Решение задач республиканской олимпиады по физике-2022
11 класс
Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)
Эта задача состоит из трех независимых частей.
Часть 1.1 (4.0 балла)
В данной задаче для определения ускорения можно воспользоваться уравнениями второго закона Ньютона и вращательного движения, однако быстрее к ответу приводит закон сохранения энергии, который выполняется в силу отсутствия проскальзывания в системе.

Пусть v – скорость плиты, тогда в силу отсутствия проскальзывания цилиндров скорость их центра масс составляет

$$u = \frac{v}{2}. \quad (1)$$

Кинтическая энергия поступательного движения центра масс цилиндра равна

$$E_{tr} = \frac{1}{2}mu^2, \quad (2)$$

а кинетическая энергия вращательного движения записывается в виде

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (3)$$

где момент инерции однородного цилиндра радиуса R определяется выражением

$$I = \frac{1}{2}mR^2, \quad (4)$$

а угловая скорость вращения связана со скоростью движения центра масс формулой

$$\omega = \frac{u}{R}. \quad (5)$$

Таким образом, полная кинетическая энергия движения одного цилиндра равна

$$E_{tot} = E_{tr} + E_{rot} = \frac{3}{4}mu^2, \quad (6)$$

а полная кинетичяеская энергия всей системы принимает вид

$$E_s = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{3}{16}mv^2. \quad (7)$$

Пусть плита сместилась вдоль плоскости на расстояние S, тогда смещение s центров масс цилиндров составит в соответствии с (1)

$$s = \frac{S}{2}, \quad (8)$$

а, следовательно, изменение потенциальной энергии запишется в виде

$$E_p = MgS\sin\alpha + 2\frac{1}{2}mgS\sin\alpha. \quad (9)$$

По закону сохранения энергии имеем

$$E_s = E_p, \quad (10)$$

а так как при равноускоренном движении выполняется следующее соотношение

$$a = \frac{v^2}{2S}, \quad (11)$$

то отсюда получаем окончательный ответ

$$a = \frac{M+m}{M+\frac{3}{4}m}g\sin\alpha. \quad (12)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $u = \frac{v}{2}$	0.5
Формула (2): $E_{tr} = \frac{1}{2}mu^2$	0.2
Формула (3): $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$	0.2
Формула (4): $I = \frac{1}{2}mR^2$	0.2
Формула (5): $\omega = \frac{u}{R}$	0.3
Формула (6): $E_{tot} = \frac{3}{4}mu^2$	0.3

Формула (7): $E_s = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\frac{3}{16}mv^2$	0.5
Формула (8): $s = \frac{S}{2}$	0.3
Формула (9): $E_p = MgS\sin\alpha + 2\frac{1}{2}mgS\sin\alpha$	0.5
Формула (10): $E_s = E_p$	0.2
Формула (11): $a = \frac{v^2}{2S}$	0.3
Формула (12): $a = \frac{M+m}{M+\frac{3}{4}m}g\sin\alpha$	0.5
Итого	**4,0**

Часть 1.2 (4.0 балла)

Пусть $\vec{r}$ – суммарный радиус-вектор смещения космических лучей после N актов рассеяния, а $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots, \vec{r_N}$ – радиус-вектора смещения космических лучей между отдельными актами рассеяния. Очевидно, что справедливо соотношение

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \cdots + \vec{r_N}. \quad (1)$$

Формула (1) неудобна для определения смещения тем, что содержит вектора, поэтому возводя уравнение (1) в квадрат и учитывая тот факт, что направления смещений строго случайны, то есть различные попарные скалярные произведение $\vec{r_i} \cdot \vec{r_j}$ дадут вклады с разными знаками и в целом скомпенсируют друг друга, получаем

