Решение задач республиканской олимпиады по физике-2023
10 класс

Задача 1. «Солянка» (10,0 баллов)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (4,0 балла)

1. Для любого движения по круговой орбите будет справедливо равенство:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}} \quad (2)$$

Для Земли:

$$v_з = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{R_з}} \approx 29{,}8 \text{ км}/c \quad (3)$$

Для Сатурна:

$$v_с = \sqrt{G \cdot \frac{M_s}{R_с}} \approx 9{,}94 \text{ км}/c. \quad (4)$$

2. Для любого эллиптического движения справедливы следующие равенства энергии и момента импульса:

$$m \cdot \frac{v_1^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{R_1} = m \cdot \frac{v_2^2}{2} - G \cdot \frac{M \cdot m}{R_2} \quad (5)$$

$$m\, v_1\, R_2 = m\, v_2\, R_2 \quad (6)$$

$$\frac{v_1^2}{2} - G \cdot \frac{M}{R_1} = \frac{v_1^2}{2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - G \cdot \frac{M}{R_2} \quad (7)$$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = GM \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (8)$$

Выразим $\frac{R_1}{R_2} = \beta$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \beta^2) = G\frac{M}{R_1} \cdot \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right) \quad (9)$$

$$\frac{v_1^2}{2}(1 - \beta^2) = G\frac{M}{R_1} \cdot (1 - \beta) \quad (10)$$

$$v_1^2 = G\frac{M}{R_1} \cdot \frac{2}{1 + \beta} \quad (11)$$

R_1 является малой осью, которая в случае нашей задачи является круговой орбитой земли $R_з$

$$v_1 = v_з \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \beta}} \quad (12)$$

v_1 больше орбитальной скорости Земли $v_з$, поэтому начальное увеличение скорости для ракеты "Шу" является отрицательным и равно:

$$\Delta v_1 = v_з \left(\sqrt{\frac{2}{1+\beta}} - 1 \right) \approx 10{,}2 \text{ км}/c. \tag{13}$$

3. Теперь решим уравнения (5) и (6) относительно v_2 :

$$\frac{v_2^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}^2\right) = G\frac{M}{R_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \tag{14}$$

$$v_2^2 = G\frac{M}{R_2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{\beta}} \tag{15}$$

$$v_2 = v_c \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{\beta}}} \tag{16}$$

v_2 меньше орбитальной скорости Сатурна v_c, поэтому второе уменьшение скорости для ракеты "Шу" является положительным и равно:

$$\Delta v_2 = v_c \left(1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{\beta}}} \right) \approx 5{,}5 \text{ км/с} \tag{17}$$

4. По 3 закону Кеплера мы можем найти время орбитального перемещения ракеты "Шу":

$$\frac{T}{T_с} = \frac{1}{2}\left(\frac{(R_з + R_c)/2}{R_c}\right)^{1,5} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + 1}{2}\right)^{1,5} \tag{18}$$

Угол на который переместился Сатурн за это время:

$$\gamma = 2\pi \cdot \frac{T}{T_с} = \pi \cdot \left(\frac{\beta + 1}{2}\right)^{1,5} \tag{19}$$

Начальное угловое расстояние между Землей и Сатурном:

$$\alpha = \pi\left(1 - \left(\frac{\beta + 1}{2}\right)^{1,5}\right) \approx 0{,}59\pi \tag{20}$$

	Содержание	**Баллы**
1.	Формула (3) и численный ответ:	0,1
6	Формула (4) и численный ответ:	0,1
3.	Формула (5) :	0,4
4.	Формула (6):	0,4
5.	Формула (11):	0,25
6.	Формула (12):	0,25
7.	Формула (13):	0,25
8.	Численный ответ $\Delta v_1 \approx 10{,}2$ км/c.	0,25
9.	Формула (15):	0,25
10.	Формула (16):	0,25
11.	Формула (17):	0,25
12.	Численный ответ $\Delta v_2 \approx 5{,}5$ км/с	0,25
13.	Формула (18):	0,25
14.	Формула (19):	0,25
15.	Формула (20):	0,25
16.	Ответ $\alpha \approx 0{,}59\pi$	0,25
	Итого	**4,0**

