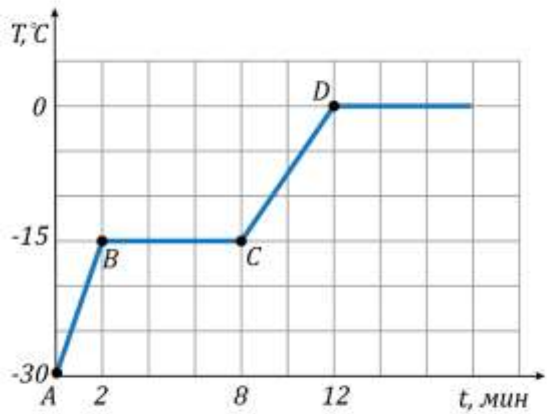
Задача 1. Разминка

1А. *Нагревание вещества*

Пусть мощность нагревателя равна $\boldsymbol{P}$, а массы вещества и льда $m_в$ и $m_л$ соответственно. На участке АВ происходит нагрев вещества и льда с тепловым балансом

$$P(t_B - t_A) = (c_в m_в + c_л m_л)(T_B - T_A).$$



На горизонтальном участке $\boldsymbol{BC}$ происходит плавление вещества при постоянной температуре. Значит,

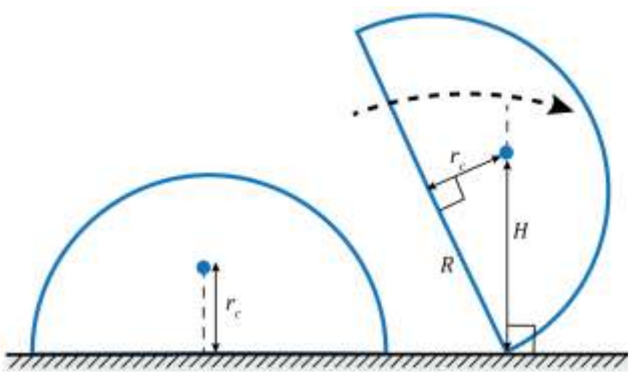
$$P(t_С - t_В) = Lm_в.$$

Решая уравнения вместе, получим:

$$L = \left(c_в + c_л \cdot \frac{m_л}{m_в}\right)(T_B - T_A) \cdot \frac{(t_С - t_В)}{(t_B - t_A)} = 3000 \cdot 15 \cdot \frac{6}{2} = 1.35 \cdot 10^5 Дж/кг.$$

1В. *Переворот чашки*

Пусть первоначальное положение центра масс полусферы находится на расстоянии $\boldsymbol{r_c}$ от горизонтальной поверхности. Для того, чтобы перевернуть чашку необходимо приподнять центр масс до высоты $\boldsymbol{H}$, как показано на рисунке, после этого чашка сама перевернется.

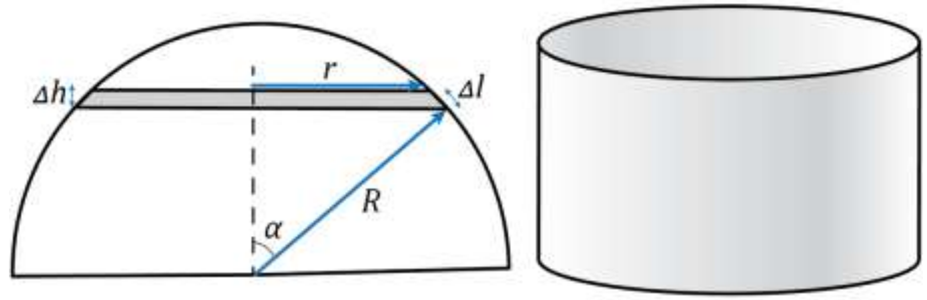


Тогда необходимая работа внешних сил равна

$$A = mg(H - r_c) = mg(\sqrt{R^2 + r_c^2} - r_c).$$

Теперь осталось найти положение центра масс $\boldsymbol{r_c}$. Его без труда можно было бы найти с помощью простейшего интегрирования. Однако большинство учащихся 9-х классов не знакомы с таким математическим аппаратом. Поэтому можно обойти интегрирование, разбив полусферу на тонкие кольца. Площадь одного такого кольца ΔS с радиусом r и шириной Δl равна

$$\Delta S = 2\pi r \Delta l = 2\pi R \cdot \Delta l sin\alpha = 2\pi R \Delta h.$$



Это эквивалентно разбиению вертикального цилиндра на тонкие колечки с высотой Δh. Центр масс цилиндра, из симметрии, находится посередине с

