Решение теоретического тура республиканской олимпиады по физике
11 класс

Задача_1. Оптическая сила зеркала и его фокусное расстояние определяются выражениями

$$D_0 = \frac{2}{R},\ F_0 = \frac{R}{2}. \qquad (1)$$

Жидкость, налитая в зеркало, представляет собой плоско выпуклую линзу, оптическая сила которой и фокусное расстояние равны соответственно

$$D_L = \frac{n-1}{R},\ F_L = \frac{R}{n-1}. \qquad (2)$$

Зеркало с налитой жидкостью представляет собой оптическую систему из вплотную сложенных элементов. Известно, что оптическая сила такой системы равна сумме оптических сил каждой из них, поэтому учитывая, что жидкость проходится световым потоком дважды, получаем оптическую силу системы

$$D = D_0 + 2D_L = \frac{2n}{R},\ F = \frac{R}{2n}. \qquad (3)$$

Пусть f_1 – расстояние от зеркала до изображения до наливания жидкости, а f_2 – соответственно после. Так как расстояние d неизвестно, то необходимо рассмотреть следующие возможные случаи.

Случай 1. $d > \frac{R}{2}$.

В этом случае оба изображения источника являются действительными, поэтому формулы для тонкой оптической системы дают

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D. \qquad (5)$$

Так как оптическая сила системы после наливания жидкости в зеркало возрастает, то $f_1 > f_2$, поэтому по условию

$$f_1 - f_2 = x. \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (4)-(6) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1) + \sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right). \qquad (7)$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ должно быть $d \to R/2$, поэтому в последнем выражении следует выбрать знак «плюс», что дает окончательный ответ

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1) + \sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right) = 53.9 \text{ см}. \qquad (8)$$

Случай 2. $d < \frac{R}{2n}$.

В этом случае оба получаемых изображения являются мнимыми, поэтому формула для тонкой оптической системы дает

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D. \qquad (10)$$

В данном случае возрастание оптической силы системы после наливания жидкости приводит к тому, что $f_1 < f_2$, поэтому по условию задачи

$$f_2 - f_1 = x. \qquad (11)$$

Решая систему уравнений (9)-(11) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1) + \sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right). \qquad (12)$$

Очевидно, что при $x \to \infty$ должно быть $d \to R/2n$, поэтому в последнем выражении следует выбрать знак «минус», что дает окончательный ответ

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{-x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right) = 31.8 \text{ см}. \quad (13)$$

Отметим, однако, что случаи 1 и 2 можно рассматривать вместе, что доказывается формулами (7) и (12).

Случай 3. $\frac{R}{2n} < d < \frac{R}{2}$.

В этом случае первое изображение является мнимым, а второе – действительным, поэтому формула для тонкой оптической системы дает

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D. \quad (15)$$

Учитывая, что изображения находятся по разные стороны зеркала, получаем по условию

$$f_1 + f_2 = x. \quad (16)$$

Решая систему уравнений (14)-(16) с учетом соотношений (1) и (3), получаем два возможных решения

$$d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)\pm\sqrt{(n-1)x(x(n-1)-2R)}}{2nx+(n-1)R}\right). \quad (17)$$

В этом случае оба корня являются возможными при заданных числовых значениях и дают возможные положения источника

$$d_1 = 35.9 \text{ см}, \quad (18)$$

$$d_2 = 45.2 \text{ см}. \quad (19)$$

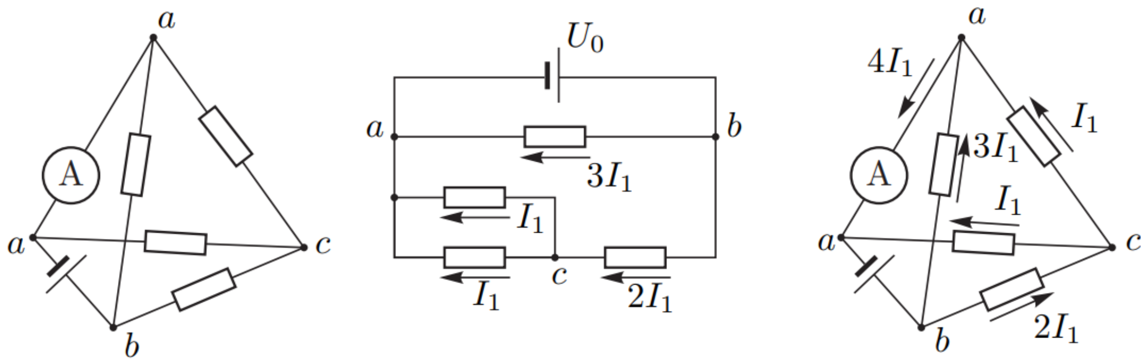
Таким образом, задача имеет четыре возможных ответа.

