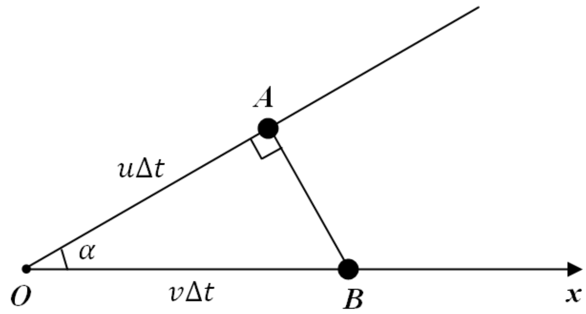
Решение задач. 9 класс.

Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

а) Рассмотрим второй этап движения, когда скорость второй частицы становится равной w. Условием того, что частицы 1 и 2 встречаются, является то, что, например, скорость частицы 1 относительно частицы 2 должна быть направлена строго к самой частице 2. При этом, так как $w = u$, то на втором этапе скорость u частицы 1 должна составлять острый угол с прямой, соединяющей частицы 1 и 2.



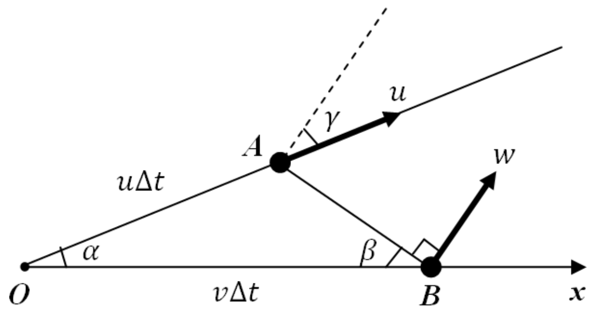
Из рисунка следует, что такое возможно только при соблюдении неравенства

$$v \cos\alpha > u, \qquad (1)$$

то есть минимальная скорость, при которой возможна встреча частиц 1 и 2 равна

$$v_{min} = \frac{u}{\cos\alpha} = 13.05 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

б) Как отмечено выше, для встречи частиц в некоторой точке необходимо, чтобы скорость частицы 1 относительно частицы 2 была направлена строго к самой частице 2. При фиксированном $w < u$ это означает, что максимальное значение угла α достигается при скорости w, направленной на втором этапе перпендикулярно прямой, соединяющей частицы 1 и 2, смотрите рисунок.



Чтобы относительная скорость частицы 1 была направлена к частице 2 необходимо выполнение условия

$$u \cos\gamma = w, \qquad (3)$$

где угол γ определяется геометрически выражением

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha. \qquad (4)$$

Из рисунка также следует, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u \sin\alpha}{v - u\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Система уравнений (3)-(5) приводит к квадратному уравнению

$$\frac{u^2v^2}{w^2}\cos^2\alpha - 2uv\cos\alpha + u^2 + v^2 - \frac{u^2v^2}{w^2} = 0, \qquad (6)$$

которое имеет два решения

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{w^2 \pm \sqrt{(v^2 - w^2)(u^2 - w^2)}}{uv}. \qquad (7)$$

Поскольку v может быть достаточно большим, то для положительного решения необходимо брать знак «плюс», то есть получаем окончательное решение в виде

$$\alpha \le \arccos\left(\frac{w^2+\sqrt{(v^2-w^2)(u^2-w^2)}}{uv}\right) = 0.27 \text{ рад} = 15{,}5°. \qquad (8)$$

	Содержание	Баллы	
а)	Формула (2): $v_{min} = \frac{u}{\cos\alpha}$	0,6	**0,8**
	Численное значение в формуле (2): $v_{min} = 13.05$ м/с	0,2	
б)	Формула (3): $u\cos\gamma = w$	0,8	**2,2**
	Формула (4): $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha$	0,2	
	Формула (5): $\operatorname{tg}\beta = \frac{u\sin\alpha}{v-u\cos\alpha}$	0,3	
	Формула (6): $\frac{u^2v^2}{w^2}\cos^2\alpha - 2uv\cos\alpha + u^2 + v^2 - \frac{u^2v^2}{w^2} = 0$	0,3	
	Формула (7): $\cos\alpha_{1,2} = \frac{w^2\pm\sqrt{(v^2-w^2)(u^2-w^2)}}{uv}$	0,2	
	Формула (8): $\alpha \le \arccos\left(\frac{w^2+\sqrt{(v^2-w^2)(u^2-w^2)}}{uv}\right)$	0,2	
	Численное значение в формуле (8): $\alpha \le 0.27$ рад $= 15{,}5°$	0,2	
Итого			**3,0**

