Решение задач. 9 класс.

Задача 1. «Солянка» (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

При вытекании воды из сосуда со скоростью v, возникает сила реакции R, которая равна изменению импульса вытекающей воды, то есть

$$R\Delta t = \rho s v^2 \Delta t, \qquad (1) \quad [0.25]$$

откуда

$$R = \rho s v^2. \qquad (2) \quad [0.25]$$

Здесь ρ – плотность воды.

По известной формуле Торричелли

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (3) \quad [0.25]$$

где h – высота воды в сосуде.

Таким образом, сила реакции оказывается равной

$$R = 2\rho s g h \qquad (4) \quad [0.25]$$

и направленной под углом α к горизонту.

На сосуд действует четыре силы: сила тяжести mg, направленная вертикально вниз; сила реакции N со стороны стола, направленная вертикально вверх; сила трения $F_{тр}$, направленная горизонтально; и сила реакции R.

Запишем условия неподвижности сосуда. Для этого проекции сил на все направления должны обратиться в нуль. В проекции на вертикальное направление

$$N - mg - R\sin\alpha = 0 \qquad (5) \quad [0.5]$$

и на горизонтальное направление

$$R\cos\alpha - F_{тр} = 0. \qquad (6) \quad [0.5]$$

Для силы трения справедлив закон Кулона-Амонтона, который для равновесия записывается в виде

$$F_{тр} \le \mu N. \qquad (7) \quad [0.25]$$

Из уравнений (4)-(7), получаем

$$\mu \ge \frac{2\rho s h\cos\alpha}{m + 2\rho s h\sin\alpha}. \qquad (8) \quad [0.25]$$

Принимая во внимание, что масса сосуда сосредоточена в воде

$$m = \rho S h, \qquad (9) \quad [0.25]$$

окончательно получаем минимальное значение коэффициента трения

$$\mu_{\min} = \frac{2s\cos\alpha}{S + 2s\sin\alpha}. \qquad (10) \quad [0.25]$$

Часть 1.2 (3.5 балла)

Сопротивление проволоки равно

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{4l}{\pi d^2}, \qquad (1) \quad [0.5]$$

Количество выделяемой в проволоке теплоты равно

$$P = I^2 R, \qquad (2) \quad [0.5]$$

а количество отводимого тепла по определение есть

$$P' = \alpha \Delta T^2 S'. \qquad (3) \quad [0.25]$$

где площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$S' = \pi d l, \qquad (4) \quad [0.25]$$

а ΔT – разность температур проволоки и окружающего воздуха.

В установившемся состоянии

$$P = P'. \qquad (5) \quad [0.5]$$

Собирая выражения (1)-(6), находим

$$\Delta T^2 d^3 = \text{const}, \qquad (6) \quad [0.5]$$

поэтому

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 2\sqrt{2}. \qquad (7) \quad [0.25]$$