Часть 1.2 Взаимодействие шара (3,0 балла)

В начальный момент времени на каждом из конденсаторов был заряд $Q_0 = C_0 U_0$. При раздвижении пластин одного из конденсаторов его емкость уменьшается в зависимости от времени как $C_1 = C_0 \frac{d_0}{d_0 + v\tau}$. Следовательно, заряд на нем станет $Q_1 < Q_0$. На втором конденсаторе заряд станет $Q_2 > Q_0$. Так как общий заряд всей системы не изменился, то

$$2Q_0 = Q_1 + Q_2 \qquad (1)$$

Так как $IR = \frac{dQ_1}{dt} R \propto \frac{Q_0 R}{t} \ll \frac{Q_0}{C_0}$, разность потенциалов на конденсаторах можно считать одинаковой и равной U_1.

При этом,

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \text{ и } U_1 = \frac{Q_2}{C_0} \qquad (2)$$

Тогда с учетом (1) и (2)

$$Q_1 = 2Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_0} = 2Q_0 \frac{d_0}{2d_0 + v\tau} \qquad (3)$$

Ток, протекший по сопротивлению R при раздвижении

$$I = \frac{dQ_1}{d\tau} = -\frac{2Q_0 v d_0}{(2d_0 + v\tau)^2} \qquad (4)$$

$$Q = \int_0^t I^2 R d\tau = \frac{(Q_0)^2 vR}{6d_0}[1 - \frac{1}{(1 + vt/2d_0)^3}] \qquad (5)$$

Изменение энергии

$$\Delta W = \frac{\left(2Q_0 \frac{d_0}{2d_0 + v\tau}\right)^2}{2C_0} + \frac{\left(2Q_0 \frac{d_0 + vt}{2d_0 + v\tau}\right)^2}{2C_0} - \frac{(Q_0)^2}{C_0} = 0 \qquad (6)$$

После раздвижения и сближения пластин одного из конденсаторов система приходит в первоначальное состояние. Следовательно, механическая работа определяется только потерями на джоулево тепло при прохождении тока по сопротивлению R.

Получим полную механическую энергию

$$A = 2Q = \frac{(Q_0)^2 vR}{3d_0}[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{vt}{2d_0}\right)^3}] = 6 \cdot 10^{-10}\text{Дж} \quad (7)$$

Содержание		Баллы
Формула (1): $2Q_0 = Q_1 + Q_2$		0,3
Приближение: $IR = \frac{dQ_1}{dt}R \propto \frac{Q_0 R}{t} \ll \frac{Q_0}{C_0}$		0,5
Формула (2): $U_1 = \frac{Q_1}{C_1}$ и $U_1 = \frac{Q_2}{C_0}$		0,2
Формула (3): $Q_1 = 2Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_0} = 2Q_0 \frac{d_0}{2d_0 + v\tau}$		0,5
Формула (4): $I = \frac{dQ_1}{d\tau} = -\frac{2Q_0 v d_0}{(2d_0 + v\tau)^2}$		0,2
Формула (5): $Q = \int_0^t I^2 R d\tau = \frac{(Q_0)^2 vR}{6d_0}[1 - \frac{1}{(1 + vt/2d_0)^3}]$		0,5
Формула (6): $\Delta W = \frac{\left(2Q_0 \frac{d_0}{2d_0 + v\tau}\right)^2}{2C_0} + \frac{\left(2Q_0 \frac{d_0 + vt}{2d_0 + v\tau}\right)^2}{2C_0} - \frac{(Q_0)^2}{C_0} = 0$		0,5
Формула (7): $A = 2Q = \frac{(Q_0)^2 vR}{\text{i}d_0}[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{vt}{2d_0}\right)^3}] = 6 \cdot 10^{-10}\text{Дж}$		0,3
Итого		**3,0**

Оценочное решение:

Вначале на каждом из конденсаторов был заряд $Q_0 = C_0 U_0$. При раздвижении пластин одного из конденсаторов его емкость уменьшается и при максимальном раздвижении становиться равной C_1. Следовательно, заряд на нем станет $Q_1 < Q_0$. На втором конденсаторе заряд станет $Q_2 > Q_0$. Так как общий заряд всей системы не изменился, то

$$2Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad (1)$$

Разность потенциалов на конденсаторах после раздвижения пластин одного из них установится одинаковой и равной U_1.