Часть 1.2 (4.0 балла)

В начальный момент времени система приходит в движение, причем скорости первого и второго шариков всегда равны в силу нерастяжимости нити

$$v_1 = v_2 = u. \qquad (1)$$

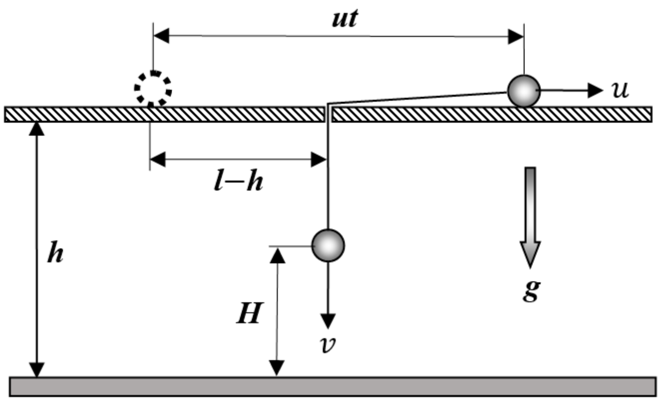
Непосредственно перед ударом шарика 2 о нижнюю плоскость, скорости шариков определяются законом сохранения энергии

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) определяем скорости обоих шариков перед ударом шарика 2 о нижнюю плоскость в виде

$$u = \sqrt{\frac{2m_2gh}{(m_1+m_2)}}. \qquad (3)$$

Дальнейшее движение происходит следующим образом. Шарик 1 скользит по верхней плоскости с постоянной скоростью u. Шарик 2 отскакивает от нижней плоскости с той же по модулю, но направленной вверх скоростью u. Нитка при этом становится не натянутой. В дальнейшем описанная в условии задачи ситуация возможно только для случая, изображенного на рисунке.



Именно, достигнув максимальной высоты, шарик 2 начинает опускаться вниз до тех пор, пока не достигнет скорости, определяемой уравнением

$$m_2 v = m_1 u. \qquad (4)$$

Только при соблюдении этого условия вновь натянутая нить сможет загасить скорости обоих шаров.

Время, прошедшее между столкновением шарика 2 с нижней плоскостью и моментом натяжения нити, определяется выражением

$$t = \frac{u+v}{g}, \qquad (5)$$

при этом высота шарика 2 над нижней плоскостью составляет

$$H = \frac{u^2 - v^2}{2g}. \qquad (6)$$

Очевидно, что за время, прошедшее между столкновением шарика 2 с нижней плоскостью и моментом натяжения нити, шарик 1 пройдет расстояние

$$s = ut. \qquad (7)$$

В момент, когда нить снова натянется, ее длина вновь должна стать равной l, поэтому из рисунка получаем

$$s - (l - h) + h - H = l. \qquad (8)$$

Решая совместно систему уравнений (3)-(8), получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{l}{h} - 3. \qquad (9)$$

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $v_1 = v_2 = u$	0,3
Формула (2): $m_2 gh = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$	0,3
Формула (3): $u = \sqrt{\frac{2m_2 gh}{(m_1+m_2)}}$	0,3
Формула (4): $m_2 v = m_1 u$	0,6
Формула (5): $t = \frac{u+v}{g}$	0,3
Формула (6): $H = \frac{u^2-v^2}{2g}$	0,3
Формула (7): $s = ut$	0,3
Формула (8): $s - (l-h) + h - H = l$	0,6
Формула (9): $\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{l}{h} - 3$	1,0
Итого	**4,0**

Часть 1.3 (3.0 балла)

При погружении образца в воду ее уровень возрастает. После включения нагревателя лед начинает таять. Так как при таянии льда уровень воды вначале не изменяется, то это означает, что образец плавает в воде. После того, как часть льда растает образец тонет, а дальнейшее уменьшение высоты столба воды происходит вследствие таяния льда в утонувшем образце. Изменение уровня воды полностью прекращается после того, как весь лед на полезном ископаемом растает.

