр} \qquad (2)$$

1. Предполагая что в системе моментально наступает тепловое равновесие:

$$\mu\tau c\Delta t + P\tau = \lambda\Delta m \qquad (3)$$

$$\Delta m = \frac{(\mu c\Delta t + P)\tau}{\lambda} \qquad (4)$$

Поперечного сечения льда:

$$S_л = S_0 - \Delta S = S_0 - \frac{(\mu c\Delta t + P)\tau}{\lambda h_л \rho_л} \qquad (5)$$

Уровень воды в сосуде:

$$h_в = \frac{\mu\tau + \Delta m}{\rho_в(S - S_л)} = \frac{\tau\left(\mu c\left(1 + \frac{\Delta t}{\lambda}\right) + \frac{P}{\lambda}\right)}{\rho_в\left(S - S_0 + \frac{(\mu c\Delta t + P)\tau}{\lambda h_л \rho_л}\right)} \qquad (6)$$

Вода подтечет под лёд при равенстве:

$$h_в' \rho_в g = h_л \rho_л g \qquad (7)$$

$$h_в' = \frac{h_л \rho_л}{\rho_в} = 18 \text{ см} \qquad (8)$$

$$\tau = \frac{\rho_в h_в'(S - S_0)}{\left(\mu + \mu\frac{c\Delta t}{\lambda} + \frac{P}{\lambda} - \mu\tau c\frac{\Delta t h_в' \rho_в}{\lambda h_л \rho_л} - P\frac{\tau h_в' \rho_в}{\lambda h_л \rho_л}\right)} = \frac{\rho_в h_в'(S - S_0)}{\mu} = 90 \text{ сек} \qquad (9).$$

2. Давайте теперь проверим когда лёд полностью растает

$$\Delta m' = 90 \text{грамм}$$

$$\frac{(\mu c\Delta t + P)\tau}{\lambda} = \Delta m' \qquad (10)$$

$$\tau_0 = \frac{\Delta m' \lambda}{(\mu c\Delta t + P)} = 58{,}9 \text{ секунд.} \qquad (11)$$

Лёд полностью растает раньше чем когда наберется необходимая высота воды для подтекания под лёд в рамках нашей модели.
Поэтому:
Вода не подтечет под лёд

3.Уравнение температуры воды в сосуде

$$P\tau = (\mu\tau_0 + \Delta m')c(t) + \mu\tau c(t - t_0) \qquad (12)$$

τ в уравнении (12) и далее отсчитывает момент времени после таяния льда

$$m_{в0} = \mu\tau_0 + \Delta m' = 325.6 \text{ грамм}$$

$$t = \frac{(P + \mu c t_0)\tau}{(\mu\tau + m_{в0})c} \qquad (13)$$

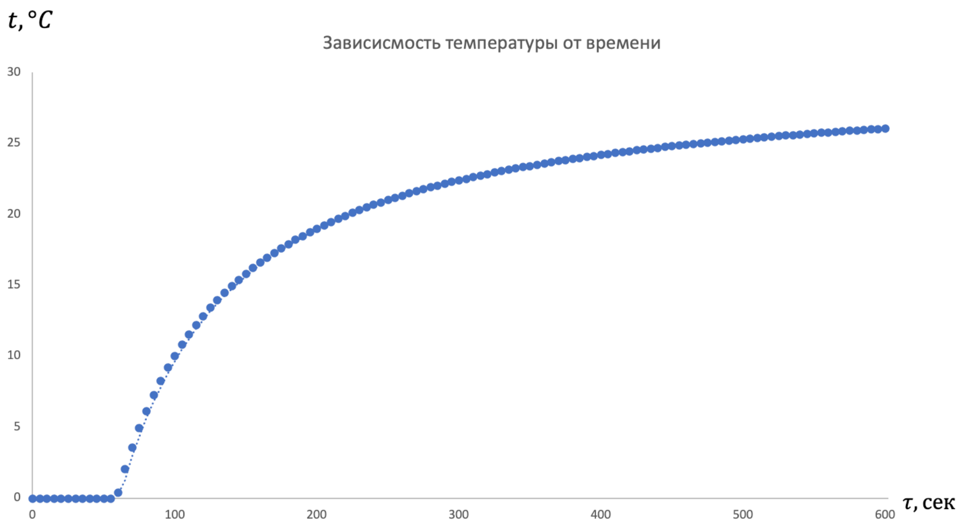
4. Для того чтобы пробка вылетела в сосуде должна быть вода объемом:
$V = Sh_0 = 2{,}5$ литр
Масса воды в сосуде в этот момент

$$\rho_в S h_0 = \mu\tau + \Delta m' \qquad (14)$$

$$\tau = \frac{\rho_в S h_0 - \Delta m'}{\mu} = 602{,}5 \text{ секунд} \qquad (15)$$

5. График температуры в сосуде с момента включения крана до момента вылета пробки.

