

**Список необходимых физических констант**

Гравитационная постоянная  $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$

Скорость света  $c = 2.99 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

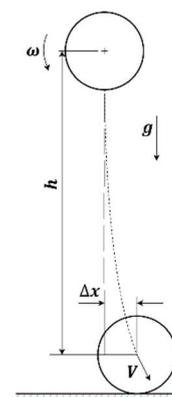
Постоянная Планка  $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

**Задача 1 (10.0 балла)**

Эта задача состоит из трех независимых частей.

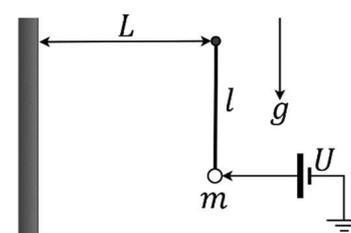
**Часть 1.1 (3.0 балла)**

Найдите максимальное отклонение  $\Delta x$  от вертикали свободно падающего с высоты  $h = 1 \text{ м}$  цилиндра массы  $m = 400 \text{ г}$ , радиуса  $R = 2 \text{ см}$  и длины  $l = 40 \text{ см}$ , если перед сбрасыванием ему была сообщена скорость вращения  $n = 72 \text{ об/мин}$  относительно его оси. Скорость вращения цилиндра считайте постоянной, а сопротивлением воздуха можно пренебречь. *Примечание:* На движущийся в воздухе цилиндр со скоростью  $V$  и вращающийся относительно своей оси с угловой скоростью  $\omega$  действует сила, направленная перпендикулярно скорости центра масс и угловой скорости, равная  $F = 2\pi\rho R^2 l v \omega$ , где  $\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$  – плотность атмосферного воздуха. Это явление называется эффектом Магнуса.



**Часть 1.2 (3.5 балла)**

Небольшой шарик радиуса  $r$  и массы  $m$  подвешен на шарнире с помощью непроводящего стержня длиной  $l$ . Слева от шарнира на расстоянии  $L > l \gg r$  располагается вертикальная бесконечная проводящая плоскость. Шарику с помощью источника напряжения, показанного на рисунке, сообщают заряд, после чего он отклоняется на угол  $\alpha$  и вновь возвращается в исходное положение. Найдите напряжение источника питания  $U$ , если ускорение свободного падения равно  $g$ .



**Часть 1.3 (3.5 балла)**

Космический аппарат имеет передатчик мощностью  $P = 11 \text{ Вт}$ , который посылает радиосигналы с частотой  $\nu = 3.00 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$  на Землю с помощью параболического зеркала, дающего равномерно расходящийся пучок с углом  $\alpha = 2^\circ$ . В данный момент аппарат находится на расстоянии  $L = 1.00 \cdot 10^{10} \text{ км}$  от Земли. Найдите количество фотонов в секунду, которые посылаются космическим аппаратом и регистрируются на Земле радиотелескопом с диаметром зеркала  $D = 80.0 \text{ м}$ .

## Задача 2. КПД циклических процессов (10.0 балла)

Рассмотрим некоторый циклический процесс, который происходит с идеальным одноатомным газом. Пусть в этом циклическом процессе  $Q_1$  – количество теплоты, подведенное газу в течении всего процесса, а  $Q_2$  – количество отведенного количества теплоты соответственно. Тогда коэффициент полезного действия цикла (КПД) определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Из школьного курса известно, что циклом Карно называется процесс, состоящий из двух адиабат и двух изотерм. В цикле Карно термодинамическая система выполняет механическую работу и обменивается теплотой с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные, но различающиеся температуры. Резервуар с более высокой температурой  $T_1$  называется нагревателем, а с более низкой температурой  $T_2$  – холодильником.

**2.1.** Запишите выражение для КПД  $\eta$  цикла Карно и рассчитайте его для  $T_1 = 800$  К и  $T_2 = 200$  К.

Рассмотрим несколько более сложный вариант работы машины по циклу Карно. Процесс по-прежнему протекает между изотермами с температурами  $T$  и  $T_1 = 800$  К, причём  $T < T_1$ . Теплообмен газа с нагревателем происходит непосредственно при температуре  $T_1$ , а теплообмен в изотермическом процессе с температурой  $T$  происходит с резервуаром, имеющим постоянную температуру  $T_2 = 200$  К, причём  $T > T_2$ . Известно, что теплообмен между газом и резервуаром осуществляется посредством теплопроводности, так что количество теплоты, отдаваемое в единицу времени резервуару, равно  $q = \alpha(T - T_2)$ , где  $\alpha = 1.00$  кВт/К. В дальнейшем считайте, что продолжительность по времени изотермических процессов одинакова, а длительность адиабатических – пренебрежимо мала.

