

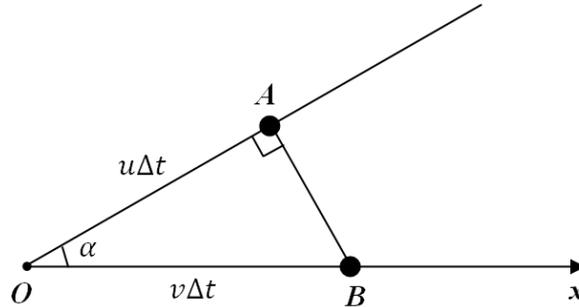
Решение задач. 11 класс.

Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

а) Рассмотрим второй этап движения, когда скорость второй частицы становится равной w . Условием того, что частицы 1 и 2 встречаются, является то, что, например, скорость частицы 1 относительно частицы 2 должна быть направлена строго к самой частице 2. При этом, так как $w < u$, то на втором этапе скорость u частицы 1 должна составлять острый угол с прямой, соединяющей частицы 1 и 2.



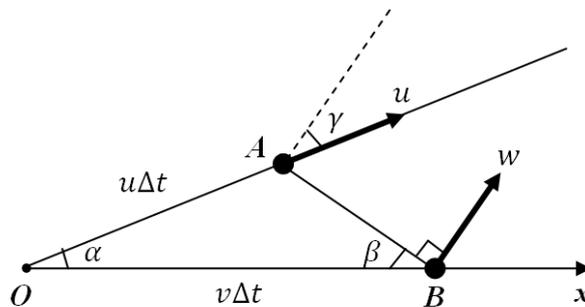
Из рисунка следует, что такое возможно только при соблюдении неравенства

$$v \cos \alpha > u, \quad (1)$$

то есть минимальная скорость, при которой возможна встреча частиц 1 и 2 равна

$$v_{min} = \frac{u}{\cos \alpha} = 13.05 \text{ м/с}. \quad (2)$$

б) Как отмечено выше, для встречи частиц в некоторой точке необходимо, чтобы скорость частицы 1 относительно частицы 2 была направлена строго к самой частице 2. При $v > v_{min}$ и фиксированном w это означает, что максимальное значение угла α достигается при скорости w , направленной на втором этапе перпендикулярно прямой, соединяющей частицы 1 и 2, смотрите рисунок.



Чтобы относительная скорость частицы 1 была направлена к частице 2 необходимо выполнение условия

$$u \cos \gamma = w, \quad (3)$$

где угол γ определяется геометрически выражением

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha. \quad (4)$$

Из рисунка также следует, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u \sin \alpha}{v - u \cos \alpha}. \quad (5)$$

Система уравнений (3)-(5) приводит к квадратному уравнению

$$\frac{u^2 v^2}{w^2} \cos^2 \alpha - 2uv \cos \alpha + u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{w^2} = 0, \quad (6)$$

которое имеет два решения

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{w \pm \sqrt{(v^2 - w^2)(u^2 - w^2)}}{uv}. \quad (7)$$

Поскольку v может быть достаточно большим, то для положительного решения необходимо брать знак «плюс», то есть получаем окончательное решение в виде

$$\alpha \leq \arccos\left(\frac{w + \sqrt{(v^2 - w^2)(u^2 - w^2)}}{uv}\right) = 0.27 \text{ рад} = 15,5^\circ. \quad (8)$$