До момента 58,9 секунд температура 0 °С



6. Когда приостанавливается подача воды тепловой баланс для малого промежутка времени сразу после вылета пробки:

$$P\Delta\tau = mc\Delta t \qquad (16)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P}{mc} \qquad (17)$$

Масса воды в сосуде в момент вылета пробки:

$$m'_в = \rho_в S h_0 = 2{,}5\ кг \qquad (18)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P}{m'_в c} = 0{,}04\ °C/сек. \qquad (19)$$

7. $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta\tau}$ в конце $\alpha_к = 0{,}1°C/сек$, тогда $m_к = \frac{P}{c\alpha_к} = 1\ кг$ (20)

8. Средний расход через дырку:

$$\mu_{ср}\tau_к = m'_в - m_к \qquad (21)$$

$$\mu_{ср} = \frac{m'_в - m_к}{\tau_к} = 3{,}57\ грамм/сек \qquad (22)$$

1.	Уравнение (2)	0,25 баллов
2.	Уравнение (3)	0,5 баллов
3.	Уравнение (5)	0,25 баллов
4.	Уравнение (6)	0,75 баллов
5.	Уравнение (7)	0,5 баллов
6.	Уравнение (9)	0,5 баллов
7.	Уравнение (11)	0,25 баллов
8.	Численный ответ (11) $\tau_0 = 58{,}9$	0,25 баллов
9.	Написано что лед полностью растает раньше чем под него подтечет вода	1 балл
10.	Уравнение (12)	0,5 баллов
11.	Уравнение (13)	0,5 баллов
12.	Уравнение (14)	0,5 баллов
13.	Уравнение (15)	0,25 баллов
14.	Численный ответ (15) $\tau = 602{,}5$ секунд	0,25 секунд
15.	График (Оси подписаны)	1,5 балла
16.	Уравнение (16)	0,25 баллов
17.	Уравнение (17)	0,25 баллов
18.	Уравнение (19)	0,25 баллов
19.	Численный ответ (19) $\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 0{,}04\ °C/сек$	0,25 баллов
20.	Численный ответ (20) $m_к = 1\ кг$	0,5 баллов
21.	Уравнение (21)	0,25 баллов
22.	Численный ответ (22) $\mu_{ср} = 3{,}57\ грамм/сек$	0,5 баллов

Задача 3. «Электрические цепи» (10.0 балла)
Часть 1 (2.0 балла)

1.1 Положение 1:
Ток через амперметр

$$I_1 = \frac{V_1}{R} + \frac{V_1}{R_V} \tag{1}$$

тогда как напряжение соответствует напряжению на комбинации вольтметра-сопротивления. Таким образом, измеренное сопротивление

$$R_{\mathrm{m1}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}} \tag{2}$$

$$\Delta_1 = -\frac{1}{1 + \frac{R_V}{R}} \tag{3}$$

Положение 2:
Ток через амперметр

$$I_2 = \frac{V_2}{R + R_A} \tag{4}$$

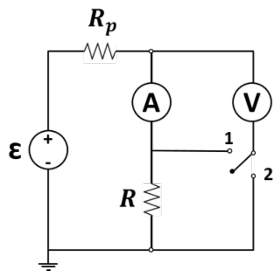
Таким образом:

$$R_{\mathrm{m2}} = \frac{V_2}{I_2} = R + R_A \tag{5}$$

$$\Delta_2 = \frac{R_A}{R} \tag{6}$$

1.2 Мы используем показанную ниже конфигурацию. Когда переключатель находится в положении 1, амперметр и вольтметр находятся параллельно, и мы вычисляем

$$R_A = V/I \tag{7}$$

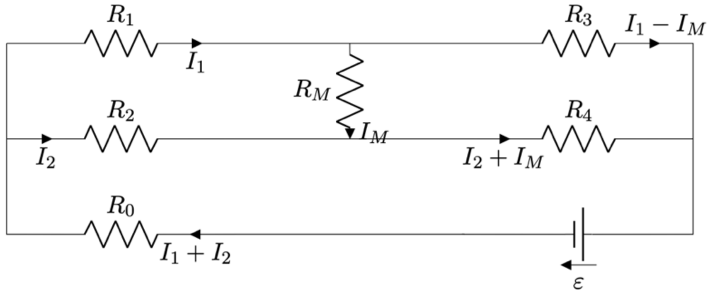


Когда мы используем переключатель в положении 2, конфигурация такая же, как в позиции 2 части 1.1.