При этом,

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \text{ и } U_1 = \frac{Q_2}{C_0} \quad (2)$$

Тогда с учетом (1) и (2)

$$Q_1 = 2Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_0} \quad (3)$$

Ток, протекший по сопротивлению R при раздвижении

$$I = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{Q_0 - Q_1}{t} = \frac{Q_0}{t}\frac{(C_0 - C_1)}{(C_0 + C_1)} \quad (4)$$

Механическая работа при раздвижении пластин:

$$A_\text{р} = I^2 R t = \frac{(\Delta Q)^2}{t^2} R t = \frac{(\Delta Q)^2 R}{t} \quad (5)$$

Полная механическая энергия

$$A = A_\text{р} + A_c = 2\frac{(\Delta Q)^2 R}{t} = 2\frac{\left(\frac{Q_0(C_0 - C_1)}{(C_0 + C_1)}\right)^2 R}{t} \quad (6)$$

Емкость конденсаторов

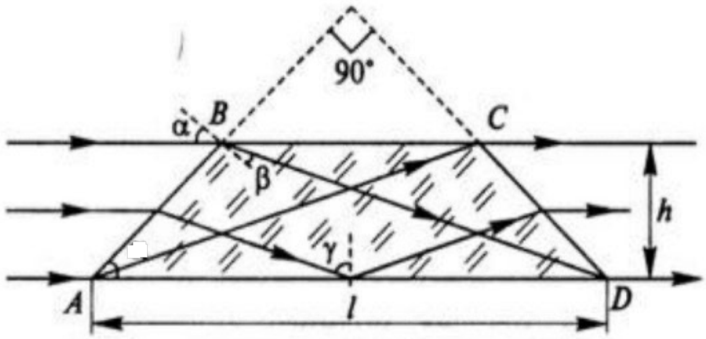
$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0} \text{ и } C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \quad (7)$$

С учетом (7) определим полную механическую энергию

$$A = \frac{2U_0^2\varepsilon_0^2S^2(d_1-d_0)^2R}{d_0^2(d_1+d_0)^2t} = 4{,}61\cdot 10^{-10}\text{Дж} \qquad (8)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $2Q_0 = Q_1 + Q_2$	0,3
Формула (2): $U_1 = \frac{Q_1}{C_1}$ и $U_1 = \frac{Q_2}{C_0}$	0,2
Формула (3): $Q_1 = 2Q_0\frac{C_1}{C_1+C_0}$	0,5
Формула (4): $I = \frac{\Delta Q}{t} = \frac{Q_0-Q_1}{t} = \frac{Q_0}{t}\frac{(C_0-C_1)}{(C_0+C_1)}$	0,5
Формула (5): $A_\text{р} = I^2Rt = \frac{(\Delta Q)^2}{t^2}Rt = \frac{(\Delta Q)^2R}{t}$	0,5
Формула (6): $A = A_\text{р} + A_c = 2\frac{(\Delta Q)^2R}{t} = 2\frac{\left(\frac{Q_0(C_0-C_1)}{(C_0+C_1)}\right)^2R}{t}$	0,5
Формула (7): $C_0 = \frac{\varepsilon_0S}{d_0}$ и $C_1 = \frac{\varepsilon_0S}{d_1}$	0,2
Формула (8): $A = \frac{2U_0^2\varepsilon_0^2S^2(d_1-d_0)^2R}{d_0^2(d_1+d_0)^2t} = 4{,}61\cdot 10^{-10}\text{Дж}$	0,3
Итого	**3,0**

Часть 1.3 Призма Дове (3,0 балла)



Сечение будет максимальным если луч из точки B идёт в точку D, а луч из точки A идёт в точку C. Чтобы свет не выходил из призмы должно выполняться следующее условие:

$$sin\alpha_\text{кр} = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Из уравнения Снеллиуса

$$sin\alpha_\text{кр} = n\sin\beta \qquad (2)$$

Итого, получаем

$$l = h(1 + 1/tg(\alpha-\beta)) \qquad (3)$$

Тогда $l = 10$ см.

