

## Решение задач. 10 класс.

### Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

#### Часть 1.1 (4.0 балла)

В начальный момент времени система приходит в движение, причем скорости первого и второго шариков всегда равны в силу нерастяжимости нити

$$v_1 = v_2 = u. \quad (1)$$

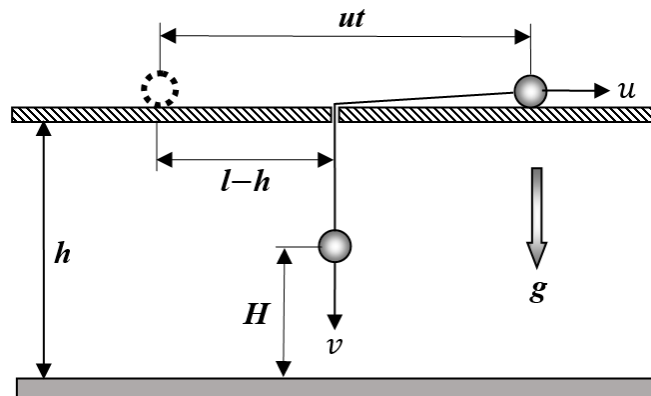
Непосредственно перед ударом шарика 2 о нижнюю плоскость, скорости шариков определяются законом сохранения энергии

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) определяем скорости обоих шариков перед ударом шарика 2 о нижнюю плоскость в виде

$$u = \sqrt{\frac{2m_2gh}{(m_1+m_2)}}. \quad (3)$$

Дальнейшее движение происходит следующим образом. Шарик 1 скользит по верхней плоскости с постоянной скоростью  $u$ . Шарик 2 отскакивает от нижней плоскости с той же по модулю, но направленной вверх скоростью  $u$ . Нитка при этом становится не натянутой. В дальнейшем описанная в условии задачи ситуация возможно только для случая, изображенного на рисунке.



Именно, достигнув максимальной высоты, шарик 2 начинает опускаться вниз до тех пор, пока не достигнет скорости, определяемой уравнением

$$m_2v = m_1u. \quad (4)$$

Только при соблюдении этого условия вновь натянутая нить сможет загасить скорости обоих шаров.

Время, прошедшее между столкновением шарика 2 с нижней плоскостью и моментом натяжения нити, определяется выражением

$$t = \frac{u+v}{g}, \quad (5)$$

при этом высота шарика 2 над нижней плоскостью составляет

$$H = \frac{u^2-v^2}{2g}. \quad (6)$$

Очевидно, что за время, прошедшее между столкновением шарика 2 с нижней плоскостью и моментом натяжения нити, шарик 1 пройдет расстояние

$$s = ut. \quad (7)$$

В момент, когда нить снова натянется, ее длина вновь должна стать равной  $l$ , поэтому из рисунка получаем

$$s - (l - h) + h - H = l. \quad (8)$$

Решая совместно систему уравнений (3)-(8), получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{l}{h} - 3. \quad (9)$$

| Содержание   |  | Баллы      |
|--|--|------------|
| Формула (1): $v_1 = v_2 = u$                                     |  | 0,3        |
| Формула (2): $m_2gh = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ |  | 0,3        |
| Формула (3): $u = \sqrt{\frac{2m_2gh}{m_1+m_2}}$                 |  | 0,3        |
| Формула (4): $m_2v = m_1u$                                       |  | 0,6        |
| Формула (5): $t = \frac{u+v}{g}$                                 |  | 0,3        |
| Формула (6): $H = \frac{u^2-v^2}{2g}$                            |  | 0,3        |
| Формула (7): $s = ut$  |  | 0,3        |
| Формула (8): $s - (l - h) + h - H = l$                           |  | 0,6        |
| Формула (9): $\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{l}{h} - 3$                |  | 1,0        |
| <b>Итого</b>   |  | <b>4,0</b> |

### Часть 1.2 (3.0 балла)

Во внешнем электрическом поле  $E_0$  на поверхности шара индуцируются заряды, электрическое поле которых компенсирует внешнее электрическое поле в объеме проводника. Очевидно, что поверхностная плотность заряда в каждой точке шара пропорциональна внешнему электрическому полю и не зависит от его радиуса

$$\sigma \sim E_0. \quad (1)$$

При выключении электрического поля выделится тепло  $Q$ , запасенное в энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой  $W$ , то есть

$$Q = W. \quad (2)$$

Разобьем поверхность сферы на очень маленькие участки, тогда энергия взаимодействия двух таких произвольных участков, расположенных на расстоянии  $r_{12}$  друг от друга, равна

$$\delta W = k\sigma_1\sigma_2 \frac{\delta S_1\delta S_2}{r_{12}}, \quad (3)$$

где  $\delta S_1\delta S_2$  – площади участков с поверхностными зарядами  $\sigma_1, \sigma_2$  соответственно.