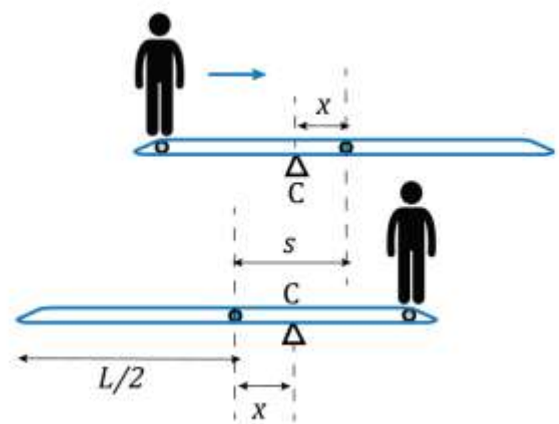
$$r_c = \frac{R}{2}.$$

Окончательно,

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{5}-1}{2} mgR}.$$

1С. Горизонтальные перемещения

При отсутствии внешних горизонатльных сил центр масс системы «платформа-человек» будет стоять на месте.



Расстояние от центра масс платфоры до первоначального центра масс системы x может быть найдено как

$$m\left(\frac{L}{2}-x\right)=Mx \quad \Rightarrow x=\frac{mL}{2(M+m)}.$$

Суммарное перемещение платформы s составит

$$s=2x=\frac{mL}{m+M}=25\ \text{м}.$$

Альтернативное решение, которое аналогично предыдущему, но связано напрямую с записью закона сохранения импульса системы. Пусть человек движется относительно платформы со скоростью $u_{\text{чп}}$, а платформа перемещается относительно Земли со скоростью $v_{\text{пз}}$. Тогда, скорость человека относительно Земли будет равна

$$u_{\text{чз}}=u_{\text{чп}}-v_{\text{пз}}.$$

По закону сохранения импульса:

$$0=mu_{\text{чз}}-Mv_{\text{пз}}.$$

Обьединяя оба уравнения и умножая обе стороны на небольшой промежуток времени Δt, получим следующее выражение

$$m\cdot u_{\text{чп}}\Delta t=(M+m)\cdot v_{\text{пз}}\Delta t.$$

Суммирование небольших перемещений приводит к требуемым результатам, где

$$\sum u_{\text{чп}}\Delta t=L; \qquad \sum v_{\text{пз}}\,\Delta t=s.$$

Откуда

$$s=\frac{mL}{m+M}=25\ \text{м}.$$

Несмотря на то, что второе решение более длинное и запутанное, оно полезно для тестирования идеи решения следующей задачи, являясь подсказкой для более сложного пункта.

Часть 1D. Перемещения по полуокружности

Рассмотрим момент, когда человек прошел некоторое расстоние $\boldsymbol{r\varphi}$, в то время как платформа повернулась на угол $\boldsymbol{\theta}$. При отсутствии трения или других сил, которые могут создать внешний момент сил, суммарный момент импульса системы будет сохраняться:

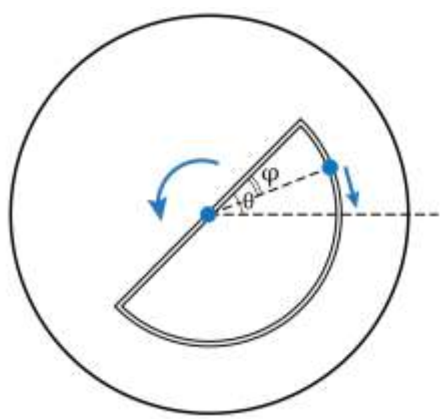
$$mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{d\varphi}{dt}\right)+\frac{MR^2}{2}\frac{d\theta}{dt}=0.$$

Разделяя переменные и суммируя, получим

$$\sum d\theta=\frac{2mr^2}{2mr^2+MR^2}\sum d\varphi,$$

или

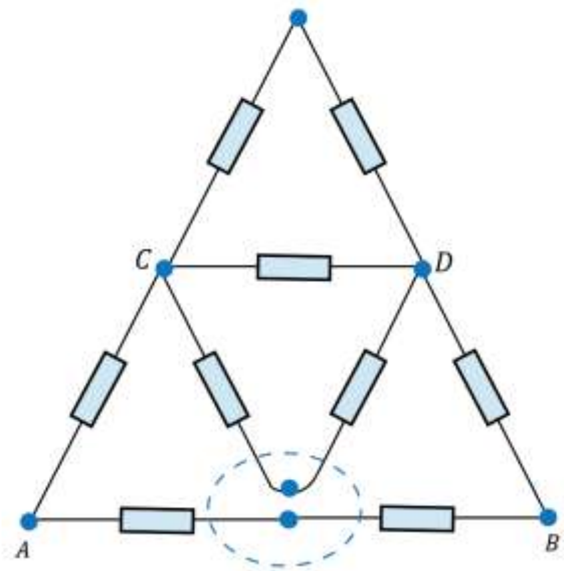
$$\boxed{\theta=\frac{2mr^2}{2mr^2+MR^2}\cdot\pi}.$$