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots r_N^2, \quad (2)$$

Поскольку смещения между актами рассеяния одинаковы, получаем из (2)

$$r^2 = Nl^2. \quad (3)$$

Чтобы пересечь галактику смещение должно составить $r \approx L$, а для этого необходимо следующее число актов рассеяния

$$N = \frac{L^2}{l^2}. \quad (4)$$

Таким образом, путь, проходимый космическими лучами, составит

$$s = Nl, \quad (5)$$

а соответствующее время равно

$$t = \frac{s}{c}. \quad (6)$$

Собирая вместе формулы (4)-(6), окончательно находим

$$t = \frac{L^2}{cl} = 2.80 \cdot 10^{14}\text{с}. \quad (7)$$

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \cdots + \vec{r_N}$	0.3
Формула (2): $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots r_N^2$	0.6
Формула (3): $r^2 = Nl^2$	0.5
Формула (4): $N = \frac{L^2}{l^2}$	0.5
Формула (5): $s = Nl$	0.2
Формула (6): $t = \frac{s}{c}$	0.2
Формула (7): $t = \frac{L^2}{cl}$	0.5
Численное значение в формуле (7): $t = 2.80 \cdot 10^{14}$с.	0.2
Итого	**3.0**

Часть 1.3 (3.0 балла)

Известно, что формула тонкой собирающей линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad (1)$$

где d – расстояние от источника света до линзы, а f – расстояние от линзы до изображения.

Рассмотрим теперь случай, когда по одну стороны от линзы имеется жидкость с отличным от воздуха показателем преломления. Так как при построении изображений в тонких линзах рассматриваются малые углы, то это означает, что при входе в линзу соответствующие углы необходимо делить на показатель преломления, а значит тоже самое необходимо проделать и с расстоянием, поэтому в данном случае формула тонкой линзы перепишется в виде

$$\frac{n}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (2)$$

Тот факт, что луч света пересекает оптическую ось линзы на расстоянии h можно трактовать как наличие точечного источника на этой оси, причем

$$d=h. \qquad (3)$$

С другой стороны, так как некоторый луч проходит через линзу не преломляясь и тоже самое справедливо для луча вдоль оптической оси, то это означает, что изображением нашего источника является сам источник, то есть изображение мнимое с расстоянием до линзы

$$f=-h \qquad (4)$$

Совместно решая уравнения (2)-(4), окончательно получаем

$$n=1+\frac{h}{F}=1.44 \qquad (5)$$

Содержание		Баллы
Формула (1): $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$		0.3
Формула (2): $\frac{n}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$		0.5
Формула (3): $d=h$		0.5
Формула (4): $f=-h$		0.5
Формула (5): $n=1+\frac{h}{F}$		1.0
Численное значение в формуле (5): $n=1.44$		0.2
Итого		**3.0**

Задача 2. *U*-образная трубка (10.0 балла)

2.1 Воздух в правом колене контактирует с водой и поршнем, из условия равновесия которых следует, что начальное давление составляет

$$p_{in}=p_0. \qquad (1)$$

2.2 Уравнение состояния идеального газа можно записать в следующей форме

$$p_0V=\nu RT_0, \qquad (2)$$

в котором объем определяется выражением

$$V=Sl. \qquad (3)$$

Отсюда находим количество молей воздуха в правом колене

$$\nu=\frac{p_0Sl}{RT_0}=4.01\cdot 10^{-4}\text{ моль}. \qquad (4)$$

2.3 Пусть вода сместилась в трубке на величину y, а давление воздуха в правом колене стало равным p_{in}, тогда из условия равновесия воды получаем уравнение

$$p-p_{in}=2\rho gy. \qquad (5)$$

С другой стороны, условие равновесия поршня, подвешенного на пружине, дает

$$p-p_{in}=\frac{kx}{S}, \qquad (6)$$

а уравнение Менделеева-Клайперона для воздуха в правом колене записывается в виде

$$p_0l=p_{in}(l-x-y). \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (5)-(7), находим

$$x = \frac{pS}{2k} + \frac{\left[2k\rho gl - \sqrt{8kp_0\rho gl(k+2\rho gS) + \left(2p\rho gS + k(p-2\rho gl)\right)^2}\right]S}{2k(k+2\rho gS)} = 8.11 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (8)$$