При увеличении температуры проволока удлиняется на величину

$$\Delta l = l_0 \beta \Delta T, \qquad (8) \quad [0.25]$$

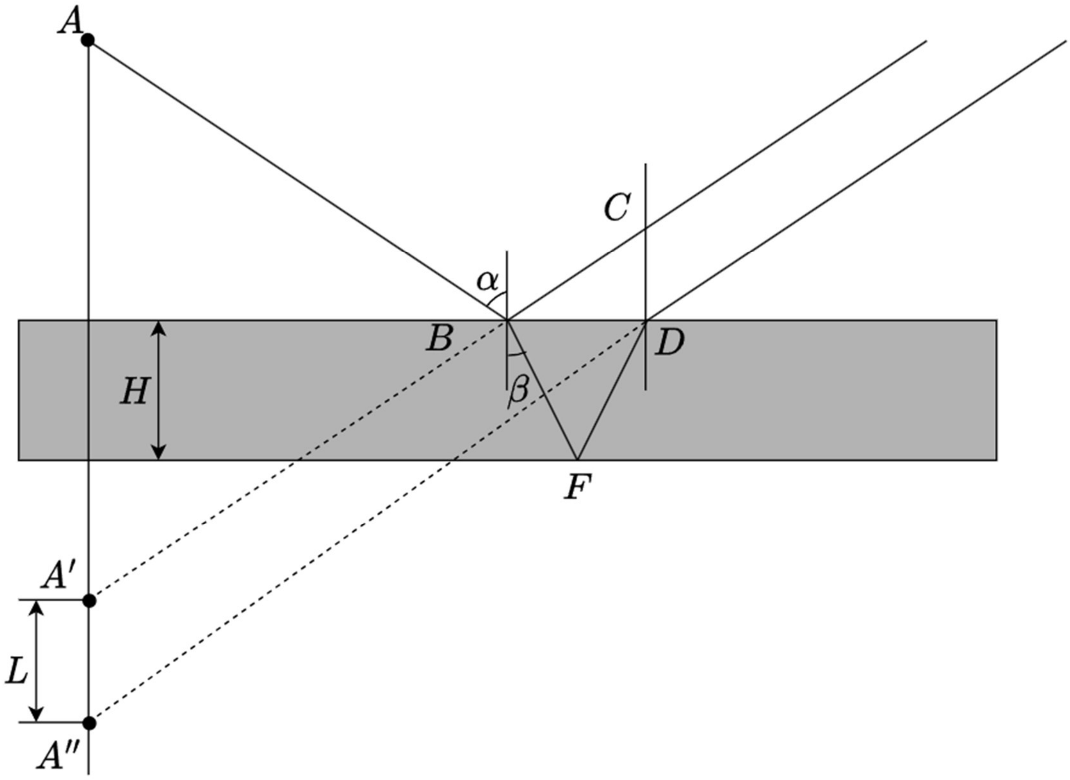
где l_0 – начальная длина проволоки, β – температурный коэффициент линейного расширения.

Из формулы (9) следует, что

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 2\sqrt{2}. \qquad (9) \quad [0.25]$$

Часть 1.3 (3.5 балла)

Для решения задачи выполним построение лучей, показанное на рисунке ниже



Рассмотрим один из лучей, падающих на пластинку под малым углом, так как при рассматривании собственного изображения мы смотрим под практически прямым углом к пластине. Луч, частично отразившись, сформирует изображение A', а частично преломившись на первой поверхности, отразившись от второй и выйдя наружу, сформирует второе изображение A''. Последующие изображения сформируются после отражений от верхней и нижней поверхностей, и будут отстоять на том же расстоянии L друг от друга, показанном на рисунке.

По закону преломления света

$$\sin\alpha = n \sin\beta\,. \qquad (1) \quad [1]$$

Расстояние BD равно

$$BD = 2H\tan\beta\,, \qquad (2) \quad [0.75]$$

а искомое расстояние есть

$$L = CD = BD\cot\alpha\,. \qquad (3) \quad [0.75]$$

При малости углов необходимо пользоваться соотношениями

$$\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \qquad (4) \quad [0.5]$$

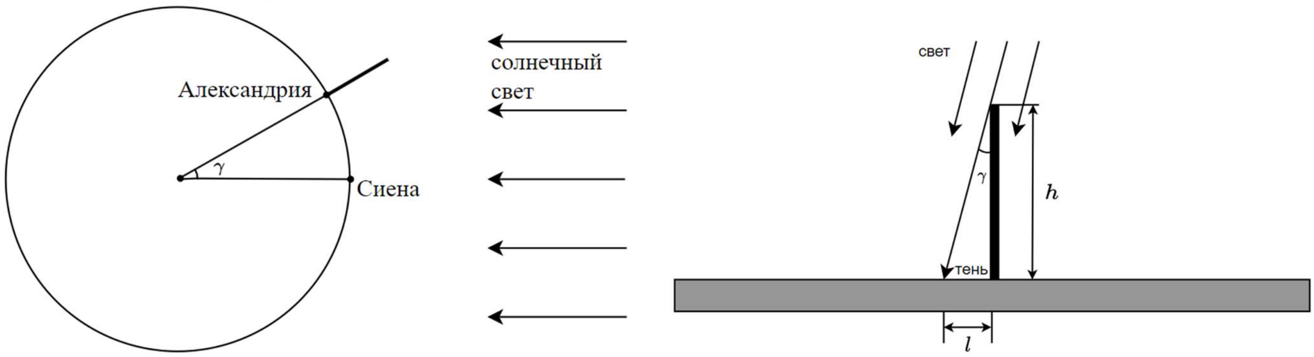
и аналогично для углов β.