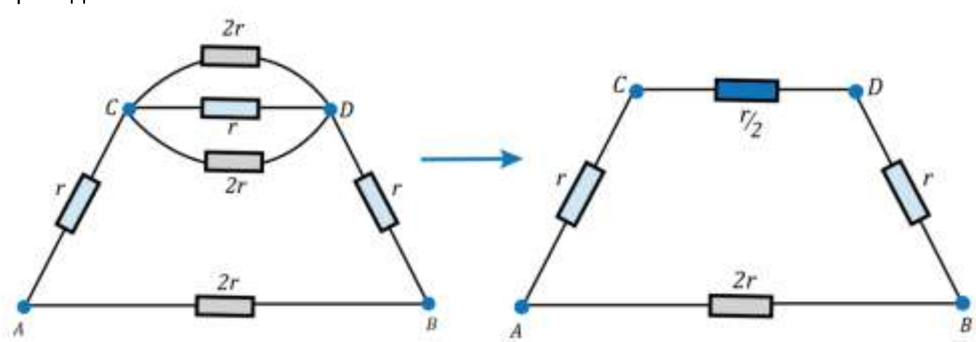
Задача 2. Резисторы

2A. Равносторонние треугольники

Наиболее простой путь решения заключается в выделении точки, которая может быть поделена на две с одинаковыми потенциалами.



Далее, используем формулы для параллельного и последовательного соединения проводников:

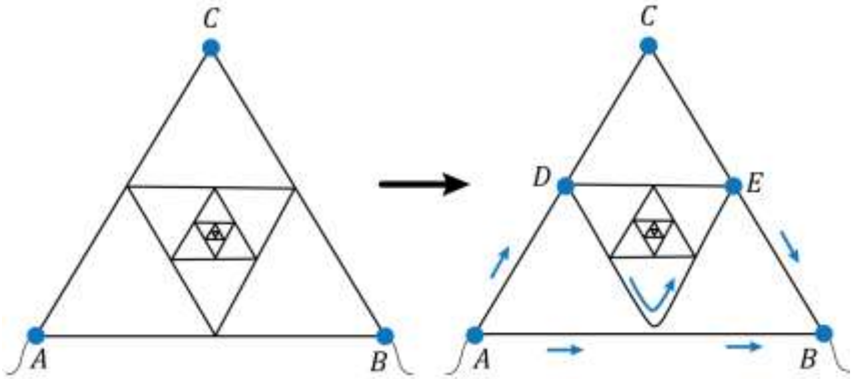


Окончательно,

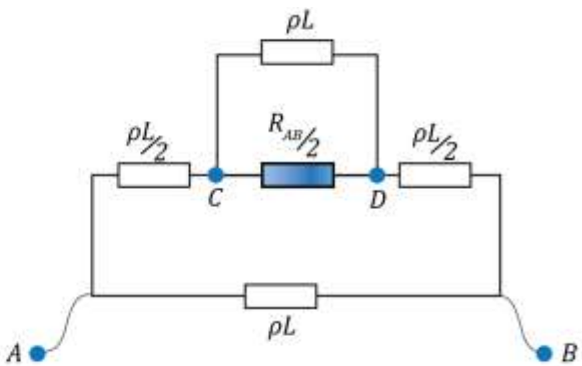
$$\boxed{R_1=\frac{2.5r\cdot 2r}{2.5r+2r}=\frac{10}{9}r\approx 1.1\ \text{Ом}}.$$

2B. Треугольный фрактал

По аналогии с предыдущей задачей, нижняя средняя точка соединения может быть разделена, как показано на нижеследующем рисунке.



В таком случае система между точками D и E, такая же как и между A и B с той лишь разницей, что все длины короче в два раза, что эквивалентно следующей схеме.



Используя формулы параллельного и последовательного подключения проводников, получим следующее уравнение:

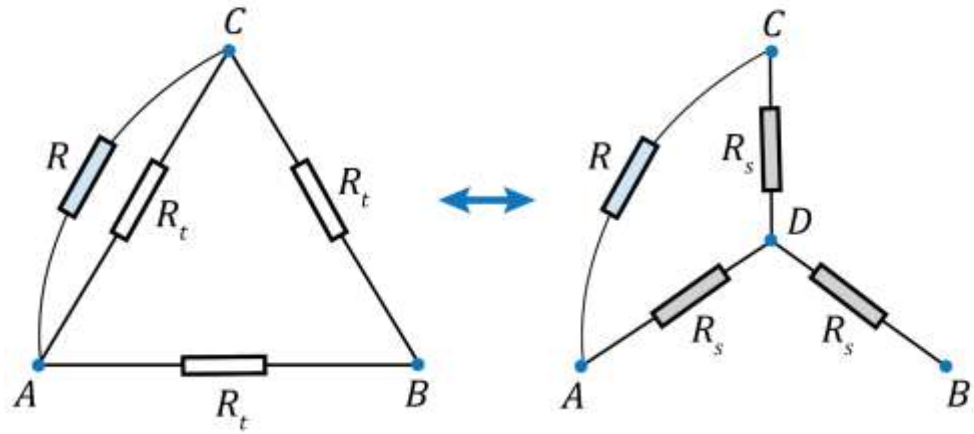
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{\rho L} + \frac{1}{\rho L + \frac{\rho L \cdot R_{AB}/2}{\rho L + R_{AB}/2}},$$

положительный корень которого равен

$$\boxed{R_2 = R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}\rho L \approx 0.55\ \text{Ом}}.$$

2C. Фрактал с нагрузкой

Из симметрии фрактал можно заменить на три одинаковых резистора, соединенных по сторонам равностороннего треугольника с сопротивлениями R_t или в виде звезды с сопротивлениями R_S.