2.4 Аналогично 2.3, условия равновесия воды записывается в виде

$$p_{in} - p_0 = 2\rho gy. \quad (9)$$

С другой стороны, условие равновесия поршня, подвешенного на пружине, дает

$$p_{in} - p_0 = \frac{kx}{S}, \quad (10)$$

а уравнение Менделеева-Клайперона для воздуха в правом колене выглядит так

$$\frac{p_0 l}{T_0} = \frac{p_{in}(l+x+y)}{T}. \quad (11)$$

Решая совместно уравнения (9)-(11), находим

$$x = \frac{\left[\sqrt{8kp_0\rho gl(k+2\rho gS)\frac{T}{T_0} + \left(2p\rho gS + k(p-2\rho gl)\right)^2} - 2k\rho gl\right]S}{2k(k+2\rho gS)} - \frac{p_0 S}{2k} = 6.64 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \quad (12)$$

2.5 При движении поршня в левом колене вода все время к нему примыкает, так как между ними отсутствует воздух. Аналогично 2.3, условия равновесия воды записывается в виде

$$p_{in} - p_0 = -\frac{F}{S} + 2\rho gy. \quad (13)$$

С другой стороны, условие равновесия поршня, подвешенного на пружине, дает

$$p_{in} - p_0 = \frac{kx}{S}, \quad (14)$$

а уравнение для воздуха в правом колене записывается в виде

$$p_0\left(\frac{l^\gamma}{\left(l - \frac{2\rho gyS}{k} + \frac{F}{k} + y\right)^\gamma} - 1\right) = 2\rho gy - \frac{F}{S}. \quad (15)$$

Решая совместно уравнения (13)-(15), находим численный ответ

$$F \approx 47.58 \text{ Н.} \quad (16)$$

2.6 Согласно первому началу термодинамики количество сообщенного тепла δQ связано с изменением внутренней энергии dU идеального газа соотношением

$$\delta Q = dU + pdV. \quad (17)$$

По определению, молярная теплоемкость вычисляется согласно следующему выражению

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}, \quad (18)$$

в котором теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{5}{2}R. \quad (19)$$

Из уравнения состояния идеального газа следует, что

$$pdV + Vdp = \nu RdT, \quad (20)$$

откуда теплоемкость вычисляется по формуле

$$C = C_V + R - \frac{V}{\nu}\frac{dp}{dT}. \quad (21)$$

Из формул (9)-(11) следует, что давление в правом колене при температурах $T \approx T_0$ изменяется по закону

$$p(T) \approx p_0 + \frac{2kp_0\rho gl}{T_0(kp_0 + 2k\rho gl + 2p_0\rho gS)}(T - T_0), \quad (22)$$

а значит молярная теплоемкость газа равна

$$C = \frac{7}{2}R - \frac{2k\rho gl}{kp_0 + 2k\rho gl + 2p_0\rho gS}R = 24.6 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К.} \quad (23)$$

2.7 Пусть левый поршень отклонился вверх на малую величину y, тогда условие равновесия правого поршня дает

$$p_0 - p_{in} = \frac{kx}{S}, \quad (24)$$

а так как отсутствует теплообмен воздуха в правом колене с окружающей средой, то выполняется следующее уравнение адиабаты

$$p_0 l^\gamma = p_{in}(l - x + y)^\gamma. \quad (25)$$

При малых колебаниях выполняется условие $(p_{in} - p_0)/p_0 \ll 1$ и $x, y \ll l$, поэтому из соотношений (24) и (25) следует

$$p_{in} - p_0 = -\frac{\gamma p_0}{l(1+\gamma p_0 S/kl)} y. \qquad (26)$$

Так как вода представляет собой идеальную жидкость, то уравнение ее движения принимает вид

$$\rho S L \ddot{y} = 2\rho g S y + (p_0 - p_{in}) S, \qquad (27)$$

откуда следует уравнение малых колебаний $\ddot{y} = \omega_0^2 y$ с частотой колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L} + \frac{\gamma k p_0}{\rho L(kl + \gamma p_0 S)}} = 5.41 \text{ с}^{-1}. \qquad (28)$$

2.8 Перейдем в систему отсчета, связанную с подставкой. Очевидно, что эта система отсчета является неинерциальной, причем в ней можно ввести эффективное ускорение свободного падения

$$g_{\text{eff}}(t) = g + \omega^2 A \cos \omega t. \qquad (29)$$

Заметим, что знак в выражении (29), так же, как и начальная фаза, не имеет никакого значения, так как определяется началом отсчета времени.