Полная энергия  $W$  является суммой по всевозможным таким участкам

$$W = \Sigma \delta W. \quad (4)$$

Увеличим радиус сферы в  $n$  раз, а разбиение на участки оставим тем же. Тогда поверхностные заряды в соответствии с (1) не изменятся, а площади участков возрастут как

$$\delta S_{1,2} \sim n^2, \quad (5)$$

а расстояние между ними увеличится как

$$r_{12} \sim n. \quad (6)$$

Из формул (3)-(6) следует, что энергия взаимодействия индуцированных зарядов

$$W \sim n^3, \quad (7)$$

поэтому получаем окончательный ответ

$$Q = n^3 Q_0 = 8Q_0. \quad (8)$$

| Содержание  |  | Баллы |
|---|--|-------|
| Формула (1): $\sigma \sim E_0$  |  | 0,5   |
| Формула (2): $Q = W$  |  | 0,5   |
| Формула (3): $\delta W = k\sigma_1\sigma_2 \frac{\delta S_1\delta S_2}{r_{12}}$ |  | 0,5   |
| Формула (4): $W = \Sigma \delta W$  |  | 0,2   |
| Формула (5): $\delta S_{1,2} \sim n^2$  |  | 0,3   |
| Формула (6): $r_{12} \sim n$  |  | 0,2   |

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| Формула (7): $W \sim n^3$         | 0,3        |
| Формула (8): $Q = n^3 Q_0 = 8Q_0$ | 0,5        |
| <b>Итого</b>                      | <b>3,0</b> |

### Часть 1.3 (3.0 балла)

Пусть линза является рассеивающей, тогда изображение в нем источника является мнимым, при этом очевидно, что минимальный размер пятна достигается тогда, когда расстояние от линзы до экрана должно быть как можно меньше, то есть

$$d_{min} = l. \quad (1)$$

Аналогичная ситуация наблюдается для случая собирающей линзы с  $F \geq l$ , так как в этом случае изображение в линзе также является мнимым, то есть

$$d_{min} = l. \quad (2)$$

Рассмотрим отдельно случай собирающей линзы с  $F < l$ . Предположим, что изображение источника на экране можно сфокусировать в точку, тогда должна выполняться формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{F}, \quad (3)$$

откуда получаем квадратное уравнение для

$$d^2 - ld + Fl = 0, \quad (4)$$

решение которого имеет вид

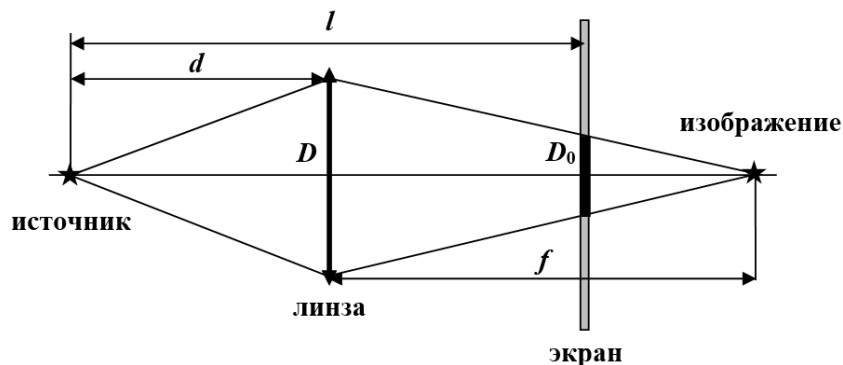
$$d_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l(l-4F)}}{2}. \quad (5)$$

Из формулы (5) следует, что изображение в виде точки можно получить на экране только тогда, когда

$$F < \frac{l}{4}, \quad (6)$$

при этом в решении (6) возможны оба знака, то есть  $d_{min} = d_{1,2}$ .

Наконец рассмотрим случай собирающей линзы, у которой  $\frac{l}{4} < F < l$ . В этом случае получается сходящийся пучок лучей (смотрите рисунок), который нельзя сфокусировать в точку.