$$R = R_{\mathrm{m2}} - R_A \tag{8}$$

Это даст верное значение сопротивления

Часть 2 (3.0 балла)



В диаграмме показаны сопротивления, токи и ЭДС. Представьте себе, что между выводами 1 и 2 имеется сопротивление R_M. Мы можем установить позже $R_M = 0$ для идеального амперметра и $I_M = 0$ для идеального вольтметра, расположенного между двумя выводами. Применяя закон Кирхгофа

$$\begin{aligned}\varepsilon = (I_1+I_2)R_0 + I_1R_1 + (I_1 - I_M)R_3 &= (R_0+R_1+R_3)I_1 + I_2R_0 - I_MR_3 \\ &= R_{013}I_1 + R_0I_2 - R_3I_M\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon = (I_1+I_2)R_0 + I_2R_2 + (I_2 + I_M)R_4 &= (R_0+R_2+R_4)I_2 + I_1R_0 + I_MR_4 \\ &= R_{024}I_2 + R_0I_1 + R_4I_M\end{aligned} \tag{10}$$

Решая уравнения выше

$$I_1 = \frac{\varepsilon R_{24} + I_M(R_0R_{34} + R_3R_{24})}{R_0R_{1234} + R_{13}R_{24}} \tag{11}$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon R_{13} - I_M(R_0R_{34} + R_4R_{13})}{R_0R_{1234} + R_{13}R_{24}} \tag{12}$$

Разность потенциалов между выводами 1 и 2 равна

$$V_{12} = I_2R_2 - I_1R_1 = \varepsilon A - I_MB \tag{13}$$

где коэффициенты A и B зависят только от сопротивлений в схеме. Когда амперметр помещается между выводами, $V_{12} = 0$ и $I_M = I_A$.

$$\varepsilon A = I_AB \tag{14}$$

Когда сопротивление R помещается между выводами, $I_M = I_R$ и $V_{12} = I_RR$. Это дает

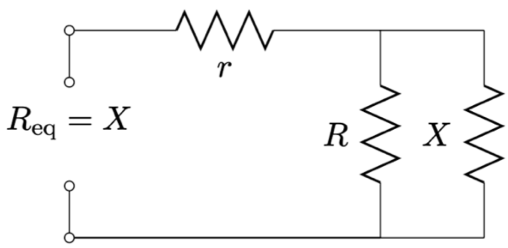
$$I_RR = \varepsilon A - I_RB = I_AB - I_RB \Rightarrow B = \frac{I_RR}{I_A - I_R} \tag{15}$$

Когда идеальный вольтметр помещается между выводами, $I_M = 0$. Следовательно, $V_{12} = \varepsilon A - 0 = I_{AB}$ или

$$V_{12} = \frac{I_AI_R}{I_A - I_R}R \tag{16}$$

Часть 3 (5.0 балла)

3.1



Пусть эквивалентное сопротивление будет X.

$$r + \frac{RX}{R+X} = X \tag{17}$$

$$X = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \tag{18}$$

Беря положительный знак

$$X = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \tag{19}$$

3.2 Из закона Кирхгофа для электрических цепей

$$I_{n-1} = I_n + I'_n \tag{20}$$

Используя закон Кирхгофа для напряжений

$$rI_n + RI'_{n+1} - RI'_n = 0 \tag{21}$$

Из уравнения (20) мы видим, что

$$I'_{n+1} - I'_n = (I_n - I_{n+1}) - (I_{n-1} - I_n) = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1} \tag{22}$$