Подставляя выражение для эффективного ускорения свободного падения в формулу (28), уравнение колебаний жидкости в трубке приобретает вид $\ddot{y} = \omega^2(t) y$, в котором частота определяется как

$$\omega^2(t) = \frac{2g_{\text{eff}}(t)}{L} + \frac{\gamma k p_0}{\rho L(kl + \gamma p_0 S)}. \qquad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) следует, что

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2\omega^2 A}{\omega_0^2 L} \cos \omega t\right), \qquad (31)$$

то есть в нашей системе

$$h = \frac{2\omega^2 A}{\omega_0^2 L}. \qquad (32)$$

Согласно условию, параметрический резонанс эффективно возбуждается при частоте

$$\omega \approx 2\omega_0, \qquad (33)$$

и из условия $h < 0.1$ следует, что амплитуда колебаний должна составлять

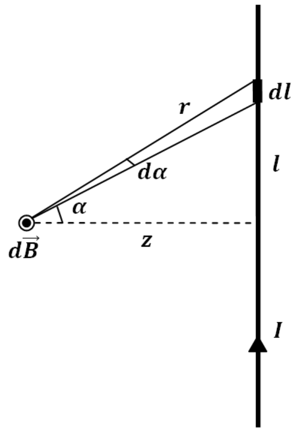
$$A \approx \frac{1}{40} L = 2.50 \text{ см}. \qquad (34)$$

	Содержание	**Баллы**	
2.1	Формула (1): $p_{in} = p_0$	0.2	**0.2**
2.2	Формула (2): $p_0 V = \nu R T_0$	0.2	**0.8**
	Формула (3): $V = Sl$	0.2	
	Формула (4): $\nu = \frac{p_0 S l}{R T_0}$	0.2	
	Численное значение в формуле (4): $\nu = 4.01 \cdot 10^{-4}$ моль	0.2	
2.3	Формула (5): $p - p_{in} = 2\rho g y$	0.2	**1.0**
	Формула (6): $p - p_{in} = \frac{kx}{S}$	0.2	
	Формула (7): $p_0 l = p_{in}(l - x - y)$	0.2	
	Формула (8): $x = \frac{pS}{2k} + \frac{\left[2k\rho g l - \sqrt{8kp_0\rho g l(k+2\rho g S) + \left(2p\rho g S + k(p - 2\rho g l)\right)^2}\right] S}{2k(k+2\rho g S)}$	0.2	
	Численное значение в формуле (8): $x = 8.11 \cdot 10^{-3}$ м	0.2	
2.4	Формула (9): $p_{in} - p_0 = 2\rho g y$	0.2	**1.0**
	Формула (10): $p_0 - p_{in} = \frac{kx}{S}$	0.2	
	Формула (11): $\frac{p_0 l}{T_0} = \frac{p_{in}(l + x + y)}{T}$	0.2	