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $D_0 = \frac{2}{R}, F_0 = \frac{R}{2}$	0,4
Формула (2): $D_L = \frac{n-1}{R}, F_L = \frac{R}{n-1}$	0,4
Формула (3): $D = D_0 + 2D_L = \frac{2n}{R}, F = \frac{R}{2n}$	1,0
Формула (4): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,4
Формула (5): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,4
Формула (6): $f_1 - f_2 = x$	0,4
Формула (7): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Формула (8): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,4
Численное значение в формуле (8): $d = 53.9$ см	0,4
Формула (9): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,4
Формула (10): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,4
Формула (11): $f_2 - f_1 = x$	0,3
Формула (12): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{\pm x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,3
Формула (13): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{-x(n+1)+\sqrt{(n-1)x(x(n-1)+2R)}}{2nx-(n-1)R}\right)$	0,3
Численное значение в формуле (13): $d = 31.8$ см	0,3
Формула (14): $\frac{1}{d} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_0} = D_0$	0,3
Формула (15): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F} = D$	0,3

Формула (16): $f_1 + f_2 = x$	0,3
Формула (17): $d = \frac{R}{2}\left(\frac{x(n+1) \pm \sqrt{(n-1)x(x(n-1)-2R)}}{2nx+(n-1)R}\right)$	0,3
Численное значение в формуле (18): $d_1 = 35.9$ см	0,3
Численное значение в формуле (19): $d_2 = 45.2$ см	0,3
Итого	**8,0**

Задача_2.

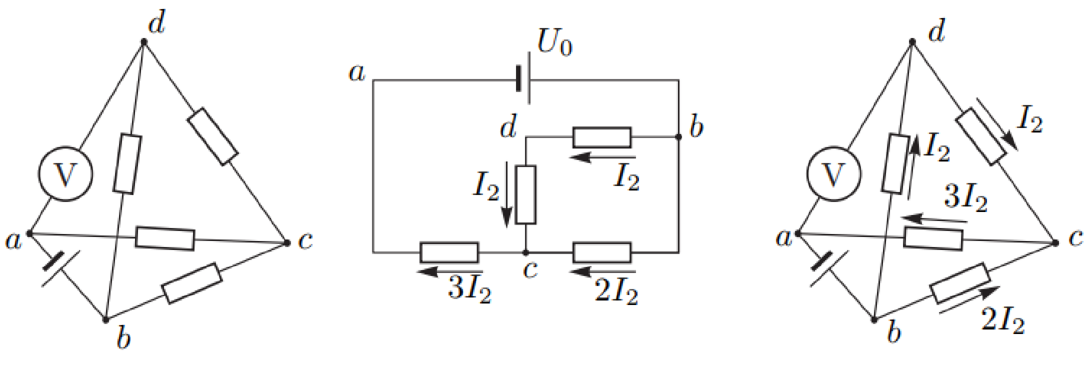
Для тетраэдра с амперметром обозначим узлы и нарисуем эквивалентную схему с учетом равенства нулю сопротивления амперметра. Расставим в эквивалентной схеме токи с учетом закона Ома обратно-пропорционально сопротивлениям параллельных ветвей и с учётом закона сохранения заряда для узлов. Затем отметим найденные токи на исходной схеме.



Для ветви ab запишем $U_0 = 3I_1R$, откуда ток через амперметр

$$I_A = 4I_1 = \frac{4U_0}{3R}$$

Повторим вышеперечисленные действия с тетраэдром, содержащим вольтметр, имеющий бесконечно большое сопротивление.