| | Содержание | Баллы | |
|--------------|--|-------|------------|
| а) | Формула (2): $v_{min} = \frac{u}{\cos \alpha}$ | 0,6 | 0,8 |
| | Численное значение в формуле (2): $v_{min} = 13.05 \text{ м/с}$ | 0,2 | |
| б) | Формула (3): $u \cos \gamma = w$ | 0,8 | 2,2 |
| | Формула (4): $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta - \alpha$ | 0,2 | |
| | Формула (5): $\text{tg } \beta = \frac{u \sin \alpha}{v - u \cos \alpha}$ | 0,3 | |
| | Формула (6): $\frac{u^2 v^2}{w^2} \cos^2 \alpha - 2uv \cos \alpha + u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{w^2} = 0$ | 0,3 | |
| | Формула (7): $\cos \alpha_{1,2} = \frac{w \pm \sqrt{(v^2 - w^2)(u^2 - w^2)}}{uv}$ | 0,2 | |
| | Формула (8): $\alpha \leq \arccos\left(\frac{w + \sqrt{(v^2 - w^2)(u^2 - w^2)}}{uv}\right)$ | 0,2 | |
| | Численное значение в формуле (8): $\alpha \leq 0.27 \text{ рад} = 15,5^\circ$ | 0,2 | |
| Итого | | | 3,0 |

Часть 1.2 (4.0 балла)

Пусть нижняя сторона рамки имеет координату по вертикали z . Поток магнитного поля через сечение рамки определяется величиной индукции в ее центре, так как она линейно зависит от координаты, и площадью самой рамки в виде

$$\Phi = (B_0 + k(z + a/2))a^2. \quad (1)$$

При этом, по закону Фарадея, в рамке появляется э.д.с. индукции, равная

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$

которая с использованием (1) переписывается как

$$\mathcal{E} = a^2 k \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

Э.д.с. индукции приводит к появлению в рамке индукционного тока, который определяется законом Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (4)$$

или с учетом (3)

$$I = \frac{ka^2}{R} v_z, \quad (5)$$

где $v_z = dz/dt$ – вертикальная скорость рамки.

Силы Ампера, действующие на вертикальные стороны рамки, взаимно компенсируют друг друга, поэтому горизонтальная скорость рамки остается неизменной

$$v_x = \text{const} = v_0. \quad (6)$$

Силы Ампера, действующие на горизонтальные стороны рамки, не равны между собой, так как при равном электрическом токе индукции магнитного поля у каждой стороны разные, что приводит к появлению вертикальной составляющей силы, равной

$$\Delta F_z = Ia \Delta B = ka^2 I. \quad (7)$$

В вертикальном направлении на рамку действует и сила тяжести

$$F = mg, \quad (8)$$

которая в установившемся режиме должна компенсироваться равнодействующей сил Ампера

$$\Delta F_z = F. \quad (9)$$

Из уравнений (5), (7)-(9) находим, что у рамки есть вертикальная установившаяся скорость, равная

$$v_z = \frac{mgR}{k^2 a^4}. \quad (10)$$

Полная скорость рамки равна

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2, \quad (11)$$

откуда с учетом (6) и (10) окончательно имеем

$$v_0^2 = \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{k^2 a^4}\right)^2}. \quad (12)$$

| Содержание | Баллы |
|---|------------|
| Формула (1): $\Phi = (B_0 + k(z + a/2))a^2$ | 0,4 |
| Формула (2): $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt}$ | 0,2 |
| Формула (3): $\mathcal{E} = a^2 k \frac{dz}{dt}$ | 0,5 |
| Формула (4): $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ | 0,2 |
| Формула (5): $I = \frac{ka^2}{R} v_z$ | 0,3 |
| Формула (6): $v_x = const = v_0$ | 0,3 |
| Формула (7): $\Delta F_z = Ia\Delta B = ka^2 I$ | 0,5 |
| Формула (8): $F = mg$ | 0,2 |
| Формула (9): $\Delta F_z = F$ | 0,2 |
| Формула (10): $v_z = \frac{mgR}{k^2 a^4}$ | 0,5 |
| Формула (11): $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ | 0,3 |
| Формула (12): $v_0^2 = \sqrt{v^2 - \left(\frac{mgR}{k^2 a^4}\right)^2}$ | 0,4 |
| Итого | 4,0 |

Часть 1.3 (3.0 балла)