Эти сопротивления могут быть выражены через R_2 как

$$R_2 = \frac{2R_t \cdot R_t}{2R_t + R_t} \ \Rightarrow\ R_t = \frac{3}{2}R_2,$$

или

$$R_2 = 2R_S \Rightarrow\ R_s = \frac{R_2}{2}.$$

Используя формулы для параллельного и последовательного соединения проводников, окончательно получим

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_t + \frac{R_t \cdot R}{R_t + R}},$$

или

$$R_3 = \frac{R_S \cdot (R + R_S)}{R + 2R_S} + R_S.$$

Оба уравнения дают одинаковый результат:

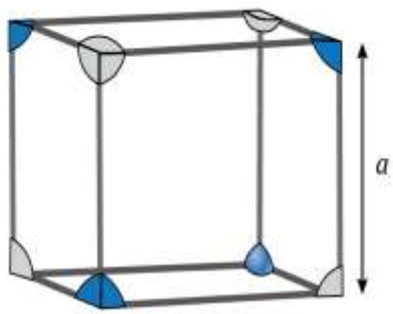
$$\boxed{R_3 = 0.5\ \text{Ом}}.$$

Задача 3. Кристаллы

3А. Фторид лития LiF

Мысленно разрежен кристаллическую решетку по плоскостям симметрии, проходящим через ее атомы, выделив одну элементарную кубическую ячейку со стороной $\boldsymbol{a}$. Суммарная масса вещества заключенная внутри такой ячейки равна

$$M = 4\cdot\left(\frac{1}{8}m_{Li}\right) + 4\cdot\left(\frac{1}{8}m_F\right) = \frac{(m_{Li}+m_F)}{2}.$$



По определению плотности вещества

$$\rho = \frac{M}{a^3} = \frac{m_{Li}+m_F}{2a^3} = \frac{\mu_{Li}+\mu_F}{2N_A a^3},$$

$$\boxed{a = \sqrt[3]{\frac{\mu_{Li}+\mu_F}{2\rho N_A}} = 0.2\cdot 10^{-9}m}.$$

3В. Сульфид цинка ZnS

Плотность вещества $\boldsymbol{\rho}$ определяется как суммарная масса $\boldsymbol{M}$ заключенная в единице объема $\boldsymbol{a^3}$:

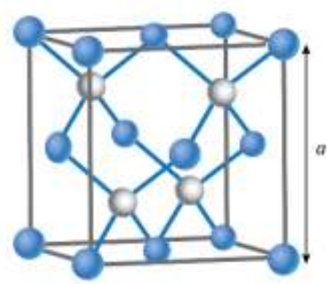
$$\rho = \frac{M}{a^3}.$$

Пусть масса одного атома цинка и масса атома серы равны m_{Zn} и m_S соответственно, так что

$$m_{zn} = \frac{\mu_{Zn}}{N_A};\quad m_S = \frac{\mu_S}{N_A}.$$

Суммарная масса вещества, заключенная в кубе со стороной $\boldsymbol{a}$**,** складывается из:

- Четырех молекул серы, которые полностью находятся внутри этого куба.
- Восьми молекул цинка в вершинах куба.
- Шести молекул цинка по бокам куба.



Учитывая вклад от каждого элемента после симметричного рассечения, суммарная масса вещества внутри куба равна