Напряжение между узлами ab равно $U_0 = 3I_2R + 2I_2R$, откуда показания вольтметра $U = 4I_2R = (4/5)U_0$. Выражая искомые величины, получим:

$$U_0 = \frac{5}{4}U = 15\text{В} \qquad \text{и} \qquad R = \frac{5}{3}\frac{U}{I_A} = 10 \text{ Ом}.$$

Содержание	Баллы
За правильную эквивалентную схему с амперметром	**1,5**
Для ветви ab напряжение $U_0 = 3I_1R$	**0,5**
$I_A = 4I_1 = \frac{4U_0}{3R}$	**0,5**
За правильную эквивалентную схему с вольтметром, имеющий бесконечно большое сопротивление	**1,5**
Напряжение между узлами ab равно $U_0 = 3I_2R + 2I_2R$	**0,5**
Показания вольтметра $U = 4I_2R = (4/5)U_0$	**0,5**
$U_0 = \frac{5}{4}U = 18{,}75$ В	**0,5**
$R = \frac{4}{3}\frac{U_0}{I_A} = 8{,}33$ Ом	**0,5**
Итого	**6,0**

Задача_3.

Из второго закона Ньютона найдем ускорение точки массы m

$$a_1 = -k\frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$$

и ускорение точки массы M

$$a_2 = k\frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}$$

Здесь r — расстояние между точками, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, за положительное выбрано направление от m к M. Найдем относительное ускорение точек:

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k\frac{q^2}{r^2}\frac{M+m}{Mm} - qE\frac{M-m}{Mm}$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда q массой $\mu = (M + m)/(Mm)$, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $-E_1 = -E(M - m)/(M + m)$. Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда:

$$U(r) = k\frac{q^2}{r} + qE_1r$$

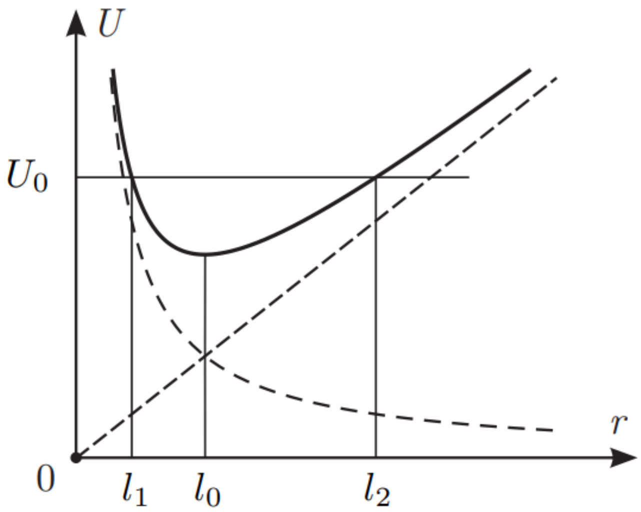


Рис. 1.

Из графика зависимости U(r) (рис. 1) видим, что движение заряда происходит в ограниченной области $l_1 \leqslant r \leqslant l_2$; l_1 и l_2 — корни уравнения

$$U_0 = k\frac{q^2}{r} + qE_1 r$$

или

$$r^2 - \frac{U_0}{qE_1}r + \frac{kq}{E_1} = 0$$

По теореме Виета произведение корней не зависит от U_0 и равно $l_1 l_2 = l_0^2$, где $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$. Таким образом, получаем, что если начальное расстояние l меньше, чем l_0, то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения l_0^2/l, а затем уменьшаться. Если же $l < l_0$, то начальное расстояние и будет максимальным. При $l = l_0$ расстояние между зарядами меняться не будет.

Ответ: максимальное расстояние между зарядами равно l при $l \geqslant \sqrt{kq/E_1}$и равно kq/lE_1при $l < \sqrt{kq/E_1}$.

Содержание	**Баллы**
Написал ускорения тел: $a_1 = -k\frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$ $a_2 = k\frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}$	**0,5** **0,5**
Нашёл относительное ускорение $a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k\frac{q^2}{r^2}\frac{M+m}{Mm} - qE\frac{M-m}{Mm}$	**0,5**

Привел аналогию с движением точечного заряда массой μ, находящегося в поле неподвижного точечного заряда q и в однородном поле $-E_1$ μ = (M + m)/(Mm) $$-E_1 = -E(M - m)/(M + m)$$	**0,5** **0,5**
Потенциальная энергия заряда: $U(r) = k\frac{q^2}{r} + qE_1r$ Нарисовал график $U(r)$	**1** **0,5**
$U_0 = k\frac{q^2}{r} + qE_1r$	**0,5**
Написал квадратное уравнение для r и нашел корни: $$r^2 - \frac{U_0}{qE_1}r + \frac{kq}{E_1} = 0$$	**0,5**
l при $l \geqslant \sqrt{kq/E_1}$ kq/lE_1 при $l < \sqrt{kq/E_1}$.	**1** **1**
Итого	**7,0**

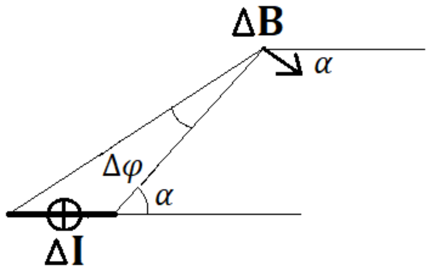
Задача_4.