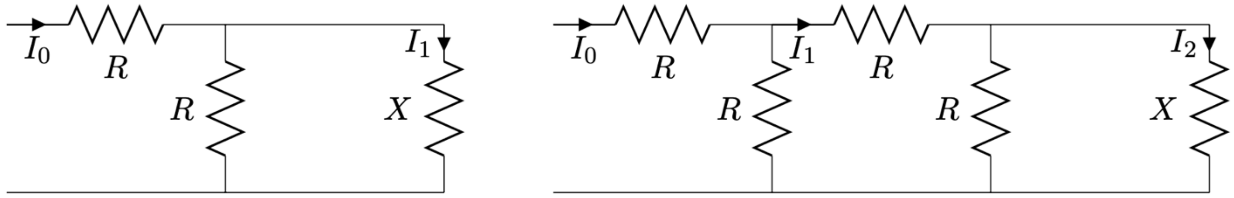
Так что уравнение (21) становится

$$I_{n+1} - \left(2 + \frac{r}{R}\right) I_n + I_{n-1} = 0 \tag{23}$$

которое является требуемым рекуррентным соотношением.

3.3 Первый метод:

Можно заметить, что I_{n-1}, I_n, I_{n+1} образуют геометрическую прогрессию. Кроме того,



Для рисунка слева

$$I_1 = I_0 \frac{R}{R+X} \tag{24}$$

Для рисунка справа

$$I_2 = I_1 \frac{R}{R+X} = I_0 \left(\frac{R}{R+X}\right)^2 \tag{25}$$

Следовательно:

$$I_n = I_0 \left(\frac{R}{R+X}\right)^n \tag{26}$$

Для r = R

$$I_n = I_0 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n = I_0 k^n = I_0 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n} \tag{27}$$

Из уравнения (21)

$$I'_n = I_0 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = I_0 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-1} \tag{28}$$

Второй метод:

Для r=R, уравнения (23) становится

$$I_{n+1} - 3I_n + I_{n-1} = 0 \tag{29}$$

Мы можем решить эту линейную рекуррентную связь, предположив, что $I_n \sim \rho^n$. Это приводит к

$$\rho^2 - 3\rho + 1 = 0 \tag{30}$$

так что у нас есть

$$\rho = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{31}$$

Это означает, что общее решение (29) это

$$I_n = A\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}\Bigg)^n \tag{32}$$

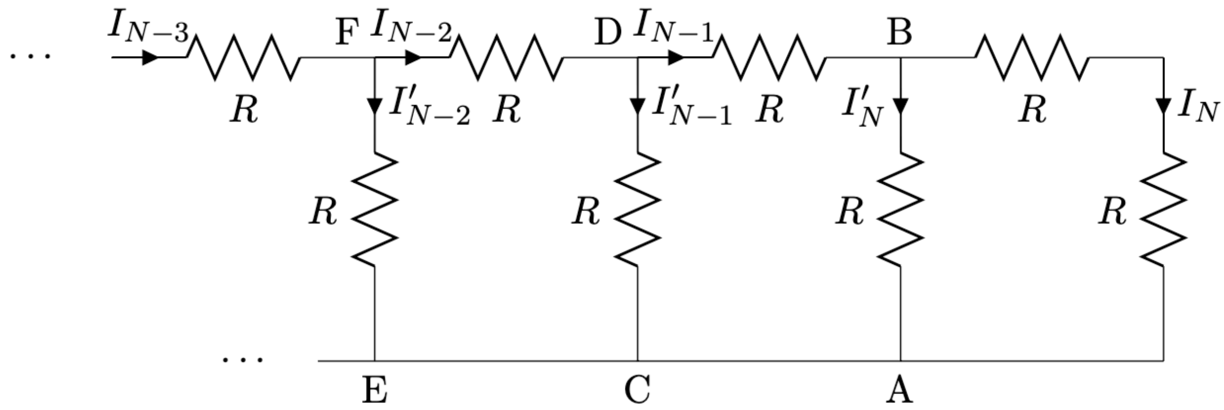
Второй член растет без ограничений с увеличением n, так что для бесконечной лестницы мы должны иметь $B = 0$. Кроме того, когда $n = 0, I_0 = A$. Таким образом,

$$I_n = I_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{33}$$

$$I'_n = I_{n-1} - I_n = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \tag{34}$$

3.4 Первый метод:

Рассмотрим конечную часть лестницы, показанную ниже.

