Решение теоретического тура республиканской олимпиады по физике
9 класс

Задача_1. Скорость ветра в системе отсчета, связанной с буером, определяется законом сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}. \quad (1)$$

Соответственно, проекция уравнения (1) на нормальное направление имеет вид

$$v_n = v_{0n} - u_n, \quad (2)$$

в котором нормальные составляющие скоростей равны

$$v_{0n} = v_0 \cos\varphi, \quad (3)$$

$$u_n = u \sin\varphi. \quad (4)$$

Так как буер способен двигаться только в том направлении, в котором направлены его коньки, то проекция разгоняющей силы ветра на это направление равна

$$F = \alpha v_n^2 \sin\varphi, \quad (5)$$

а при установившейся скорости буера сумма действующих на него сил должна быть равна нулю, поэтому

$$F = F_0. \quad (6)$$

Из уравнений (2)-(6) находим установившуюся скорость буера

$$u = v_0 \operatorname{ctg}\varphi - \sqrt{\frac{F_0}{\alpha \sin^3\varphi}}. \quad (7)$$

Следует отметить, что для начала движения буера необходимо некоторая критическая скорость ветра, иначе выражение в правой части (7) может давать отрицательные значения. В этом случае сила трения не достигает своего максимального значения и буер покоится, то есть

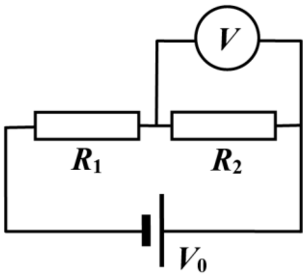
$$u = 0, \text{ если } v_0 < \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{F_0}{\alpha \sin\varphi}}. \quad (8)$$

Из уравнения (7) заключаем, что максимальная скорость буера при всех возможных значениях параметра α определяется выражением

$$u = v_0 \operatorname{ctg}\varphi \text{ при } \alpha \to \infty. \quad (9)$$

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{u}$	0,6
Формула (2): $v_n = v_{0n} - u_n$	0,6
Формула (3): $v_{0n} = v_0 \cos\varphi$	0,6
Формула (4): $u_n = u \sin\varphi$	0,6
Формула (5): $F = \alpha v_n^2 \sin\varphi$	0,6
Формула (6): $F = F_0$	0,6
Формула (7): $u = v_0 \operatorname{ctg}\varphi - \sqrt{\frac{F_0}{\alpha \sin^3\varphi}}$	1,0
Формула (8): $u = 0$, если $v_0 < \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{F_0}{\alpha \sin\varphi}}$	0,6
Формула (9): $u = v_0 \operatorname{ctg}\varphi$ при $\alpha \to \infty$	0,8
Итого	**6,0**

Задача_2. Эквивалентная схема представленного в условии подключения имеет вид.



При этом сопротивления пропорциональны длинам, так что

$R_1 = \alpha R_0, R_2 = (1-\alpha)R_0$. (1)

Из графика можно заключить, что необходимо учитывать внутреннее сопротивление батареи, то есть

$r \neq 0$, так как $V_0/V \neq 1$ при $\alpha = 0$. (2)

Полное сопротивление цепи легко находится и имеет вид

$R = r + R_1 + \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$, (3)

а значит полный ток в цепи по закону Ома равен

$I = \frac{V_0}{R}$. (4)

Вольтметр показывает падение напряжения на нем самом, поэтому его показания определяются выражением

$V = I\frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$. (5)

Комбинируя выражения (1)-(5), перепишем отношение напряжений в виде

$\frac{V_0}{V} = 1 + \left(\frac{r}{R_0} + \alpha\right)\left(\frac{R_0}{R_V} + \frac{1}{1-\alpha}\right)$. (6)

Зависимость (6) включает в себя два параметра r/R_0 и R_0/R_V, поэтому для их восстановления необходимо использовать две точки из графика, причем получения для более точного численного значения эти точки должны отстоять друг от друга на большое расстояние по величине α. Первой естественной точкой является

$\alpha = 0, \frac{V}{V_0} = 0.52$, (7)

а второй удобно выбрать

$\alpha = 0.7, \frac{V}{V_0} = 0.1$. (8)

При подстановке (7) и (8) в уравнение (6) получаем систему уравнений, которая сводится к квадратному уравнению, только одно из решений которого является положительным

$\frac{R_0}{R_V} \approx 7.86$, (9)

откуда определяем искомое сопротивление вольтметра

$R_V = 2.55$ кОм. (10)