Обозначим массу полезного ископаемого как m_x, а массу льда в момент времени, когда образец тонет как m. Из условия плавания следует, что в этот момент средняя плотность образца должна быть равна плотности воды, то есть

$$\rho_w = \frac{m + m_x}{\frac{m}{\rho_i} + \frac{m_x}{\rho_x}}. \qquad (1)$$

Пусть теперь M – масса образца в начальный момент времени, причем в нем содержится лед массой m_0, так что очевидно выполняется условие

$$M = m_0 + m_x. \qquad (2)$$

Так как вода в начальный момент погружения образца поднялась до уровня h_1, то по закону Архимеда

$$M = \rho_w S(h_1 - h_0). \qquad (3)$$

От момента времени t_1 до момента времени t_2 изменение уровня воды связано с таянием погруженного в воду льда. Лед имеет начальный объем m/ρ_i и превращается в воду объемом m/ρ_w, поэтому для уменьшения уровня воды получаем

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{S}\left(\frac{m}{\rho_i} - \frac{m}{\rho_w}\right). \qquad (4)$$

Пусть мощность нагревателя равна P, а удельная теплота плавления льда – λ. Тогда уравнение теплового баланса от начального момента времени до t_2 имеет вид

$$Pt_2 = \lambda m_0, \qquad (5)$$

а от момента времени t_1 до t_2

$$P(t_2 - t_1) = \lambda m. \qquad (6)$$

Решая совместно систему равнений (1)-(6), получаем

$$\rho_x = \rho_w \frac{h_1 - h_0 - \frac{\rho_i}{\rho_w}\left(h_1 - h_0 + (h_1 - h_2)\frac{t_2}{t_2 - t_1}\right)}{h_2 - h_0 + \frac{\rho_i}{\rho_w}\left(h_0 + \frac{h_2 t_1 - h_1 t_2}{t_2 - t_1}\right)} = 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \qquad (7)$$

Содержание	**Баллы**
Формула (1): $\rho_w = \frac{m + m_x}{\frac{m}{\rho_i} + \frac{m_x}{\rho_x}}$	0,5
Формула (2): $M = m_0 + m_x$	0,2
Формула (3): $M = \rho_w S(h_1 - h_0)$	0,5
Формула (4): $h_1 - h_2 = \frac{1}{S}\left(\frac{m}{\rho_i} - \frac{m}{\rho_w}\right)$	0,5
Формула (5): $Pt_2 = \lambda m_0$	0,2
Формула (6): $P(t_2 - t_1) = \lambda m$	0,2
Формула (7): $\rho_x = \rho_w \frac{h_1 - h_0 - \frac{\rho_i}{\rho_w}\left(h_1 - h_0 + (h_1 - h_2)\frac{t_2}{t_2 - t_1}\right)}{h_2 - h_0 + \frac{\rho_i}{\rho_w}\left(h_0 + \frac{h_2 t_1 - h_1 t_2}{t_2 - t_1}\right)}$	0,3
Численное значение в формуле (7): $\rho_x = 1{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3	0,6
Итого	**3,0**

Задача 2. Шпионский спутник (10.0 балла)

2.1 Так как геостационарный спутник зависает над одной и той же точкой поверхности Земли, то период его обращения равен периоду вращения Земли вокруг собственной оси и составляет

$$T_0 = 1 \text{ сут} = 86400 \text{ с}. \qquad (1)$$

2.2 Пусть M – масса Земли, а m – масса спутника. По закону всемирного тяготения Ньютона сила притяжения равна

$$F = G\frac{Mm}{R_0^2}. \qquad (2)$$

Эта сила обеспечивает движение спутника с центростремительным ускорением

$$a = \frac{v_0^2}{R_0}, \qquad (3)$$

так что уравнение движение спутника, то есть второй закон Ньютона, записывается в виде

$$F = ma. \qquad (4)$$

Так как орбита спутника является круговой, то период обращения определяется формулой