	Формула (12): $x = \frac{\left[\sqrt{8kp_0\rho gl(k+2\rho gS)\frac{T}{T_0}+\left(2p\rho gS+k(p-2\rho gl)\right)^2}-2k\rho gl\right]S}{2k(k+2\rho gS)} - \frac{p_0S}{2k}$	0.2	
	Численное значение в формуле (12): $x = 6.64 \cdot 10^{-3}$ м.	0.2	
2.5	Формула (13): $p_{in} - p_0 = -\frac{F}{S} + 2\rho gy$	0.2	**1.0**
	Формула (14): $p_{in} - p_0 = \frac{kx}{S}$	0.2	
	Формула (15): $p_0\left(\frac{l^\gamma}{\left(l-\frac{2\rho gyS}{k}+\frac{F}{k}+y\right)^\gamma} - 1\right) = 2\rho gy - \frac{F}{S}$	0.2	
	Формула (16): $F \approx 47.58$ Н	0.2	
	Численное значение в формуле (16): $F = 45.9$ Н.	0.2	
2.6	Формула (17): $\delta Q = dU + pdV$	0.3	**2.3**
	Формула (18): $C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}$	0.3	
	Формула (19): $C_V = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{5}{2}R$	0.3	
	Формула (20): $pdV + Vdp = \nu RdT$	0.2	
	Формула (21): $C = C_V + R - \frac{V}{\nu}\frac{dp}{dT}$	0.3	
	Формула (22): $p(T) \approx p_0 + \frac{2kp_0\rho gl}{T_0(kp_0+2k\rho gl+2p_0\rho gS)}(T - T_0)$	0.3	
	Формула (23): $C = \frac{7}{2}R - \frac{2k\rho gl}{kp_0+2k\rho gl+2p_0\rho gS}R$	0.3	
	Численное значение в формуле (23): $C = 24.6$ Дж/моль · К	0.3	
2.7	Формула (24): $p_0 - p_{in} = \frac{kx}{S}$	0.2	**1.7**
	Формула (25): $p_0 l^\gamma = p_{in}(l - x + y)^\gamma$	0.3	
	Формула (26): $p_{in} - p_0 = -\frac{\gamma p_0}{l(1+\gamma p_0 S/kl)}y$	0.3	
	Формула (27): $\rho SL\ddot{y} = 2\rho gSy + (p_0 - p_{in})S$	0.3	
	Формула (28): $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L} + \frac{\gamma kp_0}{\rho L(kl+\gamma p_0 S)}}$	0.3	
	Численное значение в формуле (28): $\omega_0 = 5.41$ с$^{-1}$	0.3	
2.8	Формула (29): $g_{\text{eff}}(t) = g + \omega^2 A\cos\omega t$	0.3	**2.0**
	Формула (30): $\omega^2(t) = \frac{2g_{\text{eff}}(t)}{L} + \frac{\gamma kp_0}{\rho L(kl+\gamma p_0 S)}$	0.3	
	Формула (31): $\omega^2(t) = \omega_0^2\left(1 + \frac{2\omega^2 A}{\omega_0^2 L}\cos\omega t\right)$	0.3	
	Формула (32): $h = \frac{2\omega^2 A}{\omega_0^2 L}$	0.3	
	Формула (33): $\omega \approx 2\omega_0$	0.3	
	Формула (34): $A \approx \frac{1}{40}L$	0.3	
	Численное значение в формуле (34): $A = 2.50$ см	0.1	
Итого			**10,0**

Задача 3. Магнитное поле и катушка индуктивности (10.0 балла)

3.1 Рассмотрим элемент тока, расположенный по угловым координатам в пределах от α до $\alpha + d\alpha$.



Из геометрических соображений следует (смотрите рисунок), что

$$\frac{l}{z} = \tan\alpha, \tag{1}$$

а значит длина элемента тока составляет

$$dl = \frac{z d\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{2}$$

тогда как расстояние до точки наблюдения равно

$$r = \frac{z}{\cos\alpha}. \tag{3}$$

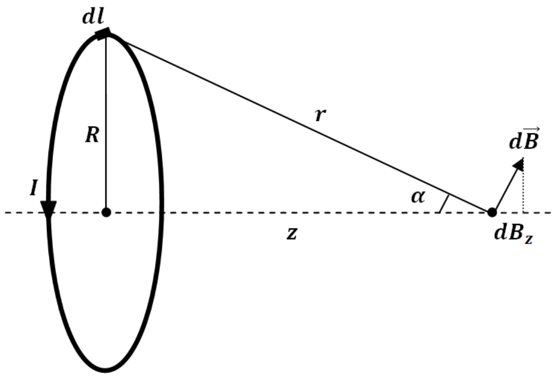
Из закона Био-Савара-Лапласа получаем, что элемент тока создает в точке наблюдения магнитную индукцию

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2}, \tag{4}$$

а так как направления магнитных индукций всех элементов проводника совпадают, то полная магнитная индукция определяется выражением

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} = 2.00 \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}. \tag{5}$$

3.2 Рассмотрим элемент дуги окружности $d\vec{l}$ и рассчитаем его магнитную индукцию.