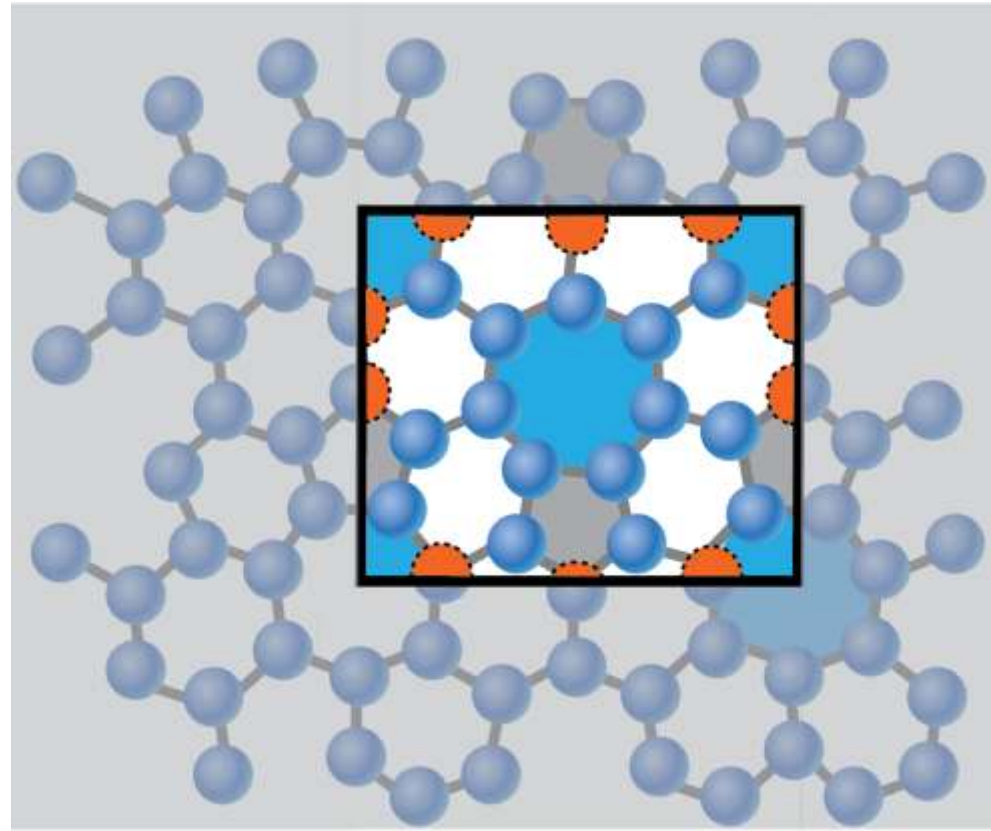
$$M = 4\cdot m_S + 8\cdot\left(\frac{1}{8}m_{Zn}\right) + 6\cdot\left(\frac{1}{2}m_{Zn}\right) = 4(m_S + m_{Zn}).$$

Окончательно,

$$\boxed{a = \sqrt[3]{\frac{4(\mu_S+\mu_{Zn})}{\rho N_A}} = 0.62\text{ нм}}.$$

3С. Фаграфен

Выделим элементарную повторяющуюся ячейку из бесконечной плоской кристаллической структуры фаграфена.



Несмотря на то, что атомы поделены не ровно пополам, границами прямоугольника каждой части атома, показанной оранжевым, соответствует симметричная часть с другой стороны, так что вместе они собираются в один единный атом.

Таким образом, внутри выделенного прямоугольника заключены 15 целых атомов и 5 собранных из частей, т.е. суммарная масса M, заключенная внутри элементарной повторяющейся ячейки равна

$$M = m\cdot(15+5) = 20m.$$

Площадь данного прямоугольника может быть найдена как сумма площадей нескольких многоугольников.

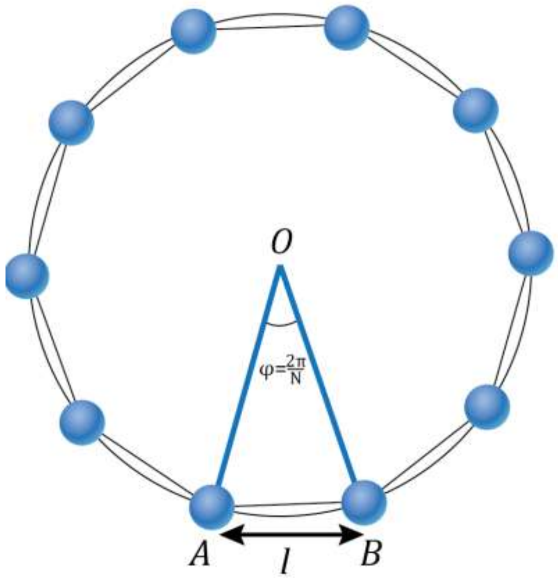
- Два семиугольника (один по центру и один собранных из кусков).
- Два пятиугольника (один целый и один собранный из двух симметричных половинок).
- Шесть шестиугольников (четыре целых и два собранных из кусочков).

Таким образом, площадь элементарной ячейки A равна

$$A = 2S_7 + 2S_5 + 6S_6.$$

Не все многоугольники идеальны, но как видно из рисунка площадь каждого из многоугольника может быть оценена с хорошей точностью как площадь равностороннего многоуольника.