В соответствии с формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (7)$$

Из подобия треугольников на рисунке заключаем, что диаметр пятна на экране  $D$  связан с диаметром линзы  $D_0$  пропорцией

$$\frac{D}{D_0} = \frac{f-(l-d)}{f}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) после преобразований получаем

$$\frac{D}{D_0} = 2\sqrt{\frac{l}{F}} - \frac{l}{F} + \left( \sqrt{\frac{l}{d}} - \sqrt{\frac{d}{F}} \right)^2. \quad (9)$$

Из формулы (9) заключаем, что размер пятна будет минимальным, когда выражение в круглых скобках правой части (9) обратится в ноль, то есть

$$d_{min} = \sqrt{lF}. \quad (10)$$

| Содержание   | Баллы      |
|--|------------|
| Рассеивающая линза и формула (1): $d_{min} = l$  | 0,2        |
| Собирающая линзы с $F \geq l$ и формула (2): $d_{min} = l$   | 0,2        |
| Формула (3): $\frac{1}{d} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{F}$   | 0,2        |
| Формула (4): $d^2 - ld + Fl = 0$   | 0,3        |
| Формула (5): $d_{min} = \frac{l \pm \sqrt{l(l-4F)}}{2}$  | 0,3        |
| Собирающая линза при условии в формуле (6): $F < \frac{l}{4}$  | 0,3        |
| Формула (7): $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$   | 0,3        |
| Формуле (8): $\frac{D}{D_0} = \frac{f-(l-d)}{f}$   | 0,3        |
| Формуле (9): $\frac{D}{D_0} = 2\sqrt{\frac{l}{F} - \frac{l}{F}} + \left(\sqrt{\frac{l}{d} - \frac{l}{F}}\right)^2$ | 0,3        |
| Формуле (10): $d_{min} = \sqrt{lF}$  | 0,3        |
| При условии: $\frac{l}{4} < F < l$   | 0,3        |
| <b>Итого</b>   | <b>3,0</b> |

## Задача 2. Пар против воздуха (10.0 балла)

2.1 До начала нагревания с одной стороны поршня имеется воздух, а с другой – насыщенный водяной пар. При нагревании системы вода начинает испаряться, давление насыщенных паров возрастает и поршень приходит в движение, так как зависимость давления воздуха определяется уравнением идеального газа, а давление насыщенных водяных паров зависит только от их температуры. Понятно, что движение поршня полностью прекратится в тот момент, когда вся вода в системе полностью испарится, так как в этот момент с обеих сторон поршня окажутся только газы, подчиняющиеся уравнению Менделеева-Клапейрона.

Начальное и конечное состояния воздуха связаны соотношением

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV_0}{4T}. \quad (1)$$

Для пара в начальный момент времени уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p_0 \frac{V_0}{2} = \frac{m_0}{\mu_w} RT_0, \quad (2)$$

а в момент прекращения испарения

$$p \frac{3V_0}{4} = \frac{m_0+m}{\mu_w} RT. \quad (3)$$

Решая совместно системы уравнений (1)-(3), находим

$$m_0 = \frac{m}{2} = 2,0 \text{ г}. \quad (4)$$

2.2 С одной стороны давление насыщенных водяных паров в начальный момент времени определяется приведенным в условии графиком зависимости, а с другой стороны оно описывается уравнением состояния идеального газа

$$p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0} T. \quad (5)$$

Таким образом, на приведенном в условии графике зависимости надо построить прямую

$$p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0 10^5} (t + 273.15), \quad (6)$$

пересечение которой с графиком давления насыщенных водяных паров определяет начальную температуру системы

$$t_0 = 1,4 \cdot 10^2 \text{°C}. \quad (7)$$

2.3 Из графика зависимости давления насыщенных паров от температуры получаем начальное давление в системе

$$p_0 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ Па.} \quad (8)$$

2.4 Аналогично 2.2, с одной стороны давление насыщенных водяных паров в начальный момент времени определяется приведенным в условии графиком зависимости, а с другой стороны оно описывается уравнением состояния идеального газа