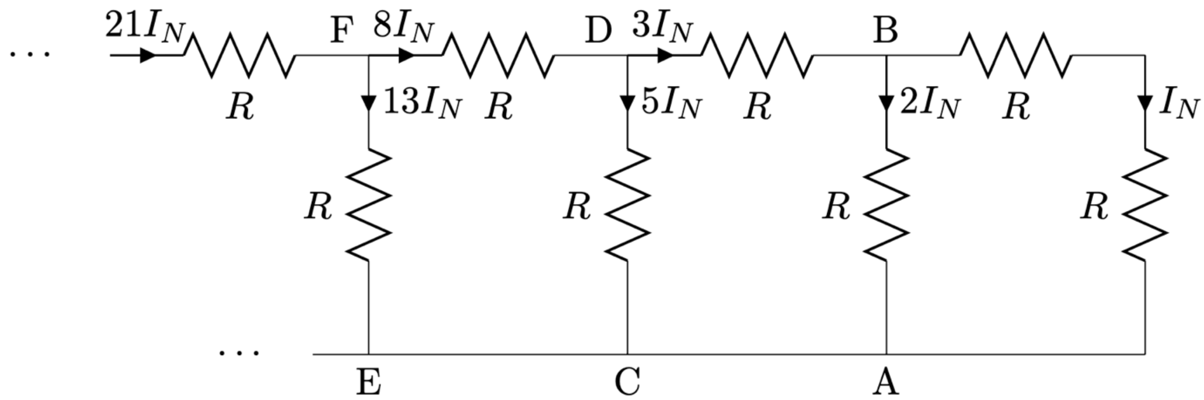


Падение напряжения на $AB = 2RI_N = I'_N R \Rightarrow I'_N = 2I_N$ и $I_{N-1} = 3I_N$.

Падение напряжения на $CD = \frac{5R}{3}3I_N = I'_{N-1}R \Rightarrow I'_{N-1} = 5I_N$ и $I_{N-2} = 8I_N$.

Падение напряжения на $EF = \frac{13R}{8}8I_N = I'_{N-2}R \Rightarrow I'_{N-2} = 13I_N$ и $I_{N-3} = 21I_N$.

Это изображено на рисунке ниже.



Это похоже на члены последовательности Фибоначчи. Последовательность Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... и т.д., в которой n-й член последовательности Фибоначчи является суммой двух предыдущих членов, т.е. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1$. Другими словами:

$$I_{N-1} = F_4,\ I_{N-2} = F_6,\ I_{N-3} = F_8,\ I_{N-4} = F_{10}\dots$$

В общем случае

$$\frac{I_{N-r}}{I_N} = F_{2r+2} \tag{35}$$

$$\frac{I_n}{I_N} = F_{2(N-n)+2} \tag{36}$$

Второй метод:
См. уравнение (32). Если $I_{N+1} = 0$, мы должны иметь

$$A\rho_1^{N+1} + B\rho_2^{N+1} = 0 \tag{37}$$

Где $\rho_{2,1} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Таким образом $B = -A\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}$ и следовательно

$$I_n = A\left(\rho_1^n - \rho_2^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}\right) \tag{38}$$

И таким образом

$$\frac{I_n}{I_N} = \frac{\rho_1^n - \rho_2^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}}{\rho_1^N - \rho_2^N\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_1^{n-N-1} - \rho_2^{n-N-1}\right] \tag{39}$$

Уравнение (36) и (39) эквивалентны.
Обобщение.
Если $r \neq R$:
Решение уравнение (23)

$$\rho_{2,1} = \frac{b\pm\sqrt{b^2-4}}{2} \tag{40}$$

Где

$$b = 2 + \frac{r}{R} \tag{41}$$

Следовательно

$$\frac{I_n}{I_N} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_1^{n-N-1} - \rho_2^{n-N-1}\right] \tag{42}$$

$$= \frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_2^{N+1-n} - \rho_1^{N+1-n}\right] \tag{43}$$

Также принимаются альтернативные формы уравнений (36), (39) и (43).

