

Список необходимых физических констант

Гравитационная постоянная $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$

Скорость света $c = 2.99 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

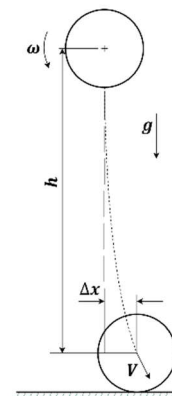
Постоянная Планка $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

Задача 1 (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

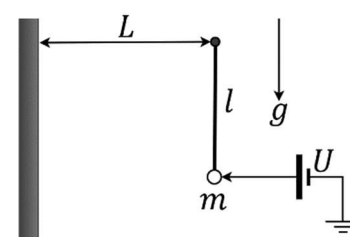
Часть 1.1 (3.0 балла)

Найдите максимальное отклонение Δx от вертикали свободно падающего с высоты $h = 1 \text{ м}$ цилиндра массы $m = 400 \text{ г}$, радиуса $R = 2 \text{ см}$ и длины $l = 40 \text{ см}$, если перед сбрасыванием ему была сообщена скорость вращения $n = 72 \text{ об/мин}$ относительно его оси. Скорость вращения цилиндра считайте постоянной, а сопротивлением воздуха можно пренебречь. *Примечание:* На движущийся в воздухе цилиндр со скоростью V и вращающийся относительно своей оси с угловой скоростью ω действует сила, направленная перпендикулярно скорости центра масс и угловой скорости, равная $F = 2\pi\rho R^2 l v \omega$, где $\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$ – плотность атмосферного воздуха. Это явление называется эффектом Магнуса.



Часть 1.2 (3.5 балла)

Небольшой шарик радиуса r и массы m подвешен на шарнире с помощью непроводящего стержня длиной l . Слева от шарнира на расстоянии $L > l \gg r$ располагается вертикальная бесконечная проводящая плоскость. Шарик с помощью источника напряжения, показанного на рисунке, сообщает заряд, после чего он отклоняется на угол α и вновь возвращается в исходное положение. Найдите напряжение источника питания U , если ускорение свободного падения равно g .



Часть 1.3 (3.5 балла)

Космический аппарат имеет передатчик мощностью $P = 11 \text{ Вт}$, который посылает радиосигналы с частотой $\nu = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ на Землю с помощью параболического зеркала, дающего равномерно расходящийся пучок с углом $\alpha = 2^\circ$. В данный момент аппарат находится на расстоянии $L = 1.00 \cdot 10^{10} \text{ км}$ от Земли. Найдите количество фотонов в секунду, которые посылаются космическим аппаратом и регистрируются на Земле радиотелескопом с диаметром зеркала $D = 80.0 \text{ м}$.

Задача 2. КПД циклических процессов (10.0 балла)

Рассмотрим некоторый циклический процесс, который происходит с идеальным одноатомным газом. Пусть в этом циклическом процессе Q_1 – количество теплоты, подведенное газу в течении всего процесса, а Q_2 – количество отведенного количества теплоты соответственно. Тогда коэффициент полезного действия цикла (КПД) определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Из школьного курса известно, что циклом Карно называется процесс, состоящий из двух адиабат и двух изотерм. В цикле Карно термодинамическая система выполняет механическую работу и обменивается теплотой с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные, но различающиеся температуры. Резервуар с более высокой температурой T_1 называется нагревателем, а с более низкой температурой T_2 – холодильником.

2.1. Запишите выражение для КПД η цикла Карно и рассчитайте его для $T_1 = 800$ К и $T_2 = 200$ К.

Рассмотрим несколько более сложный вариант работы машины по циклу Карно. Процесс по-прежнему протекает между изотермами с температурами T и $T_1 = 800$ К, причём $T < T_1$. Теплообмен газа с нагревателем происходит непосредственно при температуре T_1 , а теплообмен в изотермическом процессе с температурой T происходит с резервуаром, имеющим постоянную температуру $T_2 = 200$ К, причём $T > T_2$. Известно, что теплообмен между газом и резервуаром осуществляется посредством теплопроводности, так что количество теплоты, отдаваемое в единицу времени резервуару, равно $q = \alpha(T - T_2)$, где $\alpha = 1.00$ кВт/К. В дальнейшем считайте, что продолжительность по времени изотермических процессов одинакова, а длительность адиабатических – пренебрежимо мала.

2.2. Найдите зависимость мощности тепловой машины $P(T)$, работающей по этому циклу Карно, от температуры T .

2.3. Постройте график зависимости мощности тепловой машины $P(T)$ в интервале температур $T_2 < T < T_1$.

2.4. Аналитически или графически, найдите максимальную мощность P_{max} данной тепловой машины.