Из соотношений (1)-(4), получаем

$$L = \frac{2H}{n} = 20 \text{ см}. \qquad (5) \quad [0.5]$$

Задача 2. Параметры солнечной системы (10.0 балла)

2.1. На рисунке ниже показано, как появляется тень в Александрии, тогда как в Сиене тень полностью отсутствует.



Пусть радиус Земли равен $R_{\text{З}}$, тогда из взаимного расположения городов на расстоянии L друг от друга следует, что

$$\gamma = \frac{L}{R_{\text{З}}}. \qquad (1) \quad [0.25]$$

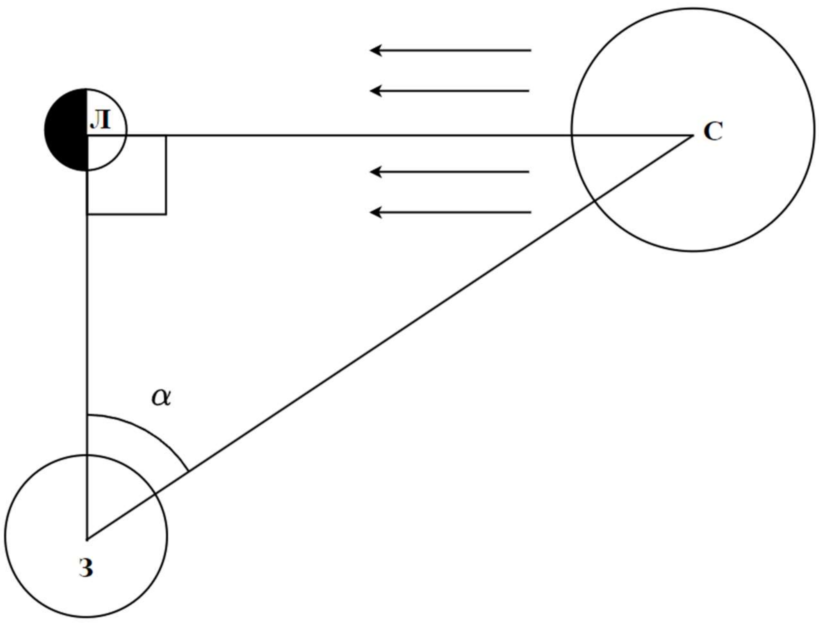
С другой стороны, размер тени длиной $l = 12.3$ см от столба высотой $h = 1$ м в Александрии равен

$$l = h \tan\gamma\,. \qquad (2) \quad [0.25]$$

Из соотношений (1) и (2), находим радиус Земли

$$R_{\text{З}} = \frac{L}{\arctan(l/h)} = 6536 \text{ км}. \qquad (3) \quad [0.5]$$

2.2. Из построения на рисунке, выполненного ещё Аристархом, следует, что угол ЗЛС является прямым, а угол ЛЗС по измерениям равен α.

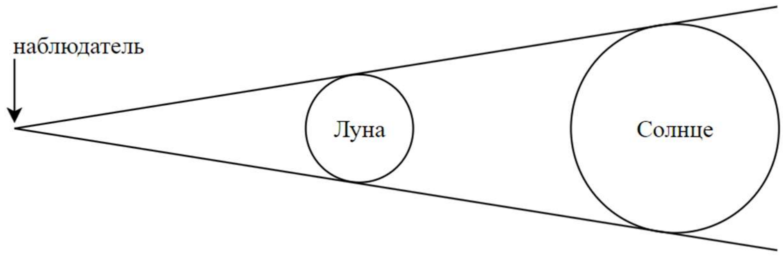


На самом деле расстояние между Землей и Луной на рисунке сильно преувеличено. Из прямоугольного треугольника ЛЗС получаем

$$\frac{R_{\text{ЗЛ}}}{R_{\text{ЗС}}} = \cos\alpha = 2.5 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{400} \qquad (4) \quad [0.75 + 0.25]$$