Содержание	Баллы
За правильное утверждение о максимальном сечений	1,0
Формула (1): $sin\alpha_\text{кр} = \frac{1}{n}$	0,5
Формула (2): $sin\alpha_\text{кр} = n\sin\beta$	0,5
Формула (3): $l = h(1 + 1/tg(\alpha-\beta))$	0,5
Получен правильный численный ответ $l = 10$ см.	0,5
Итого	**3,0**

Задача_2. Тривиальная задача [10 баллов]

1) Для того чтобы система находилась в равновесии, силы действующие на каждый из объектов должны компенсировать друг-друга.

$$m{\omega_0}^2 r_0 = T \quad (1)$$

$$Mg \ = T \quad (2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mg}{mr_0}} \quad (3)$$

2)

Запишем Закон Сохранения Энергии для системы.

$$\frac{m(\omega^2 r^2 + r\prime^2)}{2} - Mg(L - r) + \frac{Mr\prime^2}{2} = E = const \quad (4)$$

Используя тот факт, что силы на поверхности центральные, записываем Закон Сохранения Момента Импульса.

$$\omega r^2 = \omega_0 {r_0}^2 \quad (5)$$

$$\omega = \frac{\omega_0 {r_0}^2}{r^2} \quad (6)$$

Объединяет уравнения (4) и (6).

$$\frac{m(\frac{{\omega_0}^2 {r_0}^4}{r^2} + r\prime^2)}{2} - Mg(L - r) + \frac{Mr\prime^2}{2} = const \quad (7)$$

Продифференцируем уравнение и поделим на dt.

$$\frac{m(\frac{-2{\omega_0}^2 {r_0}^4}{r^3} r\prime + 2r\prime r\prime\prime)}{2} + Mgr' + Mr'r'' = 0 \quad (8)$$

Сократив r' получим уравнение движения.

$$\frac{-m{\omega_0}^2 {r_0}^4}{r^3} + mr'' + Mg + Mr'' = 0 \quad (9)$$

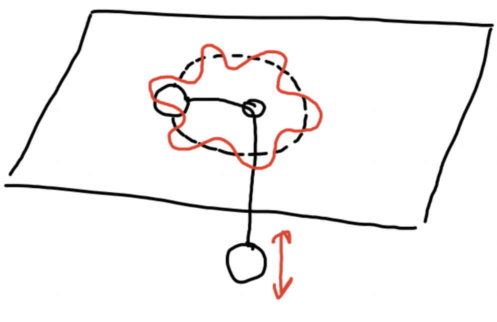
Используем малое отклонение для $r = r_0 + x(t)$ и приближение $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

$$-m{\omega_0}^2 r_0 * (1 - \frac{3x}{r_0}) + mx'' + Mg + Mx'' = 0 \quad (10)$$

$$3m{\omega_0}^2 x + (m + M)x'' = 0 \quad (11)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\boldsymbol{3m}}{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{M})}} * \boldsymbol{\omega_0} \quad (12)$$

3)



4)

$$y_M = Asin(\omega t + \varphi) \quad (13)$$

$$x_m = (r_0 + Asin(\omega t + \varphi)) * sin(\omega_0 t + \beta) \quad (14)$$

$$y_m = (r_0 + Asin(\omega t + \varphi)) * cos(\omega_0 t + \beta) \quad (15)$$

, где

$A -$ амплитуда малых колебаний

$\varphi -$ начальная фаза малых колебаний

$\beta -$ начальная фаза вращательного движения

5) Запишем Закон Сохранения Энергии для системы с учетом импульса Δp. Для начального положения и положения в самой дальней точке.

$$\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2}+\frac{\Delta p^2}{2M}=Mg(r-r_0)+\frac{m\omega^2r^2}{2} \qquad (16)$$

Записывает Закон Сохранения Момента Импульса.

$$\omega_0{r_0}^2=\omega r^2 \qquad (17)$$

Объединяет уравнения (16) и (17).