Здесь S_N – площадь многоугольника с N сторонами равными l, которая может быть найдена делением многоульника на N равнобедренных треугольников.



$$S_N = N \cdot S_{AOB} = N \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l/_2}{tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{Nl^2}{4tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}.$$

Подставляя в предыдущее уравнение, получаем

$$A = \frac{l^2}{2}\left(\frac{7}{tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{5}{tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{18}{tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right).$$

Окончательно, поверхностная плотность фаграфена равна

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{A} = \frac{40m}{l^2\left(\frac{7}{tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{5}{tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{18}{tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)} = 2.0 \cdot 10^{-3}\text{кг/м}^2}.$$

Схема оценивания Республиканской олимпиады по физике (2019)
Теоретический тур, 9 класс

Проверяющий: [ ] Код участника: [ ]

Для проверяющих: в последнюю пустую ячейку нужно ставить либо

- ***Галочку,*** *если пункт решен* ***правильно.***
- ***Ноль,*** *если решение* ***неправильно.***
- ***Минус,*** *если* ***не было попытки*** *решать этот пункт в принципе.*

Если задача решена каким- либо альтернативным (правильным) способом, не по разбаловке, то просто засчитать все пункты из разбаловки

Частичные баллы не ставятся. Отдельные, очень специфические случаи могут быть рассмотрены в пользу участника.

За верные уравнения, но ***неправильные численные значения снимается -0.1 балл.***

1A. Нагревание вещества [2.0 балла]

M1	Правильно записанный тепловой баланс для участка AB: $P(t_B - t_A) = (c_в m_в + c_л m_л)(T_B - T_A)$	0.75	
M2	Правильно записанный тепловой баланс для участка BC: $P(t_C - t_B) = \mathrm{L} m_в$	0.75	
M3	Окончательный (правильный) ответ: $\mathrm{L} = \left(c_в + c_л \cdot \frac{m_л}{m_в}\right)(T_B - T_A) \cdot \frac{(t_C - t_B)}{(t_B - t_A)} = 3000 \cdot 15 \cdot \frac{6}{2} = 1.35 \cdot 10^5$Дж/кг	0.5	

1B. Переворот чашки [3.0 балла]

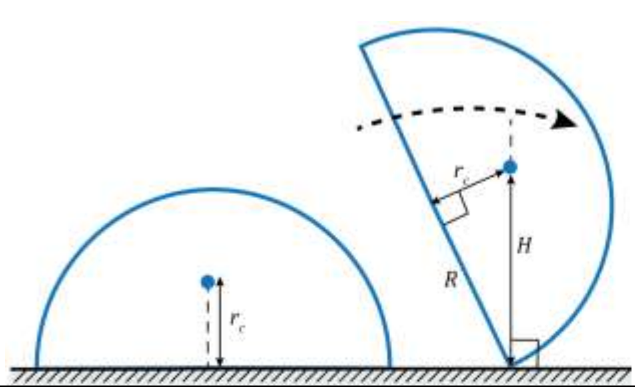
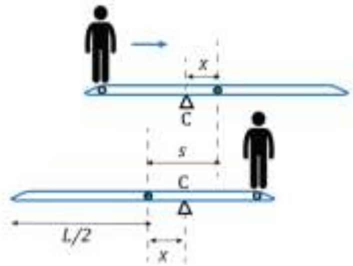
M4	Схематический рисунок, либо описание ситуации словами об условии минимальной работы, соответствующей на приподнятие центра масс полусферы до максимального положения 	1.2	
M5	Уравнение для необходимой работы: $A = mg(H - r_c) = mg(\sqrt{R^2 + r_c^2} - r_c)$	0.8	
M6	Найден центр масс полусферы любым из способов, включая интегрирование: $r_c = \frac{R}{2}$	0.8	
M7	Окончательный ответ: $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2} mgR$	0.2	

Схема оценивания Республиканской олимпиады по физике (2019)
Теоретический тур, 9 класс

Проверяющий: ____________ Код участника: ____________

1C. Горизонтальные перемещения [2.0 балла]

M8	Приведен схематический рисунок, либо описана словами суть феномена, объясняющая, почему происходит такие передвижения: 	1.0	
M9	Расчет положения центр масс системы: $x = \frac{mL}{2(M+m)}$	0.5	
M10	Окончательный ответ для перемещения платформы: $s = 2x = \frac{mL}{m+M}$	0.5	

1D. Перемещения по полуокружности [3.0 балла]

M11	Упоминание о законе сохранения момента импульса (даже если сам закон записан неправильно)	1.0	
M12	Правильное уравнение закона сохранения момента импульса с учетов относительных перемещений: $mr^2\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{MR^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = 0$	1.0	
M13	Разделение переменных и суммирование приводящие к результату: $$\theta = \frac{2mr^2}{2mr^2 + MR^2} \cdot \pi$$	1.0	

2A. Равносторонние треугольники [3.0 балла]