Из геометрических соображений следует, что

$$r^2 = R^2 + z^2, \tag{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}. \tag{7}$$

Из закона Био-Савара-Лапласа получаем, что элемент тока создает в точке наблюдения магнитную индукцию

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}. \tag{8}$$

В данном случае направления магнитных индукций различных элементов тока отличаются, и при суммировании остается только составляющая вдоль оси кругового витка, которая равна

$$dB_z = dB\sin\alpha. \tag{9}$$

При суммировании оказывается, что все элементы кругового витка дают одинаковый вклад, а так как длина окружности составляет

$$l = 2\pi R, \tag{10}$$

то отсюда следует окончательный ответ

$$B = \int dB_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} = 2.22 \cdot 10^{-7}\ \text{Тл}. \tag{11}$$

3.3 Рассмотрим витки катушки, расположенные от торца на расстоянии от y до $y + dy$. Суммарная сила тока, которая протекает по этим виткам, равна

$$dI = nIdy. \tag{12}$$

Витки можно рассматривать как круговой контур и воспользоваться формулой (11), что приводит к результату

$$dB = \frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2+(y-z)^2)^{3/2}} dy. \tag{13}$$

Интегрируя формулу (13) по всей катушке, окончательно получаем

$$B = \int_0^L dB = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2+(L-z)^2}}\right). \tag{14}$$

3.4 Магнитное поле будет иметь составляющую вдоль оси катушки $B(z)$, которая примерно определяется формулой (14), так как $r/R \ll 1$. Помимо этого, у магнитного поля будет радиальная составляющая B_r, направленная вдоль от оси катушки к ее поверхности (или наоборот для другого торца).

Для нахождения радиальной составляющей магнитного поля воспользуемся тем фактом, что магнитные линии являются замкнутыми, то есть их поток через любой замкнутый объем обращается в ноль. Для этого рассмотрим очень тонкий цилиндр толщиной dz и радиуса r с торцами, перпендикулярными оси катушки, тогда изменение потока через торцы равно потоку через боковую поверхность, то есть

$$B(z+dz)\pi r^2 - B(z+dz)\pi r^2 = B_r 2\pi r dz. \tag{15}$$

Воспользуемся тем, что цилиндр очень тонкий и для магнитной индукции справедливо разложение

$$B(z+dz) = B(z) + \frac{dB}{dz} dz, \tag{16}$$

которое при подстановке в формулу (15) дает

$$B_r = \frac{r}{2}\frac{dB}{dz}. \tag{17}$$

Используя выражение (14) при $z = 0$ (или $z = L$), находим радиальную составляющую магнитной индукции

$$B_r = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{r}{2R}\left(1 - \frac{R^3}{(L^2+R^2)^{3/2}}\right). \tag{18}$$

Вдоль оси поле определяется формулой (14) при $z = 0$ (или $z = L$), что дает

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}. \tag{19}$$

Угол наклона силовых линий магнитного поля к оси катушки определяется выражением

$$\alpha = \arctan\frac{B_r}{B} = \arctan\left(\frac{r}{2R}\left[1 + \frac{R^2}{L^2}\right]^{1/2}\left[1 - \left(1 + \frac{L^2}{R^2}\right)^{-3/2}\right]\right) = 2.87° . \tag{20}$$

3.5 Из формулы (14) следует, что индукция в центре соленоида составляет

$$B = \mu_0 n I \frac{L}{\sqrt{4R^2+L^2}}, \tag{21}$$

а значит при $L \to \infty$ получаем

$$B = \mu_0 n I = 1.26 \cdot 10^{-3}\ \text{Тл}. \tag{22}$$

3.6 Магнитный поток через один виток катушки равен произведению магнитной индукции (22) на площадь поперечного сечения

$$\Phi_0 = \mu_0 n I \pi R^2. \tag{23}$$

Число витков в катушке равно

$$N = nL, \tag{24}$$

а индуктивность катушки определяется как отношение полного потока через все витки к величине силы тока, то есть

$$L_0 = \frac{N\Phi_0}{I} = \mu_0 n^2 \pi R^2 L = 3.95 \cdot 10^{-5}\ \text{Гн}. \qquad (25)$$