$$\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2}+\frac{\Delta p^2}{2M}=Mg(r-r_0)+\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^4}{2r^2} \qquad (18)$$

Использует условие $r \;>>\; r_0$ и пренебрегает последним членом в уравнении (18).

$$\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2}+\frac{\Delta p^2}{2M}\approx Mg(r-r_0) \qquad (19)$$

$$r=\frac{\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2}+\frac{\Delta p^2}{2M}+Mgr_0}{Mg} \qquad (20)$$

6) Сила тяжести нижнего шара притягивает к центру верхний груз. В отличие от гравитации, потенциальная энергия нижнего шарика будет расти одинаково вне зависимости от расстояния до лунки.

7) Из-за того, что нижний шарик испытывает вращение, он отклонится от вертикали на угол α. Используя равенство сил, получаем уравнения (21) и (24).

$$\frac{{\omega_0}^2((L-l)sin\alpha+r)}{g}=tg\alpha \qquad (21)$$

Верхнее уравнение не имеет аналитических решений. Поэтому рассмотрим небольшое отклонение от вертикали нижнего шарика. Тогда, уравнение (21) превращается в уравнение (22) с учетом, что $tg\alpha\approx sin\alpha\approx\alpha$.

$$(L-l)\alpha\;+\;r=\frac{g}{{\omega_0}^2}\alpha \qquad (22)$$

$$\alpha=\frac{r}{\frac{g}{{\omega_0}^2}-(L-l)} \qquad (23)$$

$$T=\frac{Mg}{cosa}=M{\omega_0}^2((L-l)+\frac{r}{sin\alpha}) \qquad (24)$$

Равновесие верхнего груза.

$$T=m{\omega_0}^2(r+l) \qquad (25)$$

$$m(r+l)=M((L-l)+\frac{r}{sin\alpha}) \qquad (26)$$

Используя уравнение (23), получаем

$$m(r+l)=M\frac{g}{{\omega_0}^2} \qquad (27)$$

$$l=\frac{Mg}{m{\omega_0}^2}-r \qquad (28)$$

Полная длина нити L не входит в ответ.

8) Длина веревки на столе должна быть положительна, иначе система не будет иметь решения.

$$\boldsymbol{l>0} \qquad (29)$$

Для того чтобы решение существовало должно выполняться неравенство ниже. Полная длина нити L не входит в ответ.

$$\frac{Mg}{m{\omega_0}^2}>\boldsymbol{r} \qquad (30)$$

9) Из-за отсутствия сил трения, центр масс системы должен остаться на месте. Считая, что верхний груз сместился на расстояние x, запишем уравнение положения центра масс.

$$(m+M)x-ml*sin\alpha=0 \qquad (31)$$

Взяв дважды производную по времени и использов приближение $sin\alpha\approx\alpha$, получаем

$$(m+M)x''+ml\alpha''=0 \qquad (32)$$

Запишем уравнение движение для нижнего груза в неинерциальной системе отсчета с учетом приближения $sin\alpha\approx\alpha$.

$ml\alpha'' = -mg\alpha - mx''$ (33)

Избавляясь от x'' путем подставления уравнения (31) в (32), получает

$l\alpha'' + g\alpha - \frac{m}{(m+M)} l\alpha'' = 0$ (34)

$\frac{(m+M)g}{Ml}\alpha + \alpha'' = 0$ (35)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml}{(m+M)g}}$ (36)