2.3. Поскольку солнечное затмение длится очень малый промежуток времени, а диск Луны полностью закрывает Солнце, то это означает, что видимый угловой размер этих объектов практически совпадает, поэтому

$$\frac{R_{\text{С}}}{R_{\text{Л}}} = \frac{R_{\text{ЗС}}}{R_{\text{ЗЛ}}} = 400. \qquad (5) \quad [0.75 + 0.25]$$



2.4. По условию имеем

$$\frac{С_1С_2}{Л_1Л_2} = m = 400 \quad \text{и} \quad \frac{Т_1Т_2}{Л_1Л_2} = n = \frac{8}{3}. \qquad (6) \quad [0.25]$$

Отметим, что на рисунке в условии явно использовано то, что угловые размеры Солнца и Луны равны, поэтому точка пересечения отрезков $Л_1С_2$ и $Л_2С_1$ точно проходит через центр Земли З.

Рассчитаем длину отрезка $Л_1Т_2$ двумя способами. Прямое вычисление дает

$$Л_1Т_2 = Л_1Л + ЛТ_2 = \frac{1}{2}Л_1Л_2 + \frac{1}{2}Т_1Т_2, \qquad (7)$$

или воспользовавшись соотношениями (6), получаем

$$Л_1Т_2 = \frac{1}{2}Л_1Л_2 + \frac{n}{2}Л_1Л_2 = \frac{n+1}{2m}С_1С_2. \qquad (8) \quad [0.25]$$

С другой стороны, воспользуемся подобием треугольников $Т_2Л_1С_2$ и $З_2ЗС_2$ и получаем

$$\frac{Л_1Т_2}{ЗЗ_2} = \frac{Л_1С_2}{ЗС_2} = \frac{Л_1З + ЗС_2}{ЗС_2} = 1 + \frac{Л_1З}{ЗС_2} = 1 + \frac{ЛЗ}{СЗ}, \qquad (9)$$

или воспользовавшись соотношением (5), находим

$$Л_1Т_2 = \frac{m+1}{m}ЗЗ_2 = \frac{m+1}{2m}З_1З_2. \qquad (10) \quad [0.25]$$

Приравнивая выражения (7) и (10), окончательно записываем отношение радиусов Земли и Солнца в виде

$$\frac{R_З}{R_С} = \frac{n+1}{m+1} = 9.14 \cdot 10^{-3}. \qquad (11) \quad [0.25]$$

2.5. Воспользовавшись выражениями (3) и (11), находим радиус Солнца

$$R_С = 7.15 \cdot 10^5 \text{ км}. \qquad (12) \quad [0.25]$$

Далее по формуле (5) вычисляется радиус Луны

$$R_Л = 1790 \text{ км}. \qquad (13) \quad [0.25]$$

Воспользовавшись тем, что угловой размер Солнца составляет 0.53°, найдем расстояние от Земли до Солнца

$$R_{ЗС} = \frac{2R_С}{\tan 0.53°} = 1.55 \cdot 10^8 \text{ км}, \qquad (14) \quad [0.25]$$

а расстояние от Земли до Луны определим по формуле (4)

$$R_{ЗЛ} = 3.86 \cdot 10^5 \text{ км}. \qquad (15) \quad [0.25]$$

Примечание: полный балл за правильные числовые значения даются только если были использованы вышеуказанные уравнения.

2.6. Рассмотрим движение одного из объектов массой m_1. Его расстояние до центра масс равно

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}. \qquad (16) \quad [0.25]$$

Это и есть радиус окружности, по которой он двигается с периодом T.

Сила взаимодействия между телами описывается законом Ньютона и равна

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (17) \quad [0.5]$$

По второму закону Ньютона

$$m_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_1 = F. \qquad (18) \quad [0.5]$$

Совместное решение уравнений (16)-(18) дает

$$m = m_1 + m_2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{r^3}{G}. \qquad (19) \quad [0.25]$$

2.7. Применяя формулу (19) к движению Земли и Луны, получаем их суммарную массу

$$M_З + M_Л = 6.13 \cdot 10^{24}\ \text{кг}. \qquad (20) \quad [0.5]$$

Примечание: полный балл за правильные числовые значения даются только если были использованы вышеуказанные уравнения.