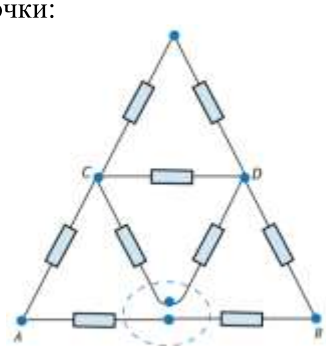
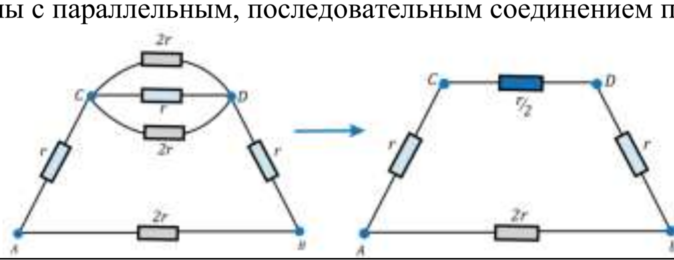
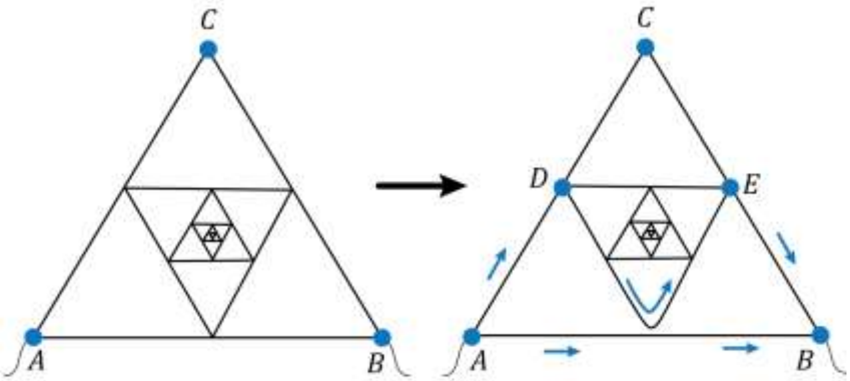
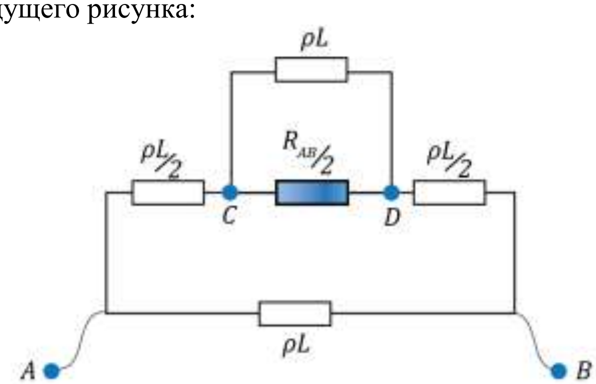
M14	Идея с разделением нижней точки: 	1.5	
M15	Упрощение схемы с параллельным, последовательным соединением проводников: 	1.0	
M16	Окончательный ответ: $R_1 = \frac{2.5r \cdot 2r}{2.5r + 2r} = \frac{10}{9} r \approx 1.1$ Ом	0.5	

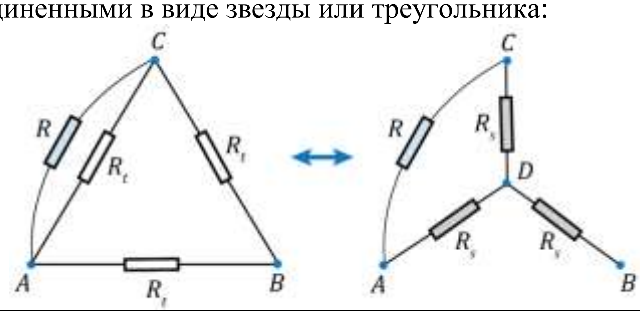
Схема оценивания Республиканской олимпиады по физике (2019)
Теоретический тур, 9 класс

Проверяющий: | Код участника:

2B. Треугольный фрактал [4.0 балла]

M17	Идея с разделением нижней точки: 	1.0	
M18	Идея эквивалентности схемы с половинным эффективным сопротивлением между точками DE предыдущего рисунка: 	1.5	
M19	Правильное применение формулы последовательного и параллельного соединения проводников: $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{\rho L} + \frac{1}{\rho L + \frac{\rho L \cdot R_{AB}/2}{\rho L + R_{AB}/2}}$	1.0	
M20	Окончательный ответ: $R_2 = R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}\rho L \approx 0.55$ Ом	0.5	

2C. Фрактал с нагрузкой [3.0 балла]

M21	Идея замены сложного фрактала на эквивалентные схемы с тремя одинаковыми резисторами, соединенными в виде звезды или треугольника: 	1.5	
M22	Формулы для резисторов из треугольника или звезды: $R_t = \frac{3}{2}R_2$ или $R_s = \frac{R_2}{2}$	0.5	

M23	Правильные формулы для последовательного или параллельного соединения для схем	0.5	

Проверяющий: Код участника:

	с треугольником или звездой: $$\frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_t}+\frac{1}{R_t+\frac{R_t\cdot R}{R_t+R}};\quad \text{или}\quad R_3=\frac{R_s\cdot(R+R_s)}{R+2R_s}+R_s$$		
M24	Окончательный результат: $R_3 = 0.5$ Ом	0.5	

3A. Фторид лития LiF [2.0 балла]

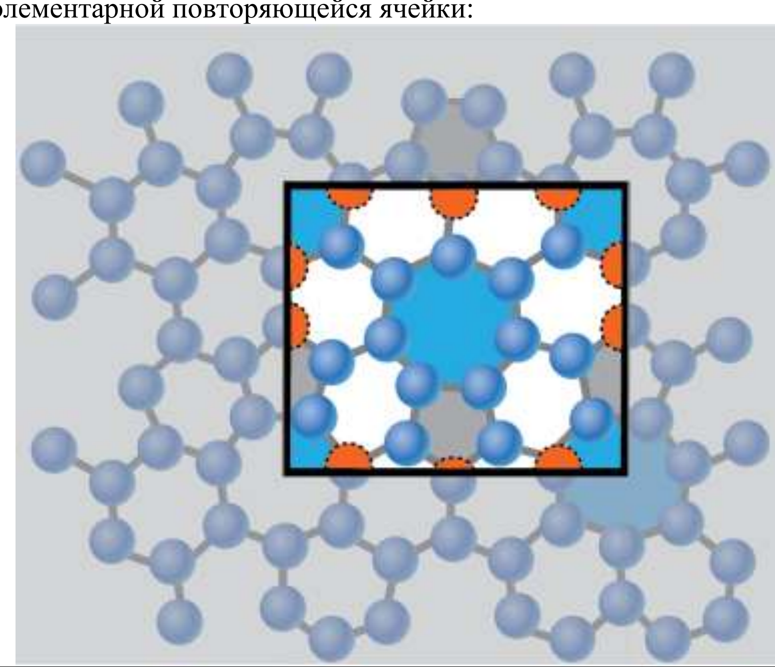
M25	Определение плотности как $\rho=\frac{M}{a^3}$	0.3	

M26	Суммарная масса, заключенная внутри одной элементарной ячейки: $$M=4\cdot\left(\frac{1}{8}m_{Li}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{8}m_F\right)=\frac{(m_{Li}+m_F)}{2}$$	1.0	
M27	Окончательный результат: $a=\sqrt[3]{\frac{\mu_{Li}+\mu_F}{2\rho N_A}}=0.2\cdot10^{-9}m$	0.7	

3B. Сульфид цинка ZnS [4.0 балла]

M28	Определение плотности как: $\rho=\frac{M}{a^3}$	0.3	
M29	Четыре молекул серы, которые полностью находятся внутри этого куба: $4\cdot m_S$	1.0	
M30	Восемь молекул цинка в вершинах куба: $8\cdot\left(\frac{1}{8}m_{Zn}\right)$	1.0	
M30	Шесть молекул цинка по бокам куба: $6\cdot\left(\frac{1}{2}m_{Zn}\right)$	1.0	
M31	Суммарная масса внутри куба: $M=4\cdot m_S+8\cdot\left(\frac{1}{8}m_{Zn}\right)+6\cdot\left(\frac{1}{2}m_{Zn}\right)=4(m_S+m_{Zn})$	0.2	
M32	Окончательный ответ: $a=\sqrt[3]{\frac{4(\mu_S+\mu_{Zn})}{\rho N_A}}=0.62$ нм	0.5	

3C. Фаграфен [4.0 балла]

M33	Выделение элементарной повторяющейся ячейки: 	0.5	
M34	Внутри выделенного прямоугольника заключены 15 целых атомов и 5 собранных из	1.0	

Проверяющий: | Код участника:

	частей, т.е. суммарная масса M, заключенная внутри элементарной повторяющейся ячейки равна $$M = m \cdot (15+5) = 20m$$		
M35	Элементарная ячейка содержит два семиугольника $\boldsymbol{2S_7}$ (один по центру и один собранных из кусков)	0.4	
M36	Элементарная ячейка содержит два пятиугольника $\boldsymbol{2S_5}$ (один целый и один собранный из двух симметричных половинок)	0.4	
M37	Элементарная ячейка содержит шесть шестиугольников $\boldsymbol{6S_6}$ (четыре целых и два собранных из кусочков)	0.4	
M38	Окончательный ответ для площади элементарной ячейки $$A = 2S_7 + 2S_5 + 6S_6$$	0.3	
M39	Площадь N-угольника с одинаковыми сторонами: $$S_N = N \cdot S_{AOB} = N \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l/2}{tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{Nl^2}{4tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$	0.5	
M40	Окончательный ответ для поверхностной плотности: $$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{40m}{l^2\left(\frac{7}{tan\left(\frac{\pi}{7}\right)} + \frac{5}{tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} + \frac{18}{tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)} = 2.0 \cdot 10^{-3}\text{кг/м}^2$$	0.5	