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}. \qquad (5)$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли определяется выражением

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (6)$$

поэтому решая совместно (2)-(6), находим

$$R_0 = R\left(\frac{gT_0^2}{4\pi^2 R}\right)^{1/3} = 4.24 \cdot 10^7 \text{ м.} \qquad (7)$$

2.3 Из тех же соотношений (2)-(7) находится скорость спутника на орбите

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0}} = 3.08 \text{ км/с.} \qquad (8)$$

2.4 На поверхности Земли спутник имеет потенциальную энергию

$$U_1 = -G\frac{Mm}{R} = -mgR. \qquad (9)$$

На орбите потенциальная энергия спутника равна

$$U_2 = -G\frac{Mm}{R_0} = -mg\frac{R^2}{R_0}, \qquad (10)$$

а его кинетическая энергия составляет

$$K = \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (11)$$

По закону сохранения энергии минимальная работа по выведению спутника на орбиту будет равна

$$U_1 + A = U_2 + K. \qquad (12)$$

Решая (9)-(12) совместно с (8), получим

$$A = mgR\left(1 - \frac{R}{2R_0}\right). \qquad (13)$$

2.5 Работа, совершаемая двигателем с учетом его КПД равна

$$A = \eta q(m_0 - m). \qquad (14)$$

Приравнивая (13) и (14), получаем начальную массу ракеты вместе со спутником

$$m_0 = m\left(1 + \frac{gR(2R_0 - R)}{2\eta qR_0}\right) = 2.93 \text{ т.} \qquad (15)$$

2.6 Ракета не может накапливать в себе топливо, поэтому сколько его расходуется, столько же должно и выйти из сопел двигателей. Количество вещества, выходящее из сопел в единицу времени равно

$$m_t = \rho S u \qquad (16)$$

и должно быть равно расходу топлива

$$m_t = \mu, \qquad (17)$$

откуда

$$u = \frac{\mu}{\rho S} = 2.2 \text{ км/с.} \qquad (18)$$

2.7 Перейдем в систему отсчета, в которой корабль покоится. Тогда приращение его скорости Δv, связанное с выбросом топлива массой δm со скоростью u определяется из закона сохранения импульса в виде

$$(m - \delta m)\Delta v = \delta m u, \qquad (19)$$

откуда следует, что на каждом этапе скорость ракеты увеличивается на одну и туже величину

$$\Delta v = \frac{\delta}{1-\delta}u. \qquad (20)$$

Таким образом, чтобы разогнать ракету до скорости v_0 количество циклов ускорения должно составить

$$n = \frac{v_0}{\Delta v} = \frac{(1-\delta)v_0}{\delta u} = 20. \qquad (21)$$

Каждый раз после выброса топлива масса остающейся части ракеты равна $(1-\delta)m$, а значит после n циклов ускорения должно быть