2.8. Применяя формулу (19) к движению центра масс Земли и Луны вокруг Солнца, получаем их суммарную массу

$$M_С + M_З + M_Л = 2.19 \cdot 10^{30}\ \text{кг}. \qquad (21) \quad [0.5]$$

Примечание: полный балл за правильные числовые значения даются только если были использованы вышеуказанные уравнения.

2.9. Смещение Солнца относительно небесной сферы обусловлено тем, что не Луна обращается вокруг Земли, а Земля и Луна обращаются вокруг общего центра масс. Таким образом, в течении лунного месяца происходит смещение Земли относительно линии Солнце – центр масс системы Земля+Луна. Это позволяет определить отношение расстояния от Земли до центра масс системы Земля+Луна $R_{ц.м.}$ к расстоянию до Солнца

$$tan\,\beta = \frac{R_{ц.м.}}{R_{ЗС}}, \qquad (22) \quad [1.25]$$

откуда

$$R_{ц.м.} = 4720\ \text{км}. \qquad (23) \quad [0.25]$$

Отсюда по формуле, аналогичной (16), определяем отношение масс Земли и Луны

$$\frac{M_З}{M_Л} = \frac{R_{ЗЛ}}{R_{ц.м.}} - 1 = 80.8. \qquad (24) \quad [0.5]$$

2.10. Из (20) и (21) видно, что вся масса сосредоточена в Солнце и равна

$$M_С = 2.19 \cdot 10^{30}\ \text{кг}. \qquad (25) \quad [0.1]$$

Из формул (20) и (24) следует, что

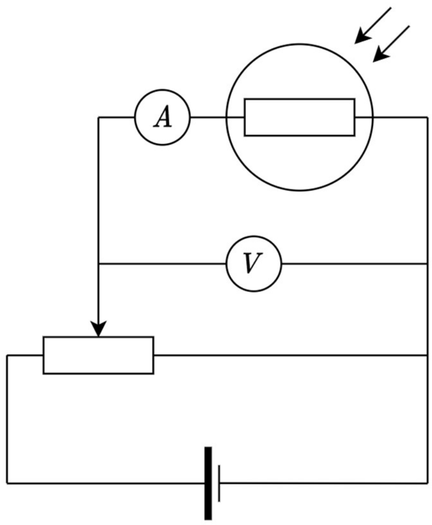
$$M_З = 6.12 \cdot 10^{24}\ \text{кг}, \qquad (26) \quad [0.2]$$

$$M_Л = 7.58 \cdot 10^{22}\ \text{кг}. \qquad (27) \quad [0.2]$$

Примечание: полный балл за правильные числовые значения даются только если были использованы вышеуказанные уравнения.

Задача 3. Фоторезистор и солнечный элемент (10.0 балла)

3.1.[0.5] Принципиальная электрическая схема для измерения вольт-амперной характеристики одинакова для всех элементов и имеет вид, показанный ниже.



3.2.[1.0] Сопротивление фоторезистора зависит от его освещенности, а поскольку показания амперметра не меняются, значит ток через фоторезистор не протекает, то есть падение напряжения на сопротивлении R равно

$$U_R = U_2. \qquad (1)$$

С другой стороны, из правой части схемы следует, что то же самое напряжение равно

$$U_R = \frac{U_1}{R + R_1} R. \tag{2}$$

Приравнивая выражения (1) и (2), находим

$$R = \frac{U_2}{U_1 - U_2} R_1 = 10 \text{ Ом}. \tag{3}$$

3.3.[0.5] Показания амперметра легко находятся и равны

$$I_A = \frac{U_2}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R_1} = 0.6 \text{ А}. \tag{4}$$

3.4.[1.0] Из приведенного выражения следует, что сопротивление фоторезистора меняется от его освещенности по закону

$$R = \frac{R_0}{2 - \exp(-\Phi)}, \quad R_0 = 5 \text{ Ом}, \tag{5}$$

то есть при отсутствии освещенности $\Phi = 0$ оно равно R_0.