Пусть линза является рассеивающей, тогда изображение в нем источника является мнимым, при этом очевидно, что минимальный размер пятна достигается тогда, когда расстояние от линзы до экрана должно быть как можно меньше, то есть

$$d_{min} = l. \quad (1)$$

Аналогичная ситуация наблюдается для случая собирающей линзы с $F \geq l$, так как в этом случае изображение в линзе также является мнимым, то есть

$$d_{min} = l. \quad (2)$$

Рассмотрим отдельно случай собирающей линзы с $F < l$. Предположим, что изображение источника на экране можно сфокусировать в точку, тогда должна выполняться формула линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} = \frac{1}{F}, \quad (3)$$

откуда получаем квадратное уравнение для

$$d^2 - ld + Fl = 0, \quad (4)$$

решение которого имеет вид

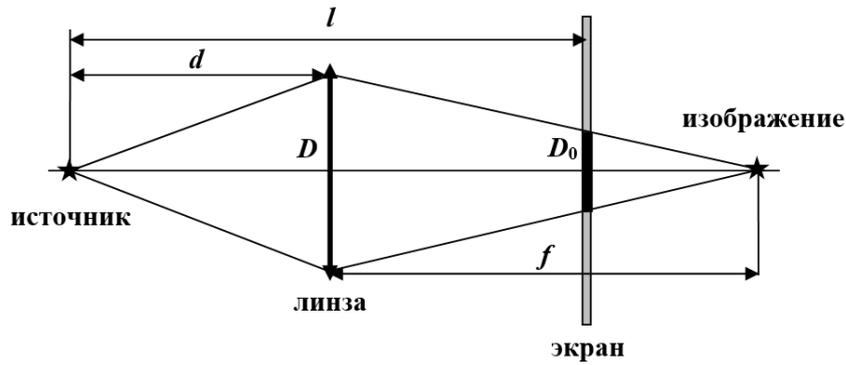
$$d_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l(l-4F)}}{2}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что изображение в виде точки можно получить на экране только тогда, когда

$$F < \frac{l}{4}, \quad (6)$$

при этом в решении (6) возможны оба знака, то есть $d_{min} = d_{1,2}$.

Наконец рассмотрим случай собирающей линзы, у которой $\frac{l}{4} < F < l$. В этом случае получается сходящийся пучок лучей (смотрите рисунок), который нельзя сфокусировать в точку.



В соответствии с формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (7)$$

Из подобия треугольников на рисунке заключаем, что диаметр пятна на экране D связан с диаметром линзы D_0 пропорцией

$$\frac{D}{D_0} = \frac{f-(l-d)}{f}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) после преобразований получаем

$$\frac{D}{D_0} = 2\sqrt{\frac{l}{F}} - \frac{l}{F} + \left(\sqrt{\frac{l}{d}} - \sqrt{\frac{d}{F}}\right)^2. \quad (9)$$

Из формулы (9) заключаем, что размер пятна будет минимальным, когда выражение в круглых скобках правой части (9) обратится в ноль, то есть

$$d_{min} = \sqrt{lF}. \quad (10)$$

| Содержание | Баллы |
|---|------------|
| Рассеивающая линза и формула (1): $d_{min} = l$ | 0,2 |
| Собирающая линзы с $F \geq l$ и формула (2): $d_{min} = l$ | 0,2 |
| Формула (3): $\frac{1}{d} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{F}$ | 0,2 |
| Формула (4): $d^2 - ld + Fl = 0$ | 0,3 |
| Формула (5): $d_{min} = \frac{l \pm \sqrt{l(l-4F)}}{2}$ | 0,3 |
| Собирающая линза при условии в формуле (6): $F < \frac{l}{4}$ | 0,3 |
| Формула (7): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ | 0,3 |
| Формуле (8): $\frac{D}{D_0} = \frac{f-(l-d)}{f}$ | 0,3 |
| Формуле (9): $\frac{D}{D_0} = 2\sqrt{\frac{l}{F}} - \frac{l}{F} + \left(\sqrt{\frac{l}{d}} - \sqrt{\frac{d}{F}}\right)^2$ | 0,3 |
| Формуле (10): $d_{min} = \sqrt{lF}$ | 0,3 |
| При условии: $\frac{l}{4} < F < l$ | 0,3 |
| Итого | 3,0 |