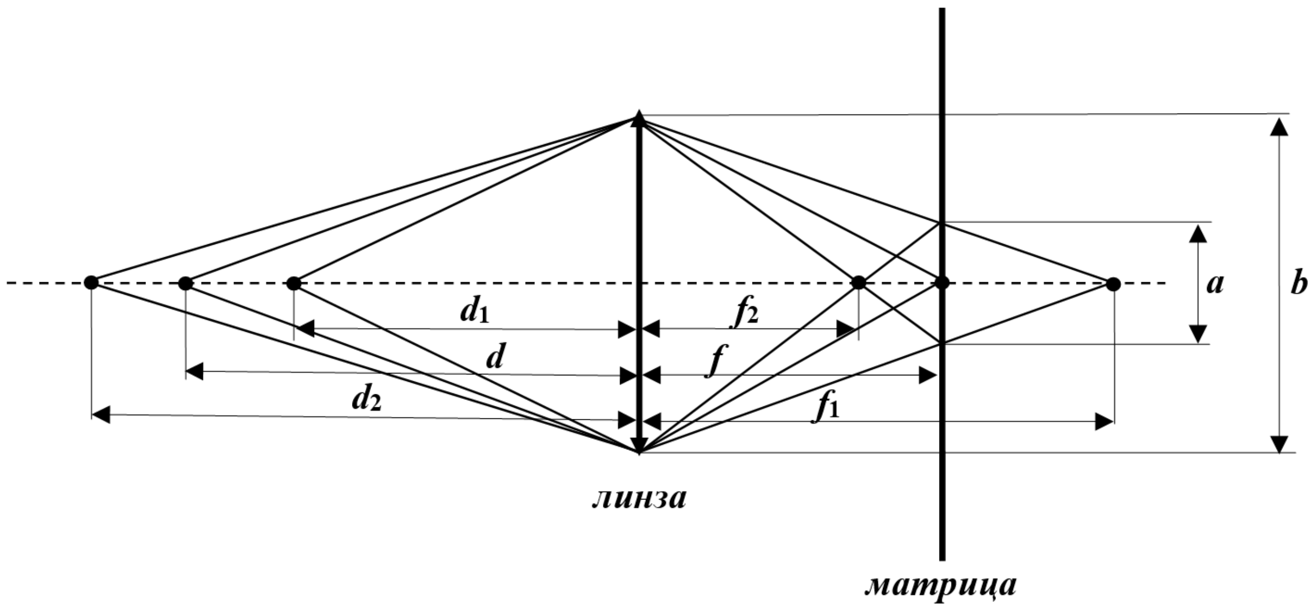
$$m = M(1-\delta)^n. \qquad (22)$$

Собирая вместе (20)-(22), получаем

$$M = m(1-\delta)^{-\frac{v_0(1-\delta)}{u\delta}} = 3.87 \text{ т.} \qquad (23)$$

Примечание: интересно отметить, что для малых значений δ формула (23) преобразуется в известную формулу Циолковского $M = me^{v_0/u}$, где $e = 2.718 \ldots$ – основание натуральных логарифмов.

2.8 Ход лучей в фотоаппарате показан на рисунке ниже.



Если фотоаппарат настроен на получение резкого изображения точечного предмета, находящегося на расстоянии d от него, то матрица расположена от линзы на расстоянии f, определяемом формулой линзы

$$f = \frac{dF}{d-F}. \tag{24}$$

Точечные предметы, расположенные на расстоянии d_1, дадут изображение в виде кружка диаметром a на матрице, так как они должны собраться в точку за матрицей на расстоянии от линзы, равном

$$f_1 = \frac{d_1F}{d_1-F}. \tag{25}$$

Аналогично, точечные предметы, расположенные на расстоянии d_2, дадут изображение в виде кружка диаметром a на матрице, так как они должны собраться в точку перед матрицей на расстоянии от линзы, равном

$$f_2 = \frac{d_2F}{d_2-F}. \tag{26}$$

Пусть b – диаметр линзы, тогда из подобия треугольников на рисунке, получаем

$$\frac{a}{b} = \frac{f-f_2}{f_2}, \tag{27}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{f_1-f}{f_1}, \tag{28}$$

откуда

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{29}$$

При новом диаметре линзы b' будет справедливо аналогичное соотношение с новыми значениями f_1' и f_2'

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}, \tag{30}$$

которые также определяются формулами линзы

$$f_1' = \frac{d_1'F}{d_1'-F}, \tag{31}$$

$$f_2' = \frac{d_2'F}{d_2'-F}. \tag{32}$$

Из соотношений (24), (25), (29) и (30)-(32) получаем

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{d_1'} + \frac{1}{d_2'}. \tag{33}$$

По условию должно быть $d_2' = \infty$, отсюда находим

$$d_1' = \frac{d_1d_2}{d_1+d_2} = 20 \text{ м}. \tag{34}$$

2.9 Фактически, на матрице получаются изображения предметов, расположенных на расстоянии от линзы $d \gg F$. Это означает, что все изображения фактически находятся в фокальной плоскости объектива. На изображении не различаются точки, расстояние между которыми меньше чем a, а так как коэффициент увеличения линзы равен