Собранная электрическая схема представляет собой мостик Уитстона, при этом ток через амперметр отсутствует, если выполняется условие

$$\frac{R_3}{R_0} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{6}$$

откуда

3.5.[1.0] Полное сопротивление всей цепи равно

$$R_{\text{tot}} = \frac{R R_1}{R + R_1} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \tag{8}$$

Падение напряжения на параллельно включенных сопротивлениях R_0 и R_1 составляет

$$U_1 = \frac{U}{R_{\text{tot}}} \frac{R R_1}{R + R_1} \tag{9}$$

и ток через сопротивление R_1 равен

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}. \tag{10}$$

Аналогично, падение напряжения на параллельно включенных сопротивлениях R_2 и R_3 составляет

$$U_2 = \frac{U}{R_{\text{tot}}} \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \tag{11}$$

и ток через сопротивление R_2 равен

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}. \tag{12}$$

Сила тока через амперметр равна

$$I_A = I_2 - I_1. \tag{13}$$

Подставляя числовые значения, находим с использованием (5) при $\Phi = 1$

$$I_A = 216 \text{ мА}. \tag{14}$$

3.6.[0.5] Используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора

$$R = 3.94 \text{ Ом} \tag{15}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi = 0.312. \tag{16}$$

3.7.[0.75] Вновь используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора при освещении точечным источником света

$$R = 3.529 \text{ Ом} \tag{17}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi_0 = 0.539. \tag{18}$$

При повороте плоскости приемника на угол α поток через фоторезистор становится равным

$$\Phi = \Phi_0 \cos\alpha = 0.269, \tag{19}$$

а сопротивление фоторезистора по формуле (5)

$$R = 4.04\ \text{Ом} \tag{20}$$

и используя формулы (8)-(13), получаем

$$I_A = 89\ \text{мА}. \tag{21}$$

3.8.[0.75] Используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора

$$R = 4.43\ \text{Ом} \tag{22}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi = 0.138 \tag{23}$$

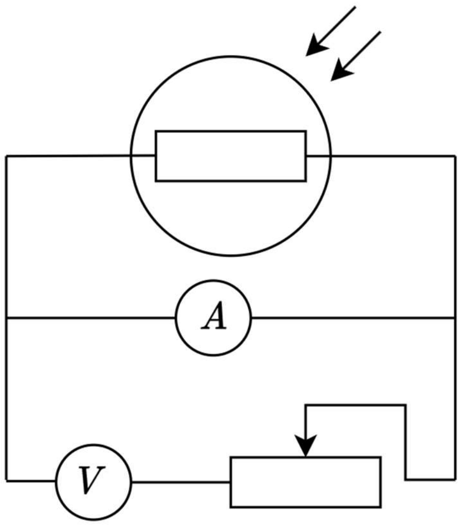
Для точечного источника освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния r до него

$$\Phi \sim \frac{1}{r^2}. \tag{24}$$

поэтому

$$r = L\sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}} = 1.98\ \text{м}. \tag{25}$$

3.9.[1.0] Принципиальная электрическая схема для определения вольтамперной характеристики солнечного элемента имеет вид, показанный на рисунке ниже.



3.10.[1.0] Для нахождения коэффициентов a и b достаточно знать две точки из графика и решить полученную систему уравнений, которая дает

$$a = 0.75\ \text{А}, \tag{26}$$

$$b = 0.03\ \text{А/В}^2. \tag{27}$$

3.11.[0.5] Максимальный ток достигается при напряжении, близком к нулю, и равен

$$I_{\max} = a = 0.75\ \text{А}. \tag{28}$$

3.12.[0.5] Максимальное напряжение достигается при силе тока, близкой к нулю, и равно

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{a}{b}} = 5\ \text{В}. \tag{29}$$

3.13.[1.0] Мощность, развиваемая солнечным элементом, равна

$$P(U) = IU = (a - bU^2)U. \tag{30}$$

Ее максимальное значение можно найти из графика, или напрямую для тех, кто знает производные.

Максимальная мощность равна

$$P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}a}{9}\sqrt{\frac{a}{b}} = 1.44\ \text{Вт} \tag{31}$$

и достигается при напряжении

$$U = \sqrt{\frac{a}{3b}} = 2.89\ \text{В}. \tag{32}$$