Задача 2. Пар против воздуха (10.0 балла)

2.1 До начала нагревания с одной стороны поршня имеется воздух, а с другой – насыщенный водяной пар. При нагревании системы вода начинает испаряться, давление насыщенных паров возрастает и поршень приходит в движение, так как зависимость давления воздуха определяется уравнением идеального газа, а давление насыщенных водяных паров зависит только от их температуры. Понятно, что движение поршня полностью прекратится в тот момент, когда вся вода

в системе полностью испарится, так как в этот момент с обеих сторон поршня окажутся только газы, подчиняющиеся уравнению Менделеева-Клапейрона.

Начальное и конечное состояния воздуха связаны соотношением

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{p V_0}{4T}. \quad (1)$$

Для пара в начальный момент времени уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p_0 \frac{V_0}{2} = \frac{m_0}{\mu_w} RT_0, \quad (2)$$

а в момент прекращения испарения

$$p \frac{3V_0}{4} = \frac{m_0+m}{\mu_w} RT. \quad (3)$$

Решая совместно системы уравнений (1)-(3), находим

$$m_0 = \frac{m}{2} = 2,0 \text{ г}. \quad (4)$$

2.2 С одной стороны давление насыщенных водяных паров в начальный момент времени определяется приведенным в условии графиком зависимости, а с другой стороны оно описывается уравнением состояния идеального газа

$$p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0} T. \quad (5)$$

Таким образом, на приведенном в условии графике зависимости надо построить прямую

$$p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0 \cdot 10^5} (t + 273.15), \quad (6)$$

пересечение которой с графиком давления насыщенных водяных паров определяет начальную температуру системы

$$t_0 = 1,4 \cdot 10^2 \text{°C}. \quad (7)$$

2.3 Из графика зависимости давления насыщенных паров от температуры получаем начальное давление в системе

$$p_0 = 3,8 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (8)$$

2.4 Аналогично 2.2, с одной стороны давление насыщенных водяных паров в начальный момент времени определяется приведенным в условии графиком зависимости, а с другой стороны оно описывается уравнением состояния идеального газа

$$p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0} T. \quad (9)$$

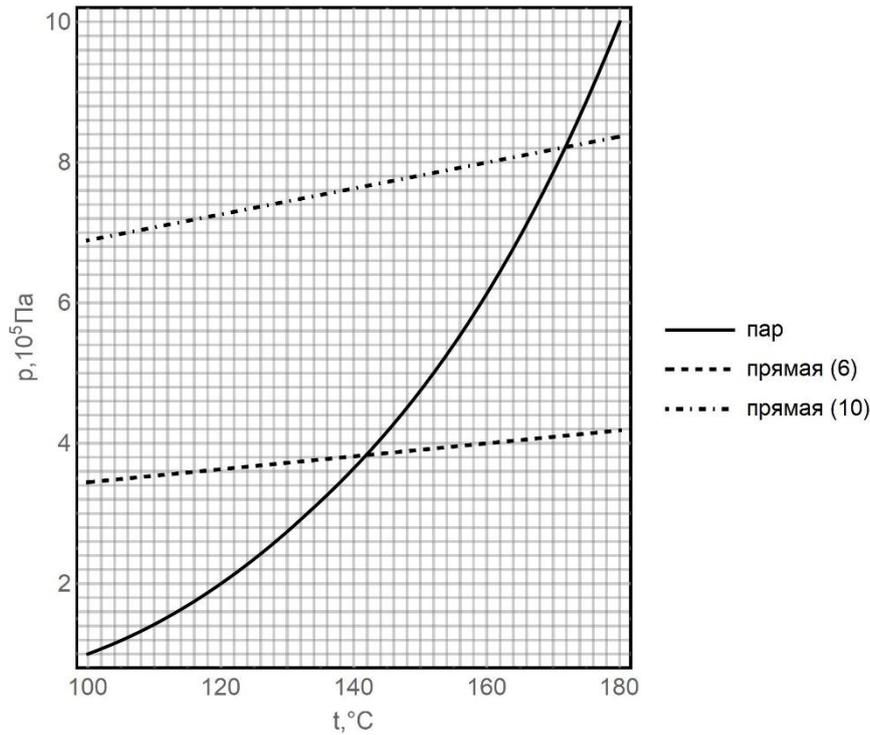
Таким образом на приведенном в условии графике зависимости надо построить прямую