**2.2.** Найдите зависимость мощности тепловой машины  $P(T)$ , работающей по этому циклу Карно, от температуры  $T$ .

**2.3.** Постройте график зависимости мощности тепловой машины  $P(T)$  в интервале температур  $T_2 < T < T_1$ .

**2.4.** Аналитически или графически, найдите максимальную мощность  $P_{max}$  данной тепловой машины.

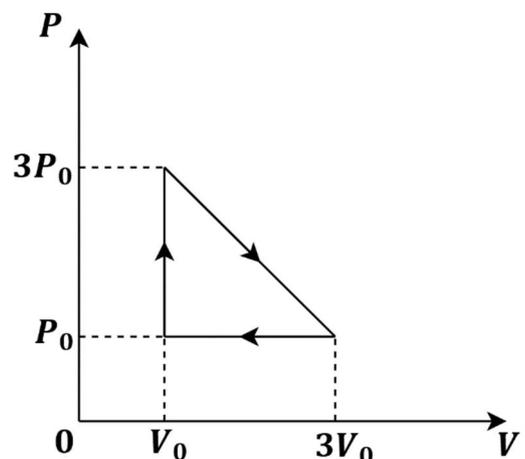
На рисунке справа изображен еще один циклический процесс в диаграмме  $P - V$ , который происходит с 1 моле идеального одноатомного газа. Считайте известными величины  $P_0$ ,  $V_0$  и универсальную газовую постоянную  $R$ .

**2.5.** Рассчитайте минимальную температуру газа  $T_{min}$  в этом процессе.

**2.6.** Рассчитайте максимальную температуру газа  $T_{max}$  в этом процессе.

**2.7.** Каков бы был КПД цикла Карно, если бы температура нагревателя была равна  $T_{max}$ , а температура холодильника –  $T_{min}$ .

**2.8.** Рассчитайте реальный КПД приведенного цикла.



**Продолжительность тура 5 часов.**

### **Задача 3. Элементарная физика черных дыр (10.0 балла)**

Черная дыра в астрофизике представляет собой достаточно массивный объект, гравитационное притяжение которого настолько сильно, что даже свет не может покинуть ее ближайшие окрестности. Предполагается существование нескольких типов черных дыр, но в данной задаче мы рассмотрим так называемые черные дыры звездных масс, которые являются конечным продуктом звездной эволюции. Дело в том, что свечение обычных звезд поддерживается происходящими внутри



термоядерными реакциями, а разогретая до высоких температур материя препятствует их гравитационному сжатию. После исчерпания запасов термоядерного топлива температура звезды резко падает, происходит стремительное гравитационное сжатие (коллапс), в результате которого электроны вещества вдавливаются в протоны и в конце концов образуется нейтральная материя черной дыры с высокой плотностью  $\rho = 1.1 \cdot 10^{18} \text{ кг/м}^3$ . В дальнейшем считайте, что в процессе коллапса звезда все время остается сферически симметричной и однородной.

**3.1.** Рассчитайте минимальную массу  $M_{\min}$  черной дыры.

Рассмотрим звезду  $X$ , которая непосредственно перед гравитационным коллапсом имеет массу  $M = 3.00 \cdot 10^{32} \text{ кг}$  и радиус  $R_0 = 7.10 \cdot 10^8 \text{ м}$ , вращается вокруг своей оси с периодом  $T_0 = 2.00 \text{ сут}$  и имеет магнитное поле вблизи экватора с индукцией  $B_0 = 2.30 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$ .

**3.2.** Рассчитайте радиус образовавшейся черной дыры  $R$ .

**3.3.** Рассчитайте период обращения черной дыры вокруг своей оси  $T$ .

**3.4.** Рассчитайте место нахождения горизонта событий образовавшейся черной дыры, то есть расстояние  $R_g$ , с которого еще теоретически возможно получение какой-либо информации о происходящих там процессах.

При коллапсе звезды магнитные силовые линии вмораживаются в вещество, то есть сжимаются вместе с ним.

**3.5.** Рассчитайте величину магнитной индукции  $B$  вблизи экватора звезды в тот момент времени, когда ее радиус составлял  $2R_g$ .

**3.6.** Рассчитайте работу гравитационных сил  $A$ , совершенную над веществом звезды  $X$  при ее коллапсе из начального состояния до радиуса  $2R_g$ .

Стивен Хокинг в 1975 году предположил, что черная дыра, несмотря на сильное гравитационное поле, должна излучать. Это излучение должно состоять преимущественно из фотонов, однако оно еще до сих пор не обнаружено экспериментально. В результате излучения масса черной дыры  $M$  должна уменьшаться по закону

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 M^2}$$

**3.7.** Рассчитайте время жизни  $t$  с момента образования черной дыры до ее превращения в наблюдаемый объект.

Превращение начальной нормальной звезды в черную дыру возможно, только если ее начальный период вращения вокруг своей оси не меньше некоторого минимального значения  $T_{\min}$ .

**3.8.** Рассчитайте отношение  $T_0/T_{\min}$  для приведенных выше параметров звезды  $X$ .

**Продолжительность тура 5 часов.**