3.7 Полный магнитный поток через катушку складывается из потока внешнего магнитного поля с проекцией на ось B_z и собственного магнитного поля катушки

$$\Phi = B_z n L \pi R^2 + L_0 I. \qquad (26)$$

По закону Фарадея при вращении катушки в цепи появляется э.д.с. индукции, равная

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (27)$$

причем по закону Ома

$$\mathcal{E} = IR_0. \qquad (28)$$

Сила тока в цепи связана с протекающим зарядом соотношением

$$I = \frac{dq}{dt}, \qquad (29)$$

откуда, собирая вместе (26)-(29), получаем

$$nL\pi R^2 dB_z + L_0 dI = -R_0 dq. \qquad (30)$$

Интегрируя (30) с учетом того, что начальная проекция магнитного поля в катушке изменяется от B_0 до нуля, ток в катушке остается нулевым до начала поворота и после него, окончательно получаем

$$Q = \frac{nL\pi R^2 B_0}{R_0} = 3.14 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}. \qquad (31)$$

3.8 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока, определяется произведением действующих значений напряжения и силы тока, а также косинусом сдвига фаз между током и напряжением

$$P = UI\cos\varphi. \qquad (32)$$

Из законов для цепей переменного тока следует, что

$$I = \frac{U}{Z}, \qquad (33)$$

$$\cos\varphi = \frac{R_x}{Z}, \qquad (34)$$

$$Z = \sqrt{R_x^2 + \omega^2 L_0^2}. \qquad (35)$$

Подставляя (33)-(35) в (32), получаем выражение

$$P = \frac{U^2 R_x}{(R_x^2 + \omega^2 L_0^2)}, \qquad (36)$$

которое принимает максимальное значение при

$$R_x = \omega L_0 = 1.24 \cdot 10^{-2}\ \text{Ом}. \qquad (37)$$

3.9 Втягивание сердечника внутрь катушки приводит к тому, что с течением времени меняется индуктивность катушки, поэтому закон Фарадея (27) в данном случае записывается в виде

$$U = L_x \frac{dI}{dt} + I\frac{dL_x}{dt}, \qquad (39)$$

где U – напряжение источника.

В нулевой момент времени и вплоть до $t_0 = 10^{-5}$с сила тока возрастает линейно, что фактически означает что сердечник еще не успевает втянуться внутрь, поэтому пренебрегая вторым членом в уравнении (39), получим уравнение

$$U = L_0 \frac{dI}{dt}, \qquad (40)$$

из которого следует

$$L_0 = \frac{Ut_0}{I_0}, \qquad (41)$$

где $I_0 = 10$ А, L_0 – индуктивность катушки без сердечника.

Пусть сердечник втянулся в катушку на длину l, тогда при полной длине катушки L ее индуктивность L_x определяется выражением

$$L_x = \frac{\mu l}{L} L_0 + \frac{(L-l)}{L} L_0, \qquad (42)$$

производная которого равна

$$\frac{dL_x}{dt} = L_0 \frac{(\mu - 1)}{L}\frac{dl}{dt} = const. \qquad (43)$$

Действительно, на горизонтальном участке зависимости тока от времени производная равна нулю, поэтому первый член в выражении (39) выпадает, а так как напряжение тоже постоянно, то значит и производная индуктивности по времени тоже постоянна. Это означает, что сердечник втягивается внутрь с постоянной скоростью, а время его втягивания определяется формулой