$$p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0 \cdot 10^5} (t + 273.15), \quad (10)$$

пересечение которой с графиком давления насыщенных водяных паров определяет конечную температуру системы

$$t = 1,7 \cdot 10^2 \text{°C}. \quad (11)$$

Все указанные построения показаны на рисунке ниже.



2.5 Масса воздуха определяется уравнением состояния и равна

$$M = \frac{\mu_a p_0 V_0}{2RT_0} = 3.2 \text{ г.} \quad (12)$$

2.6 Пусть объем, занимаемый воздухом, равен V , тогда пар занимает объем $V_0 - V$. Для воздуха справедливо уравнение идеального газа, которое может быть записано в форме

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV}{T}. \quad (13)$$

В свою очередь для пара также справедливо уравнение состояния Менделеева-Клайперона

$$p(V_0 - V) = \frac{m}{\mu_w} RT. \quad (14)$$

С другой стороны, давление насыщенного водяного пара определяется графиком, который формально можно записать как некоторую зависимость давления от температуры

$$p = p(T). \quad (15)$$

Удельная теплота парообразования включает в себя все возможные вклады, которые включают изменение внутренней энергии при фазовом превращении, а также работу против внешнего давления, поэтому количество теплоты записывается в виде

$$\delta Q = r \delta m, \quad (16)$$

откуда теплоемкость вычисляется по формуле

$$C_v = r \frac{\delta m}{\delta T}. \quad (17)$$

Формула (17) означает, что для вычисления теплоемкости пара с водой необходимо определить скорость испарения воды при изменении температуры. Из выражения (14) находим

$$\delta m = \frac{\mu_w(V_0 - V)}{RT} \delta p - \frac{\mu_w p}{RT} \delta V - \frac{\mu_w p(V_0 - V)}{RT^2} \delta T. \quad (18)$$

Давление в системе определяется также воздухом, поэтому из (13) следует

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} \delta T = V \delta p + p \delta V. \quad (19)$$

Наконец, так как давление в целом определяется насыщенным паром, то из (15) получаем

$$\delta p = \alpha \delta T, \quad (20)$$

в котором параметр α определяется из приведенного в условии графика по коэффициенту наклона и равен

$$\alpha = 1.0 \cdot 10^4 \text{ Па/К} \quad (21)$$

для определенных в 2.2 и 2.3 начальных условий

$$p = p_0, T = T_0, V = \frac{1}{2} V_0. \quad (22)$$

Собирая вместе соотношения (16)-(22), окончательно получаем

$$C_v = r \frac{\mu_w V_0}{2RT_0} \left(3\alpha - \frac{p_0}{T_0} \right) = 3.5 \cdot 10^2 \text{ Дж/К.} \quad (23)$$

2.7 Воздух представляет собой двухатомный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad (24)$$