	Содержание	**Баллы**	
2.1	Формула (1): $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{Mr_0}}$	0.5	**0.5**
2.2	Формула (5): $\omega r^2 = \omega_0 {r_0}^2$	0.5	**2.25**
	Формула (6): $\omega = \frac{\omega_0 {r_0}^2}{r^2}$	0.25	
	Формула (8): $\frac{m(\frac{-2{\omega_0}^2{r_0}^4}{r^3}r\prime + 2r\prime r\prime\prime)}{2} + Mgr' + Mr'r'' = 0$	0.25	
	Формула (9): $\frac{-m{\omega_0}^2{r_0}^4}{r^3} + mr'' + Mg + Mr'' = 0$	0.5	
	Формула (11): $3m{\omega_0}^2 x + (m+M)x'' = 0$	0.5	
	Формула (12): $\omega = \sqrt{\frac{\mathbf{3m}}{\mathbf{(m+M)}}} * \boldsymbol{\omega_0}$	0.25	
2.3	Качественный рисунок верхнего	0.25	**0.5**
	Качественный рисунок нижнего	0.25	
2.4	Формула (13): $y_M = Asin(\omega t + \varphi)$	0.2	**1.0**
	Формула (14): $x_m = (r_0 + Asin(\omega t + \varphi)) * sin(\omega_0 t + \beta)$	0.4	
	Формула (15): $y_m = (r_0 + Asin(\omega t + \varphi)) * cos(\omega_0 t + \beta)$	0.4	
2.5	Формула (16): $\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2(m+M)} = Mg(r - r_0) + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$	0.5	**1.75**
	Формула (17): $\omega_0 {r_0}^2 = \omega r^2$	0.25	
	Формула (18): $\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2(m+M)} = Mg(r - r_0) + \frac{m{\omega_0}^2{r_0}^4}{2r^2}$	0.25	
	Формула (19): $\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2(m+M)} \approx Mg(r - r_0)$	0.5	

	Формула (20): $r = \frac{\frac{m{\omega_0}^2{r_0}^2}{2}+\frac{\Delta p^2}{2(m+M)}+Mgr_0}{Mg}$	0.25	
2.6	Сила тяжести не уменьшается с расстоянием	0.5	**0.5**
2.7	Формула (21): $\frac{{\omega_0}^2((L-l)sin\alpha + r)}{g} = tg\alpha$	0.25	**1.0**
	Формула (24): $T = \frac{Mg}{cos\alpha} = M{\omega_0}^2((L-l)+\frac{r}{sin\alpha})$	0.25	
	Формула (26): $m(r+l) = M((L-l)+\frac{r}{sin\alpha})$	0.25	
	Формула (28): $l = \frac{Mg}{m{\omega_0}^2} - r$	0.25	
2.8	Формула (29): $\boldsymbol{l > 0}$	0.25	**0.5**
	Формула (30): $\frac{Mg}{m{\omega_0}^2} > \boldsymbol{r}$	0.25	
2.9	Формула (32): $(m+M)x'' + ml\alpha'' = 0$	0.5	**2.0**
	Формула (33): $ml\alpha'' = -mg\alpha - mx''$	0.5	
	Формула (35): $\frac{(m+M)g}{Ml}\alpha + \alpha'' = 0$	0.5	
	Формула (36): $T = 2\pi\sqrt{\frac{Ml}{(m+M)g}}$	0.5	
Итого		**10.0**	

Задача 3. Звуковая линза (10,0 балла)

1. Так как звуковые колебания происходят с высокой частотой, они являются адиабатным процессом.
2. Из закона сохранения массы:

$\Delta(\rho V) = 0$ (1)

$V\Delta\rho + \rho\Delta V = 0 \rightarrow \Delta V = -\frac{V}{\rho}\Delta\rho$ (2)

Для адиабатного процесса:

$Q = \Delta U + A = 0$ (3)

$\Delta U = \frac{i}{2}nR\Delta T$ (4)

$A = P\Delta V$ (5)

$Q = \frac{i}{2}nR\Delta T + P\Delta V = \frac{i}{2}\Delta(PV) + P\Delta V = \frac{i+2}{2}P\Delta V + \frac{i}{2}V\Delta P = -\frac{i+2}{2}P\frac{V}{\rho}\Delta\rho + \frac{i}{2}V\Delta P = 0$

$\frac{\Delta P}{\Delta\rho} = \frac{i+2}{i}\frac{P}{\rho} = \gamma\frac{P}{\rho}$ (6)

$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$ (7)

$\frac{\Delta P}{\Delta\rho} = \frac{i+2}{i}\frac{P}{\rho} = \gamma\frac{RT}{M}$ (8)