Содержание	**Баллы**
Построена правильная эквивалентная схема	0,6
Формула (1): $R_1 = \alpha R_0, R_2 = (1-\alpha)R_0$	0,6
Заключение (2): $r \neq 0$, так как $V_0/V \neq 1$ при $\alpha = 0$	0,6
Формула (3): $R = r + R_1 + \frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$	0,6
Формула (4): $I = \frac{V_0}{R}$	0,6
Формула (5): $V = I\frac{R_2 R_V}{R_2 + R_V}$	0,6

Формула (6): $\frac{V_0}{V} = 1 + \left(\frac{r}{R_0} + \alpha\right)\left(\frac{R_0}{R_V} + \frac{1}{1-\alpha}\right)$	0,6
Точка (7): $\alpha = 0, \frac{V}{V_0} = 0.52$	0,6
Точка (8): $\alpha = 0.7, \frac{V}{V_0} = 0.1$	0,6
Формула (9): $\frac{R_0}{R_V} \approx 7.86$	1,0
Численное значение (10): $R_V = 2.55$ кОм	0,6
Итого	**7,0**

Задача_3. Масса пластинки равна

$$m = \rho_m a^2 h, \tag{1}$$

а начальная масса льда составляет

$$m_{i0} = \rho_i a^3. \tag{2}$$

Пусть в момент достижения пластинкой поверхности воды объем льда составляет V, тогда на него действует сила Архимеда

$$F_A = \rho_w V g, \tag{3}$$

а также сила тяжести

$$F_i = \rho_i V g. \tag{4}$$

Кроме этого, действует сила тяжести пластинки

$$F_m = mg, \tag{5}$$

так что уравнение равновесия куска льда в воде имеет вид

$$F_A = F_i + F_m. \tag{6}$$

Из уравнений (3)-(6) находим массу льда в тот момент, когда пластинка достигает поверхности воды

$$m_i = \frac{\rho_i}{\rho_w - \rho_i} m. \tag{7}$$

Чтобы пластинка опускалась, необходимо, чтобы лед таял, а его масса уменьшалась. Для достижения поверхности воды необходимо количество теплоты, равное

$$Q_1 = r(m_{i0} - m_i). \tag{8}$$

Теплоемкость пластинки зависит от температуры линейно, поэтому ее средняя удельная теплоемкость равна

$$c_a = \frac{c + c(1 + \alpha(t - t_0))}{2}, \tag{9}$$

а отданное количество теплоты определяется выражением

$$Q_2 = c_a(t - t_0). \tag{10}$$

Из уравнения теплового баланса

$$Q_1 = Q_2 \tag{11}$$

получаем квадратное уравнение для температуры пластинки, которое имеет решение

$$t - t_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\alpha r \rho_i a}{c \rho_m h}\left(1 - \frac{\rho_m h}{a(\rho_w - \rho_i)}\right)}}{\alpha}. \tag{12}$$

Ясно, что температура пластинки должна превышать t_0, поэтому необходимо выбрать знак плюс перед корнем в выражении (12), откуда окончательно получаем

$$t = t_0 + \frac{\sqrt{1 + \frac{2\alpha r \rho_i a}{c \rho_m h}\left(1 - \frac{\rho_m h}{a(\rho_w - \rho_i)}\right)} - 1}{\alpha} = 2000\ ℃. \tag{13}$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $m=\rho_m a^2 h$	0,5
Формула (2): $m_{i0}=\rho_i a^3$	0,5
Формула (3): $F_A=\rho_w V g$	0,5
Формула (4): $F_i=\rho_i V g$	0,5
Формула (5): $F_m=mg$	0,5
Формула (6): $F_A=F_i+F_m$	0,5
Формула (7): $m_i=\frac{\rho_i}{\rho_w-\rho_i}m$	0,5
Формула (8): $Q_1=r(m_{i0}-m_i)$	0,5
Формула (9): $c_a=\frac{c+c(1+\alpha(t-t_0))}{2}$	1,0
Формула (10): $Q_2=c_a(t-t_0)$	0,5
Формула (11): $Q_1=Q_2$	0,5
Формула (12): $t-t_0=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{2\alpha r\rho_i a}{c\rho_m h}\left(1-\frac{\rho_m h}{a(\rho_w-\rho_i)}\right)}}{\alpha}$	1,0
Формула (13): $t=t_0+\frac{\sqrt{1+\frac{2\alpha r\rho_i a}{c\rho_m h}\left(1-\frac{\rho_m h}{a(\rho_w-\rho_i)}\right)}-1}{\alpha}$	0,5
Численное значение в формуле (13): $t=2000$ ℃	0,5
Итого	**8,0**