так что изменение внутренней энергии газа равно

$$dU = \frac{M}{\mu_a} C_V \delta T. \quad (25)$$

Работа, совершаемая газом равна

$$\delta A = p \delta V, \quad (26)$$

а первое начало термодинамики дает

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (27)$$

С учетом выражений (19) и (20), окончательно находим

$$C_a = \frac{M}{\mu_a} C_V + \frac{V_0}{2} \left(\frac{p_0}{T_0} - \alpha \right) = -7.1 \text{ Дж/К.} \quad (28)$$

| | Содержание | Баллы | |
|-----|--|-------|-----|
| 2.1 | Формула (1): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV}{4T}$ | 0,3 | 1,5 |
| | Формула (2): $p_0 \frac{V_0}{2} = \frac{m_0}{\mu_w} RT_0$ | 0,3 | |
| | Формула (3): $p \frac{3V_0}{4} = \frac{m_0+m}{\mu_w} RT$ | 0,3 | |
| | Формула (4): $m_0 = \frac{m}{2}$ | 0,3 | |
| | Численное значение в формуле (4): $m_0 = 2,0 \text{ г}$ | 0,3 | |
| 2.2 | Формула (5): $p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0} T$ | 0,3 | 1,0 |
| | Формула (6): $p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0 10^5} (t + 273.15)$ | 0,5 | |
| | Численное значение в формуле (7): $t_0 = 1,4 \cdot 10^2 \text{ °C}$ | 0,2 | |
| 2.3 | Численное значение в формуле (8): $p_0 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ Па.}$ | | 0,2 |
| 2.4 | Формула (9): $p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0} T$ | 0,3 | 1,0 |
| | Формула (10): $p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0 10^5} (t + 273.15)$ | 0,5 | |
| | Численное значение в формуле (11): $t = 1,7 \cdot 10^2 \text{ °C}$ | 0,2 | |
| 2.5 | Формула (12): $M = \frac{\mu_a p_0 V_0}{2RT_0} = 3.2 \text{ г}$ | 0,3 | 0,5 |
| | Численное значение в формуле (12): $M = 3.2 \text{ г}$ | 0,2 | |
| 2.6 | Формула (13): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV}{T}$ | 0,3 | 4,0 |
| | Формула (14): $p(V_0 - V) = \frac{m}{\mu_w} RT$ | 0,3 | |
| | Формула (15): $p = p(T)$ | 0,3 | |
| | Формула (16): $\delta Q = r \delta m$ | 0,3 | |
| | Формула (17): $C_v = r \frac{\delta m}{\delta T}$ | 0,3 | |
| | Формула (18): $\delta m = \frac{\mu_w(V_0 - V)}{RT} \delta p - \frac{\mu_w p}{RT} \delta V - \frac{\mu_w p(V_0 - V)}{RT^2} \delta T$ | 0,4 | |
| | Формула (19): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} \delta T = V \delta p + p \delta V$ | 0,4 | |
| | Формула (20): $\delta p = \alpha \delta T$ | 0,4 | |
| | Численное значение в формуле (21): $\alpha = 1.0 \cdot 10^4 \text{ Па/К}$ | 0,4 | |
| | Формула (21): $p = p_0, T = T_0, V = \frac{1}{2} V_0$ | 0,3 | |

| | | | |
|--------------|---|-----|-------------|
| | Формула (22): $C_v = r \frac{\mu_w V_0}{2RT_0} \left(3\alpha - \frac{p_0}{T_0} \right)$ | 0,3 | |
| | Численное значение в формуле (22): $C_v = 3.5 \cdot 10^2$ Дж/К | 0,3 | |
| 2.7 | Формула (24): $C_V = \frac{5}{2} R$ | 0,3 | 1,8 |
| | Формула (25): $dU = \frac{M}{\mu_a} C_V \delta T$ | 0,3 | |
| | Формула (26): $\delta A = p \delta V$ | 0,3 | |
| | Формула (27): $\delta Q = dU + \delta A$ | 0,3 | |
| | Формула (28): $C_a = \frac{M}{\mu_a} C_V + \frac{V_0}{2} \left(\frac{p_0}{T_0} - \alpha \right)$ | 0,3 | |
| | Численное значение в формуле (28): $C_a = -7.1$ Дж/К | 0,3 | |
| Итого | | | 10,0 |