	Содержание	Баллы	
1.1	Формула (1): $I_1 = \frac{V_1}{R} + \frac{V_1}{R_V}$	0.1	**1.0**
	Формула (2): $R_{\mathrm{m1}} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{1+\frac{R}{R_V}}$	0.1	
	Формула (3): $\Delta_1 = -\frac{1}{1+\frac{R_V}{R}}$	0.3	
	Формула (4): $I_2 = \frac{V_2}{R+R_A}$	0.1	
	Формула (5): $R_{\mathrm{m2}} = \frac{V_2}{I_2} = R + R_A$	0.1	
	Формула (6): $\Delta_2 = \frac{R_A}{R}$	0.3	
1.2	Формула (7): $R_A = V/I$	0.5	**1.0**
	Формула (8): $R = R_{\mathrm{m2}} - R_A$	0.5	
2.1	Формула (9): $\varepsilon = (I_1+I_2)R_0 + I_1R_1 + (I_1 - I_M)R_3 = (R_0+R_1+R_3)I_1 + I_2R_0 - I_MR_3 = R_{013}I_1 + R_0I_2 - R_3I_M$	0.5	**3.0**

	Формула $\varepsilon = (I_1 + I_2)R_0 + I_2R_2 + (I_2 + I_M)R_4 = (R_0 + R_2 + R_4)I_2 + I_1R_0 + I_MR_4 = R_{024}I_2 + R_0I_1 + R_4I_M$ (10):	0.5	
	Формула $I_1 = \frac{\varepsilon R_{24} + I_M(R_0R_{34} + R_3R_{24})}{R_0R_{1234} + R_{13}R_{24}}$ (11):	0.5	
	Формула (12): $I_2 = \frac{\varepsilon R_{13} - I_M(R_0R_{34} + R_4R_{13})}{R_0R_{1234} + R_{13}R_{24}}$	0.5	
	Формуола (16): $V_{12} = \frac{I_AI_R}{I_A - I_R}R$	1.0	
3.1	Формула (17): $r + \frac{RX}{R+X} = X$	0.5	**1.0**
	Формула (19): $X = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2}$	0.5	
3.2	Формула (20): $I_{n-1} = I_n + I'_n$	0.2	**1.0**
	Формула (21): $rI_n + RI'_{n+1} - RI'_n = 0$	0.2	
	Формула $I'_{n+1} - I'_n = (I_n - I_{n+1}) - (I_{n-1} - I_n) = 2I_n - I_{n+1} - I_{n-1}$ (22):	0.3	
	Формула (23): $I_{n+1} - \left(2 + \frac{r}{R}\right) I_n + I_{n-1} = 0$	0.3	
3.3 1-ый метод	Формула (24): $I_1 = I_0\frac{R}{R+X}$	0.3	**1.5**
	Формула (25): $I_2 = I_1\frac{R}{R+X} = I_0\left(\frac{R}{R+X}\right)^2$	0.3	
	Формула (26): $I_n = I_0\left(\frac{R}{R+X}\right)^n$	0.3	
	Формула $I_n = I_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n = I_0k^n = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n}$ (27):	0.3	
	Формула $I'_n = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = I_0\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2n-1}$ (28):	0.3	
3.3 2-й метод	Формула (29): $I_{n+1} - 3I_n + I_{n-1} = 0$	0.2	**1.5**
	Формула (30): $\rho^2 - 3\rho + 1 = 0$	0.2	
	Формула (31): $\rho = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$	0.2	
	Формула (32): $I_n = A\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left.\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$	0.3	
	Формула (33): $I_n = I_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$	0.3	

	Формула $I'_n = I_{n-1} - I_n = I_0 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ (34):	0.3	
3.4 1-й метод	Формула (35): $\frac{I_{N-r}}{I_N} = F_{2r+2}$	0.7	**1.5**
	Формула (36): $\frac{I_n}{I_N} = F_{2(N-n)+2}$	0.8	
3.4 2-й метод	Формула (37): $A\rho_1^{N+1} + B\rho_2^{N+1} = 0$	0.5	**1.5**
	Формула (38): $I_n = A\left(\rho_1^n - \rho_2^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}\right)$	0.5	
	Формула (39): $\frac{I_n}{I_N} = \frac{\rho_1^n - \rho_2^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}}{\rho_1^N - \rho_2^N\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{N+1}} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_1^{n-N-1} - \rho_2^{n-N-1}\right]$	0.5	
3.4 Обоб-щение	Формула (40): $\rho_{2,1} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}$	0.3	**1.5**
	Формула (41): $b = 2 + \frac{r}{R}$	0.2	
	Формула (42): $\frac{I_n}{I_N} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_1^{n-N-1} - \rho_2^{n-N-1}\right]$	0.5	
	Формула (43): $= \frac{1}{\rho_2-\rho_1}\left[\rho_2^{N+1-n} - \rho_1^{N+1-n}\right]$	0.5	
Итого			**10,0**