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{R_0 - R}, \tag{35}$$

то поэтому предмет размера l должен иметь размер

$$a = l\Gamma. \tag{36}$$

Отсюда получаем

$$l = \frac{a(R_0 - R)}{F} = 36 \text{ см}. \tag{37}$$

	Содержание	**Баллы**	
2.1	Формула (1) и численное значение: $T_0 = 1$ сут $= 86400$ с	0,2	**0,2**
2.2	Формула (2): $F = G\frac{Mm}{R_0^2}$	0,1	**0,9**
	Формула (3): $a = \frac{v_0^2}{R_0}$	0,1	
	Формула (4): $F = ma$	0,1	
	Формула (5): $T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_0}$	0,1	
	Формула (6): $g = G\frac{M}{R^2}$	0,1	
	Формула (7): $R_0 = R\left(\frac{gT_0^2}{4\pi^2 R}\right)^{1/3}$	0,2	
	Численное значение в формуле (7): $R_0 = 4.24 \cdot 10^7$ м	0,2	
2.3	Формула (8): $v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R_0}}$	0,2	**0,4**
	Численное значение в формуле (8): $v_0 = 3.08$ км/с	0,2	
2.4	Формула (9): $U_1 = -G\frac{Mm}{R} = -mgR$	0,2	**1,0**
	Формула (10): $U_2 = -G\frac{Mm}{R_0} = -mg\frac{R^2}{R_0}$	0,2	
	Формула (11): $K = \frac{mv_0^2}{2}$	0,1	
	Формула (12): $U_1 + A = U_2 + K$	0,2	
	Формула (13): $A = mgR\left(1 - \frac{R}{2R_0}\right)$	0,3	
2.5	Формула (14): $A = \eta q(m_0 - m)$	0,2	**0,6**
	Формула (15): $m_0 = m\left(1 + \frac{gR(2R_0 - R)}{2\eta qR}\right)$	0,2	
	Численное значение в формуле (15): $m_0 = 2.93$ т	0,2	
2.6	Формула (16): $m_t = \rho S u$	0,2	**0,7**
	Формула (17): $m_t = \mu$	0,2	
	Формула (18): $u = \frac{\mu}{\rho S}$	0,1	
	Численное значение в формуле (18): $u = 2.2$ км/с	0,2	
2.7	Формула (19): $(m - \delta m)\Delta v = \delta m u$	0,2	**1,4**
	Формула (20): $\Delta v = \frac{\delta}{1-\delta}u$	0,2	
	Формула (21): $n = \frac{v_0}{\Delta v} = \frac{(1-\delta)v_0}{\delta u} = 20$	0,2	
	Формула (22): $m = M(1-\delta)^n$	0,2	
	Формула (23): $M = m(1-\delta)^{-\frac{v_0(1-\delta)}{u\delta}}$	0,4	

	Численное значение в формуле (23): $M = 3.87$ т	0,2	
2.8	Построение хода лучей	0,4	**3,5**
	Формула (24): $f = \frac{dF}{d-F}$	0,2	
	Формула (25): $f_1 = \frac{d_1F}{d_1-F}$	0,2	
	Формула (26): $f_2 = \frac{d_2F}{d_2-F}$	0,2	
	Формула (27): $\frac{a}{b} = \frac{f-f_2}{f_2}$	0,3	
	Формула (28): $\frac{a}{b} = \frac{f_1-f}{f_1}$	0,3	
	Формула (29): $\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$	0,3	
	Формула (30): $\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$	0,1	
	Формула (31): $f_1' = \frac{d_1'F}{d_1'-F}$	0,2	
	Формула (32): $f_2' = \frac{d_2'F}{d_2'-F}$	0,2	
	Формула (33): $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{d_1'} + \frac{1}{d_2'}$	0,4	
	Формула (34): $d_1' = \frac{d_1d_2}{d_1+d_2}$	0,5	
	Численное значение в формуле (34): $d_1' = 20$ м	0,2	
2.9	Формула (35): $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{R_0-R}$	0,3	**1,3**
	Формула (36): $a = l\Gamma$	0,3	
	Формула (37): $l = \frac{a(R_0-R)}{F}$	0,5	
	Численное значение в формуле (37): $l = 36$ см	0,2	
Итого			**10,0**