$$p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0} T. \quad (9)$$

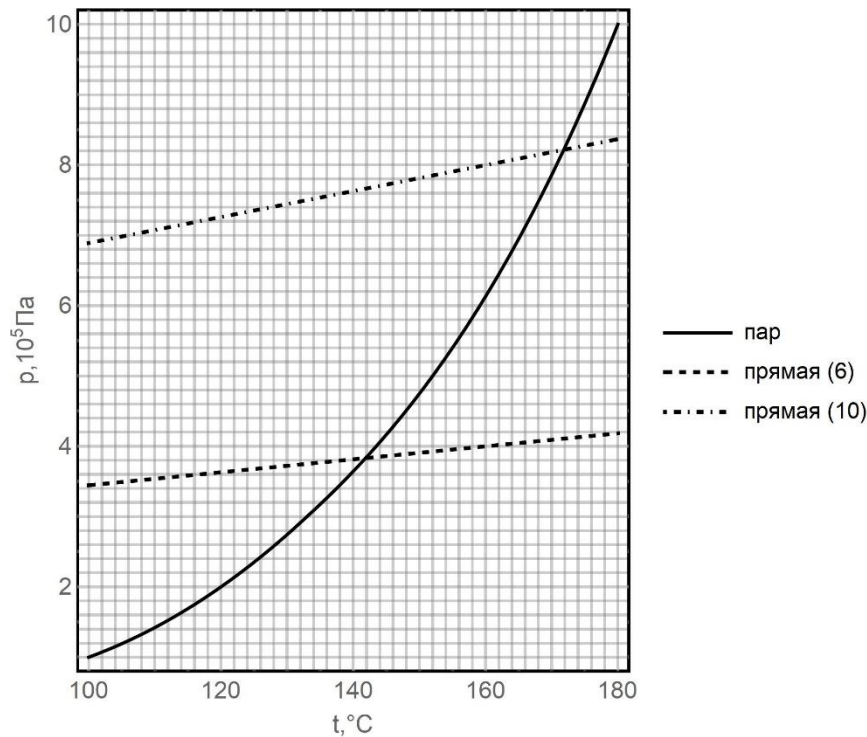
Таким образом на приведенном в условии графике зависимости надо построить прямую

$$p = \frac{m_0+m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0 10^5} (t + 273.15), \quad (10)$$

пересечение которой с графиком давления насыщенных водяных паров определяет конечную температуру системы

$$t = 1,7 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C.} \quad (11)$$

Все указанные построения показаны на рисунке ниже.



2.5 Масса воздуха определяется уравнением состояния и равна

$$M = \frac{\mu_a p_0 V_0}{2RT_0} = 3.2 \text{ г.} \quad (12)$$

2.6 Пусть объем, занимаемый воздухом, равен  $V$ , тогда пар занимает объем  $V_0 - V$ . Для воздуха справедливо уравнение идеального газа, которое может быть записано в форме

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV}{T}. \quad (13)$$

В свою очередь для пара также справедливо уравнение состояния Менделеева-Клайперона

$$p(V_0 - V) = \frac{m}{\mu_w} RT. \quad (14)$$

С другой стороны, давление насыщенного водяного пара определяется графиком, который формально можно записать как некоторую зависимость давления от температуры

$$p = p(T). \quad (15)$$

Удельная теплота парообразования включает в себя все возможные вклады, которые включают изменение внутренней энергии при фазовом превращении, а также работу против внешнего давления, поэтому количество теплоты записывается в виде

$$\delta Q = r \delta m, \quad (16)$$

откуда теплоемкость вычисляется по формуле

$$C_v = r \frac{\delta m}{\delta T}. \quad (17)$$

Формула (17) означает, что для вычисления теплоемкости пара с водой необходимо определить скорость испарения воды при изменении температуры. Из выражения (14) находим

$$\delta m = \frac{\mu_w(V_0 - V)}{RT} \delta p - \frac{\mu_w p}{RT} \delta V - \frac{\mu_w p(V_0 - V)}{RT^2} \delta T. \quad (18)$$

Давление в системе определяется также воздухом, поэтому из (13) следует

$$\frac{p_0 V_0}{2T_0} \delta T = V \delta p + p \delta V. \quad (19)$$

Наконец, так как давление в целом определяется насыщенным паром, то из (15) получаем

$$\delta p = \alpha \delta T, \quad (20)$$

в котором параметр  $\alpha$  определяется из приведенного в условии графика по коэффициенту наклона и равен

$$\alpha = 1.0 \cdot 10^4 \text{ Па/К} \quad (21)$$

для определенных в 2.2 и 2.3 начальных условий

$$p = p_0, T = T_0, V = \frac{1}{2} V_0. \quad (22)$$

Собирая вместе соотношения (16)-(22), окончательно получаем

$$C_v = r \frac{\mu_w V_0}{2RT_0} \left( 3\alpha - \frac{p_0}{T_0} \right) = 3.5 \cdot 10^2 \text{ Дж/К}. \quad (23)$$

**2.7** Воздух представляет собой двухатомный газ, молярная теплоемкость которого при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad (24)$$