1.Ток равномерно распределен по «параллели» сферы, поэтому:

$$i = \frac{I}{2\pi R\cos 60°} = 0.80\ \text{А/м} \quad (1)$$

2.Разобьем продольно проводник на тонкие полосы, шириной Δl, по которым протекает ток $\Delta I = i\Delta l$, а их поле можно рассчитать как поле бесконечного провода: (2)

$$\Delta B = \frac{\mu_0 i\Delta l}{2\pi r}.$$



Его составляющая параллельная плоскости проводника:

$$\Delta B_\tau = \frac{\mu_0 i\Delta l}{2\pi r}\cos\alpha. \quad (3)$$

Но $\frac{\Delta l\cos\alpha}{r} = \Delta\varphi$ (4)

где $\Delta\varphi$ – угол под которым видна полоска проводника.

Таким образом

$$B_\tau = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\Delta\varphi\ ,$$

и путем суммирования полей всех полосок получаем:

$$B_\tau = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\varphi \quad (5)$$

Для описываемого случая

$B_\tau = \frac{\mu_0 i}{\pi}\mathrm{arctg}0{,}5$ (6)

3. В любой точке внутри катушки, если её можно считать достаточно длинной, поле можно представить как сумму полей четырёх сторон катушки, каждую из которых в свою очередь представить в виде плоского проводка, с текущим по нему поверхностным током $i = \frac{N_1 I}{l}$ (Здесь и далее индекс 1 будем применять к внешней катушке, индекс 2 к внутренней).

$B \equiv B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \mu_0 i = \mu_0 \frac{N_1 I}{l}$ (7)

$L_1 = \frac{N_1 BS}{I} = \mu_0 {N_1}^2 \frac{S}{l} = 25.12 \cdot 10^{-5}$Гн для обоих типов катушек. (8)

4.$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = IR + L_2\frac{dI}{dt}$ (9)

$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_m \sin\omega t}{l} N_2 cd$ – поток поля внешней катушки через все витки внутренней (10)

(11)

$L_2 = \mu_0 {N_2}^2 \frac{S}{l} = 1{,}57 \cdot 10^{-5}$Гн

5. Решение такого рода уравнения представляет собой установившиеся вынужденные гармонические колебания:

$I_{in} = I_{inm}\sin(\omega t + \varphi)$ (12)

$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m \omega\cos\omega t}{l} = I_{inm} R\sin(\omega t + \varphi) + I_{inm}\omega L_2\cos(\omega t + \varphi)$ (13)

Один из вариантов решения – воспользоваться разложением суммы синусов и косинусов, и потребовать в левой и правой частях уравнения равенства множителей при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$

$-\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m \omega\cos\omega t}{l} =$

$= I_{inm}R(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi) + I_{inm}\omega L_2(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi)$ (14)

и

$0 = I_{inm}R\cos\varphi - I_{inm}\omega L_2\sin\varphi$ (15)

$-\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m \omega}{l} = I_{inm}R\sin\varphi + I_{inm}\omega L_2\cos\varphi$ (16)

Таким образом уравнение распадется на систему двух уравнений с решением: (17-18)

$I_{inm} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m \omega}{l\sqrt{R^2 + (\omega L_2)^2}} = 0.14$ А ; $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L_2}{R} \approx 44{,}6°$

6.Средняя мощность за период равна половине амплитудной мощности, поэтому:

$Q = \frac{{I_{inm}}^2 R}{2}\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m \omega}{l}\right)^2 \frac{R}{R^2 + (\omega L_2)^2}\frac{1}{f} \approx 10$ мкДж (19)

(20)

$Q : \frac{L_1 {I_m}^2}{2} \approx 0.75$

7.В отстутствии сердечника амплитуда напряжения:

$U_{m0} = \omega L_1 I_m$ (21)