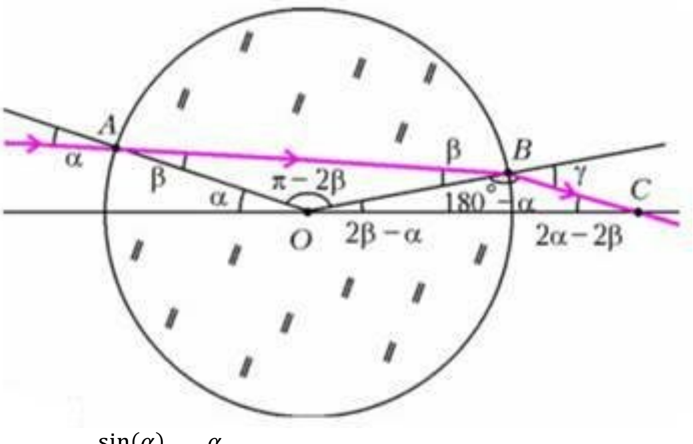
3. $M(air) = 0.22M(O_2) + 0.78M(N_2) = 29\ g/mol$ (9)

$v_{air} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 346\ m/s$ (10)

4. $v_{CO_2} = 274\ m/s, i = 6$ (11)

$v_{He} = 1015\frac{m}{s}, i = 3$ (12)

5. $n_{CO_2} = \frac{v_{air}}{v_{CO_2}} = 1.26$ (13)
6.



$n_{CO_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \approx \frac{\alpha}{\beta}$ (14)

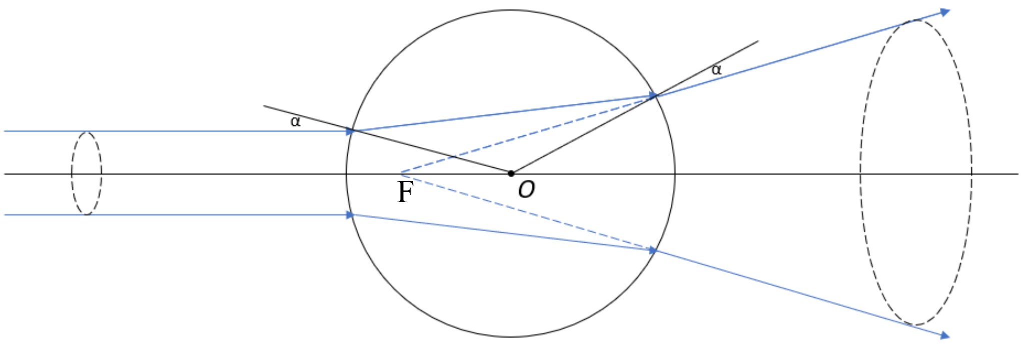
$F = R\sin(\alpha)/\sin(2\alpha - 2\beta) \approx \frac{R\alpha}{2\alpha-2\beta} \approx \frac{Rn_{CO_2}}{2(n_{CO_2}-1)}$ (15)

$$F_{CO_2} = 0.3 \times \frac{1.26}{0.52} = 0.73\ m$$

7. $n_{He} = \frac{v_{air}}{v_{CO_2}} = 0.34$, полученная линза будет рассеивающей
8. $F_{He} = |\frac{Rn_{He}}{2(n_{He}-1)}| = 7.7\ cm$ (16)

Заметим, что фокусное расстояние у нас получилось отрицательным.Это потому, что лучи фокусируются перед центром шара.

Чтобы оценить затихание звука, рассмотрим регион звука, который попадает на круглую область радиуса r перед шаром. После преломления от шара, лучи из этого региона разойдутся в направлении от фокуса. Тогда на расстоянии L от шара, этот звук рассеится по площади круга радиуса r’. Тогда затихание можно найти как:



$r = \alpha R, r' = 2(\beta - \alpha)(F_{He} + L)$

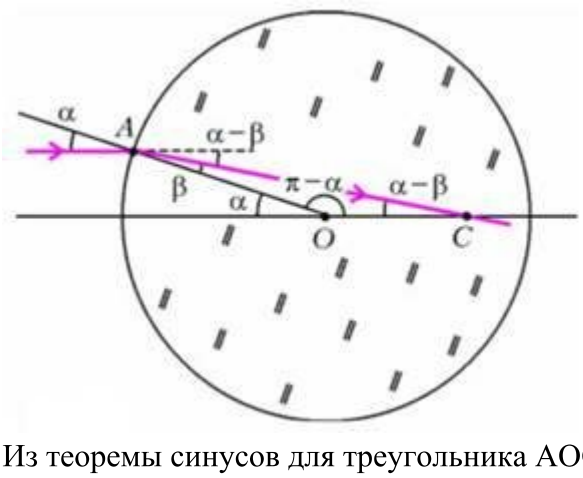
$\frac{I}{I'} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{2(1-n_{He})(F_{He}+L)}{R}\right)^2 = 4.7$ (17)

9. $10\log\left(\frac{I}{I'}\right) = 7\ dB$ (18)

10. $M(SF_6) = M(S) + 6M(F) = 146\ g/mol$ (19)

$n_{SF_6} = 2.3$ (20)

Заметим, что при показателе преломления 2.3 формула (15) даёт F<R, следователено, мы больше не можем ею пользоваться. Нужно вывести новую формулу для случая точки фокуса находящейся внутри шара.



Из теоремы синусов для треугольника АОС:

$\frac{R}{\alpha-\beta} = \frac{F}{\alpha} \rightarrow F = \frac{R}{n-1}$ (21)

Тогда $F_{SF_6} = 0.23\ m$

	Содержание	Баллы	
3.1	Выбран адиабатный процесс	0.5	**0.5**
3.2	Формула (1): $\Delta(\rho V) = 0$	0.3	**2.0**
	Формула (2): $\Delta V = -\frac{V}{\rho}\Delta\rho$	0.2	
	Формула (3): $Q = \Delta U + A = 0$	0.3	
	Формула (4): $\Delta U = \frac{i}{2} nR\Delta T$	0.2	
	Формула (5): $A = P\Delta V$	0.2	
	Формула (6): $\frac{\Delta P}{\Delta\rho} = \gamma\frac{P}{\rho}$	0.3	
	Формула (7): $\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$	0.2	
	Формула (8): $\frac{\Delta P}{\Delta\rho} = \frac{i+2}{i}\frac{P}{\rho} = \gamma\frac{RT}{M}$	0.3	
3.3	Формула (9): $M(air) = 0.22M(O_2) + 0.78M(N_2)$	0.2	**0.5**
	Численное значение в формуле (10): $v_{air} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 346\, m/s$	0.3	
3.4	Численное значение в формуле (11): $v_{CO_2} = 274\, m/s$	0.3	**0.6**
	Численное значение в формуле (12): $v_{He} = 1015\,\frac{m}{s}$	0.3	
3.5	Численное значение в формуле (13): $n_{CO_2} = \frac{v_{air}}{v_{CO_2}} = 1.26$	0.5	**0.5**
3.6	Формула (14): $n_{CO_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \approx \frac{\alpha}{\beta}$	0.3	**1.5**
	Формула (15): $F = R\sin(\alpha)/\sin(2\alpha - 2\beta) \approx \frac{R\alpha}{2\alpha-2\beta} \approx \frac{Rn_{CO_2}}{2(n_{CO_2}-1)}$	1.0	
	Численное значение в формуле (15): $F_{CO_2} = 0.3 \times \frac{1.26}{0.52} = 0.73\, m$	0.2	
3.7	Дано верное объяснение	1.0	**1.0**
3.8	Формула (16): $\lvert F_{He}\rvert = \frac{Rn_{He}}{2(n_{He}-1)}$	0.4	**1.9**
	Формула (17): $\frac{I}{I'} = \left(\frac{2(1-n_{He})(F_{He}+L)}{R}\right)^2 = 4.7$	1.5	
3.9	Формула (18): $10\log\left(\frac{I}{I'}\right) = 7\, dB$	0.5	**0.5**
3.10	Формула (19): $M(SF_6) = M(S) + 6M(F)$	0.2	**2.0**
	Численное значение в формуле (20): $n_{SF_6} = 2.3$	0.1	
	Формула (21): $F = \frac{R}{n-1}$	1.5	
	Численное значение в формуле (21): $F_{SF_6} = 0.23\, m$		
Итого			**10,0**