так что изменение внутренней энергии газа равно

$$dU = \frac{M}{\mu_a} C_V \delta T. \quad (25)$$

Работа, совершаемая газом равна

$$\delta A = p \delta V, \quad (26)$$

а первое начало термодинамики дает

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (27)$$

С учетом выражений (19) и (20), окончательно находим

$$C_a = \frac{M}{\mu_a} C_V + \frac{V_0}{2} \left( \frac{p_0}{T_0} - \alpha \right) = -7.1 \text{ Дж/К}. \quad (28)$$

|     | Содержание  | Баллы |     |
|-----|---|-------|-----|
| 2.1 | Формула (1): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV_0}{4T}$                       | 0,3   | 1,5 |
|     | Формула (2): $p_0 \frac{V_0}{2} = \frac{m_0}{\mu_w} RT_0$                   | 0,3   |     |
|     | Формула (3): $p \frac{3V_0}{4} = \frac{m_0 + m}{\mu_w} RT$                  | 0,3   |     |
|     | Формула (4): $m_0 = \frac{m}{2}$  | 0,3   |     |
|     | Численное значение в формуле (4): $m_0 = 2,0 \text{ г}$                     | 0,3   |     |
| 2.2 | Формула (5): $p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0} T$                       | 0,3   | 1,0 |
|     | Формула (6): $p = \frac{m_0}{\mu_w} \frac{2R}{V_0 10^5} (t + 273.15)$       | 0,5   |     |
|     | Численное значение в формуле (7): $t_0 = 1,4 \cdot 10^2 \text{ °C}$         | 0,2   |     |
| 2.3 | Численное значение в формуле (8): $p_0 = 3.8 \cdot 10^5 \text{ Па}$         |       | 0,2 |
| 2.4 | Формула (9): $p = \frac{m_0 + m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0} T$                  | 0,3   | 1,0 |
|     | Формула (10): $p = \frac{m_0 + m}{\mu_w} \frac{4R}{3V_0 10^5} (t + 273.15)$ | 0,5   |     |
|     | Численное значение в формуле (11): $t = 1,7 \cdot 10^2 \text{ °C}$          | 0,2   |     |
| 2.5 | Формула (12): $M = \frac{\mu_a p_0 V_0}{2RT_0} = 3.2 \text{ г}$             | 0,3   | 0,5 |
|     | Численное значение в формуле (12): $M = 3.2 \text{ г}$                      | 0,2   |     |

|  |  |     |             |
|--|--|-----|-------------|
| 2.6  | Формула (13): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} = \frac{pV}{T}$  | 0,3 | 4,0         |
|  | Формула (14): $p(V_0 - V) = \frac{m}{\mu_w} RT$  | 0,3 |             |
|  | Формула (15): $p = p(T)$   | 0,3 |             |
|  | Формула (16): $\delta Q = r \delta m$  | 0,3 |             |
|  | Формула (17): $C_v = r \frac{\delta m}{\delta T}$  | 0,3 |             |
|  | Формула (18): $\delta m = \frac{\mu_w(V_0 - V)}{RT} \delta p - \frac{\mu_w p}{RT} \delta V - \frac{\mu_w p(V_0 - V)}{RT^2} \delta T$ | 0,4 |             |
|  | Формула (19): $\frac{p_0 V_0}{2T_0} \delta T = V \delta p + p \delta V$  | 0,4 |             |
|  | Формула (20): $\delta p = \alpha \delta T$   | 0,4 |             |
|  | Численное значение в формуле (21): $\alpha = 1.0 \cdot 10^4$ Па/К  | 0,4 |             |
|  | Формула (21): $p = p_0, T = T_0, V = \frac{1}{2} V_0$  | 0,3 |             |
|  | Формула (22): $C_v = r \frac{\mu_w V_0}{2RT_0} \left( 3\alpha - \frac{p_0}{T_0} \right)$   | 0,3 |             |
| Численное значение в формуле (22): $C_v = 3.5 \cdot 10^2$ Дж/К | 0,3  | 1,8 |             |
| 2.7  | Формула (24): $C_V = \frac{5}{2} R$  |     | 0,3         |
|  | Формула (25): $dU = \frac{M}{\mu_a} C_V \delta T$  |     | 0,3         |
|  | Формула (26): $\delta A = p \delta V$  |     | 0,3         |
|  | Формула (27): $\delta Q = dU + \delta A$   |     | 0,3         |
|  | Формула (28): $C_a = \frac{M}{\mu_a} C_V + \frac{V_0}{2} \left( \frac{p_0}{T_0} - \alpha \right)$                                    |     | 0,3         |
|  | Численное значение в формуле (28): $C_a = -7.1$ Дж/К   | 0,3 |             |
| <b>Итого</b>   |  |     | <b>10,0</b> |