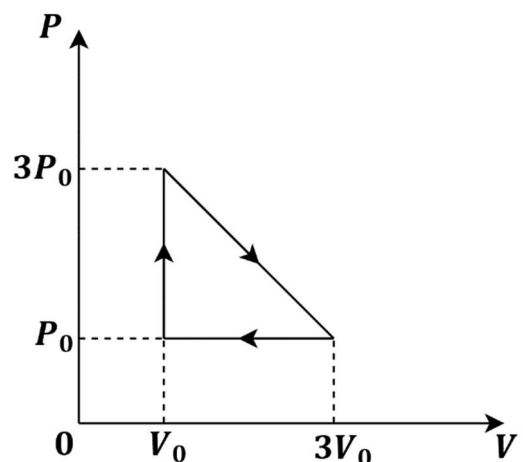
На рисунке справа изображен еще один циклический процесс в диаграмме $P - V$, который происходит с 1 моле идеального одноатомного газа. Считайте известными величины P_0 , V_0 и универсальную газовую постоянную R .

2.5. Рассчитайте минимальную температуру газа T_{min} в этом процессе.

2.6. Рассчитайте максимальную температуру газа T_{max} в этом процессе.

2.7. Каков бы был КПД цикла Карно, если бы температура нагревателя была равна T_{max} , а температура холодильника – T_{min} .

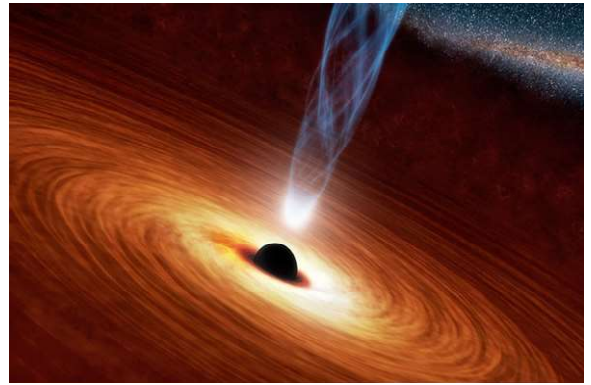
2.8. Рассчитайте реальный КПД приведенного цикла.



Продолжительность тура 5 часов.

Задача 3. Элементарная физика черных дыр (10.0 балла)

Черная дыра в астрофизике представляет собой достаточно массивный объект, гравитационное притяжение которого настолько сильно, что даже свет не может покинуть ее ближайшие окрестности. Предполагается существование нескольких типов черных дыр, но в данной задаче мы рассмотрим так называемые черные дыры звездных масс, которые являются конечным продуктом звездной эволюции. Дело в том, что свечение обычных звезд поддерживается происходящими внутри



термоядерными реакциями, а разогретая до высоких температур материя препятствует их гравитационному сжатию. После исчерпания запасов термоядерного топлива температура звезды резко падает, происходит стремительное гравитационное сжатие (коллапс), в результате которого электроны вещества вдавливаются в протоны и в конце концов образуется нейтральная материя черной дыры с высокой плотностью $\rho = 1.1 \cdot 10^{18}$ кг/м³. В дальнейшем считайте, что в процессе коллапса звезда все время остается сферически симметричной и однородной.

3.1. Рассчитайте минимальную массу M_{\min} черной дыры.

Рассмотрим звезду X , которая непосредственно перед гравитационным коллапсом имеет массу $M = 3.00 \cdot 10^{32}$ кг и радиус $R_0 = 7.10 \cdot 10^8$ м, вращается вокруг своей оси с периодом $T_0 = 2.00$ сут и имеет магнитное поле вблизи экватора с индукцией $B_0 = 2.30 \cdot 10^{-2}$ Тл.

3.2. Рассчитайте радиус образовавшейся черной дыры R .

3.3. Рассчитайте период обращения черной дыры вокруг своей оси T .

3.4. Рассчитайте место нахождения горизонта событий образовавшейся черной дыры, то есть расстояние R_g , с которого еще теоретически возможно получение какой-либо информации о происходящих там процессах.

При коллапсе звезды магнитные силовые линии вмораживаются в вещество, то есть сжимаются вместе с ним.

3.5. Рассчитайте величину магнитной индукции B вблизи экватора звезды в тот момент времени, когда ее радиус составлял $2R_g$.

3.6. Рассчитайте работу гравитационных сил A , совершенную над веществом звезды X при ее коллапсе из начального состояния до радиуса $2R_g$.

Стивен Хокинг в 1975 году предположил, что черная дыра, несмотря на сильное гравитационное поле, должна излучать. Это излучение должно состоять преимущественно из фотонов, однако оно еще до сих пор не обнаружено экспериментально. В результате излучения масса черной дыры M должна уменьшаться по закону

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 M^2}$$

3.7. Рассчитайте время жизни t с момента образования черной дыры до ее превращения в наблюдаемый объект.

Превращение начальной нормальной звезды в черную дыру возможно, только если ее начальный период вращения вокруг своей оси не меньше некоторого минимального значения T_{\min} .

3.8. Рассчитайте отношение T_0/T_{\min} для приведенных выше параметров звезды X .

Продолжительность тура 5 часов.