$$t_x = \frac{L}{\frac{dl}{dt}}, \tag{44}$$

которая приводит к окончательному ответу

$$t_x = (\mu - 1)t_0 \approx \mu t_0 = 1.88 \cdot 10^{-2} \text{ с.} \tag{45}$$

	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $\frac{l}{z} = \tan\alpha$	0.1	**0.6**
	Формула (2): $dl = \frac{z d\alpha}{\cos^2\alpha}$	0.1	
	Формула (3): $z = r\cos\alpha$	0.1	
	Формула (4): $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2}$	0.1	
	Формула (5): $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}$	0.1	
	Численное значение формулы (5): $B = 2.00 \cdot 10^{-7}$ Тл	0.1	
3.2	Формула (6): $r^2 = R^2 + z^2$	0.1	**0.7**
	Формула (7): $\sin\alpha = \frac{R}{r}$	0.1	
	Формула (8): $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$	0.1	
	Формула (9): $dB_z = dB\sin\alpha$	0.1	
	Формула (10): $l = 2\pi R$	0.1	
	Формула (11): $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$	0.1	
	Численное значение формулы (11): $B = 2.22 \cdot 10^{-7}$ Тл	0.1	
3.3	Формула (12): $dI = nIdy$	0.3	**0.9**
	Формула (13: $dB = \frac{\mu_0 n I R^2}{2(R^2+(y-z)^2)^{3/2}}dy$	0.2	
	Формула (14): $B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2+(L-z)^2}}\right)$	0.4	
3.4	Формула (15): $B(z+dz)\pi r^2 - B(z+dz)\pi r^2 = B_r 2\pi r dz$	0.3	**1.6**
	Формула (16): $B(z+dz) = B(z) + \frac{dB}{dz}dz$	0.2	
	Формула (17): $B_r = \frac{r}{2}\frac{dB}{dz}$	0.3	
	Формула (18): $B_r = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{r}{2R}\left(1 - \frac{R^3}{(L^2+R^2)^{3/2}}\right)$	0.2	
	Формула (19): $B = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}$	0.1	
	Формула (20): $\alpha = \arctan\left(\frac{r}{2R}\left[1+\frac{R^2}{L^2}\right]^{1/2}\left[1-\left(1+\frac{L^2}{R^2}\right)^{-3/2}\right]\right)$	0.3	
	Численное значение в формуле (20): $\alpha = 2.87°$	0.2	
3.5	Формула (22): $B = \mu_0 n I$	0.2	**0.4**
	Численное значение в формуле (22): $B = 1.26 \cdot 10^{-3}$ Тл	0.2	
3.6	Формула (23): $\Phi_0 = \mu_0 n I \pi R^2$	0.2	**0.8**
	Формула (24): $N = nL$	0.2	
	Формула (25): $L_0 = \mu_0 n^2 \pi R^2 L$	0.2	
	Численное значение в формуле (25): $L_0 = 3.95 \cdot 10^{-5}$ Гн	0.2	
3.7	Формула (26): $\Phi = B_z n L \pi R^2 + L_0 I$.	0.2	**1.4**

	Формула (27): $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$	0.2	
	Формула (28): $\mathcal{E} = IR_0$	0.2	
	Формула (29): $I = \frac{dq}{dt}$	0.2	
	Формула (30): $nL\pi R^2 dB_z + L_0 dI = -R_0 dq$	0.2	
	Формула (31): $Q = \frac{nL\pi R^2 B_0}{R_0}$	0.2	
	Численное значение в формуле (31): $Q = 3.14 \cdot 10^{-8}$ Кл	0.2	
3.8	Формула (32): $P = UI\cos\varphi$	0.2	**1.4**
	Формула (33): $I = \frac{U}{Z}$	0.2	
	Формула (34): $\cos\varphi = \frac{R_x}{Z}$	0.2	
	Формула (35): $Z = \sqrt{R_x^2 + \omega^2 L_0^2}$	0.2	
	Формула (36): $P = \frac{U^2 R_x}{(R_x^2+\omega^2 L_0^2)}$	0.2	
	Формула (37): $R_x = \omega L_0$	0.2	
	Численное значение в формуле (37): $R_x = 1.24 \cdot 10^{-2}$ Ом	0.2	
3.9	Формула (39): $U = L_x \frac{dI}{dt} + I\frac{dL_x}{dt}$	0.3	**2.2**
	Формула (40): $U = L_0 \frac{dI}{dt}$	0.3	
	Формула (41): $L_0 = \frac{Ut_0}{I_0}$	0.2	
	Формула (42): $L_x = \frac{\mu l}{L} L_0 + \frac{(L-l)}{L} L_0$	0.3	
	Формула (43): $\frac{dL_x}{dt} = L_0 \frac{(\mu-1)}{L}\frac{dl}{dt} = const$	0.3	
	Формула (44): $t_x = \frac{L}{\frac{dl}{dt}}$	0.2	
	Формула (45): $t_x = (\mu - 1)t_0 \approx \mu t_0$	0.5	
	Численное значение в формуле (45): $t_x = 1.88 \cdot 10^{-2}$с	0.1	
Итого			**10,0**