В присутствии сердечника:

$$U(t) = L_1\frac{dI}{dt} + \frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_1\frac{dI}{dt} + \frac{\mu_0 N_2 I_m \sin\omega t}{l} N_1 cd\ \frac{dI_{in}}{dt}$$
$$= \omega L_1 I_m \cos\omega t + \omega\frac{N_1}{N_2} L_2 I_{inm}\cos(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

Амплитуду его можно рассчитать например сложением на векторной диаграмме векторов с величинами $\omega L_1 I_m$ и $\omega\frac{N_1}{N_2}L_2 I_{inm}$ и углом φ между ними. (23)

$$U_m = \omega\sqrt{(L_1 I_m)^2 + (L_2 I_{inm})^2 + 2L_1 I_m L_2 I_{inm}\cos\varphi}$$
$$\frac{U_m}{U_{m0}} = \sqrt{1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\frac{L_2 I_{inm}}{L_1 I_m}\right)^2 + 2\frac{N_1}{N_2}\frac{L_2 I_{inm}}{L_1 I_m}\cos\varphi} \approx 1{,}13 \qquad (24)$$

Содержание	Баллы
1.$i = \frac{I}{2\pi R\cos 60°} = 0.80$ А/м	**0,5**
2.Разобьем продольно проводник на тонкие полосы, шириной Δl, по которым протекает ток $\Delta I = i\Delta l$. $\Delta B_\tau = \frac{\mu_0 i\Delta l}{2\pi r}\cos\alpha.$ $B_\tau = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\varphi$ $B_\tau = \frac{\mu_0 i}{\pi}\mathrm{arctg}0{,}5$	**0,2** (правильное разбиение) **0,5** **0,5** **0,3**
3. $B \equiv B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \mu_0 i = \mu_0\frac{N_1 I}{l}$ $L_1 = \frac{N_1 BS}{I} = \mu_0 {N_1}^2\frac{S}{l} = 25.12\cdot 10^{-5}$Гн . Равенство индуктивностей.	**0,8** **0,4** **0,3**
4.$-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = IR + L_2\frac{dI}{dt}$ $\Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_m \sin\omega t}{l}N_2 cd$ – поток поля внешней катушки через все витки внутренней $L_2 = \mu_0 {N_2}^2\frac{S}{l} = 1{,}57\cdot 10^{-5}$Гн	**0,7** **0,3**
5. $-\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m\omega\cos\omega t}{l} = I_{inm}\,\mathrm{R}\sin(\omega t + \varphi) + I_{inm}\omega L_2\cos(\omega t + \varphi)$ $I_{inm} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m\omega}{l\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\omega L_2)^2}} = 0.14$ А ; $\varphi = arctg\frac{\omega L_2}{\mathrm{R}} \approx 44{,}6°$	**0,5** **0,5** **0,5**
6. $Q = \frac{{I_{inm}}^2 R}{2}\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 cd I_m\omega}{l}\right)^2\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 + (\omega L_2)^2}\frac{1}{f} \approx 10$ мкДж $Q{:}\frac{L_1 {I_m}^2}{2} \approx 0.75$	**1,0** **0,5** (сравнение)
7. В отстутствии сердечника амплитуда напряжения: $U_{m0} = \omega L_1 I_m$ В присутствии сердечника: $U(t) = L_1\frac{dI}{dt} + \frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_1\frac{dI}{dt} + \frac{\mu_0 N_2 I_m \sin\omega t}{l}N_1 cd\ \frac{dI_{in}}{dt} = \omega L_1 I_m\cos\omega t + \omega\frac{N_1}{N_2}L_2 I_{inm}\cos(\omega t + \varphi)$ Амплитуду его можно рассчитать например сложением на векторной диаграмме векторов с величинами $\omega L_1 I_m$ и $\omega\frac{N_1}{N_2}L_2 I_{inm}$ и углом φ между ними. $U_m = \omega\sqrt{(L_1 I_m)^2 + (L_2 I_{inm})^2 + 2L_1 I_m L_2 I_{inm}\cos\varphi}$ $\frac{U_m}{U_{m0}} = \sqrt{1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\frac{L_2 I_{inm}}{L_1 I_m}\right)^2 + 2\frac{N_1}{N_2}\frac{L_2 I_{inm}}{L_1 I_m}\cos\varphi} \approx 1{,}13$	**0,2** **0,5** **0,5** **0,3**
Итого	**9,0**