Задача_4. Оптическая сила зеркала и его фокусное расстояние определяются выражениями

$$D_0=\frac{2}{R},\ F_0=\frac{R}{2}. \qquad (1)$$

Жидкость, налитая в зеркало, представляет собой плоско выпуклую линзу, оптическая сила которой и фокусное расстояние равны соответственно

$$D_L=\frac{n-1}{R},\ F_L=\frac{R}{n-1}. \qquad (2)$$

Зеркало с налитой жидкостью представляет собой оптическую систему из вплотную сложенных элементов. Известно, что оптическая сила такой системы равна сумме оптических сил каждой из них, поэтому учитывая, что жидкость проходится световым потоком дважды, получаем оптическую силу системы

$$D=D_0+2D_L=\frac{2n}{R},\ F=\frac{R}{2n}. \qquad (3)$$

Пусть f_1 – расстояние от зеркала до изображения до наливания жидкости, а f_2 – соответственно после. Так как расстояние d неизвестно, то необходимо рассмотреть следующие возможные случаи.

Случай 1. $d>\frac{R}{2}$.

В этом случае оба изображения источника являются действительными, поэтому формулы для тонкой оптической системы дают

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_0}=D_0, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}=D. \qquad (5)$$

Так как оптическая сила системы после наливания жидкости в зеркало возрастает, то $f_1>f_2$, поэтому по условию

$$f_1-f_2=x. \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (4)-(6) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right). \quad (7)$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ должно быть $d \to R/2$, поэтому в последнем выражении следует выбрать знак «плюс», что дает окончательный ответ

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right) = 53.9 \text{ см}. \quad (8)$$

Случай 2. $d < \frac{R}{2n}$.

В этом случае оба получаемых изображения являются мнимыми, поэтому формула для тонкой оптической системы дает

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D. \quad (10)$$

В данном случае возрастание оптической силы системы после наливания жидкости приводит к тому, что $f_1 < f_2$, поэтому по условию задачи

$$f_2 - f_1 = x. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (9)-(11) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right). \quad (12)$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ должно быть $d \to R/2n$, поэтому в последнем выражении следует выбрать знак «минус», что дает окончательный ответ

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{-x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right) = 31.8 \text{ см}. \quad (13)$$

Отметим, однако, что случаи 1 и 2 можно рассматривать вместе, что доказывается формулами (7) и (12).

Случай 3. $\frac{R}{2n} < d < \frac{R}{2}$.

В этом случае первое изображение является мнимым, а второе – действительным, поэтому формула для тонкой оптической системы дает

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D. \quad (15)$$

Учитывая, что изображения находятся по разные стороны зеркала, получаем по условию

$$f_1 + f_2 = x. \quad (16)$$

Решая систему уравнений (14)-(16) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)\pm\sqrt{(n-1)x(x(n-1)-2R)}}{2nx+(n-1)R}\right). \quad (17)$$

В этом случае оба корня являются возможными при заданных числовых значениях и дают возможные положения источника

$$d_1 = 35.9 \text{ см}, \quad (18)$$

$$d_2 = 45.2 \text{ см}. \quad (19)$$

Таким образом, задача имеет четыре возможных ответа.

Содержание	Баллы
Формула (1): $D_0 = \frac{2}{R}$, $F_0 = \frac{R}{2}$	0,4
Формула (2): $D_L = \frac{n-1}{R}$, $F_L = \frac{R}{n-1}$	0,4
Формула (3): $D = D_0 + 2D_L = \frac{2n}{R}$, $F = \frac{R}{2n}$	1,0
Формула (4): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,4
Формула (5): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,4
Формула (6): $f_1 - f_2 = x$	0,4
Формула (7): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Формула (8): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Численное значение в формуле (8): $d = 53.9$ см	0,4
Формула (9): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,4
Формула (10): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,4
Формула (11): $f_2 - f_1 = x$	0,4
Формула (12): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Формула (13): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{-x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Численное значение в формуле (13): $d = 31.8$ см	0,4
Формула (14): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,4
Формула (15): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,4
Формула (16): $f_1 + f_2 = x$	0,4
Формула (17): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)\pm\sqrt{(n-1)x(x(n-1)-2R)}}{2nx+(n-1)R}\right)$	0,4
Численное значение в формуле (18): $d_1 = 35.9$ см	0,4
Численное значение в формуле (19): $d_2 = 45.2$ см	0,4
Итого	**9,0**