Решение задач. 11 класс.

Задача 1 (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

Предположим, что тело падает с ускорением свободного падения, тогда в нижней точке оно имело бы скорость

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \qquad (1) \quad [0.25]$$

тогда максимальная сила из-за эффекта Магнуса

$$F = 2\pi\rho R^2 l\sqrt{2gh}\omega. \qquad (2) \quad [0.25]$$

Подставляя числа, получим

$$F = 0.04\ \text{Н}, \quad mg = 3.92\ \text{Н}, \qquad [0.25]$$

$$F \ll mg, \qquad (3) \quad [0.5]$$

а значит отклонение от вертикали мало, поэтому можно считать, что по вертикали движение происходит с ускорением свободного падения, то есть скорость цилиндра по вертикальной оси зависит от времени по закону

$$v_y = gt \qquad (4) \quad [0.25]$$

и при этом на цилиндр действует боковая сила

$$F = 2\pi\rho R^2 l\omega v_y. \qquad (5)$$

Это значит, что в горизонтальном направлении цилиндр двигается с ускорением

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{2\pi\rho R^2 l\omega g}{m}t. \qquad (6) \quad [0.25]$$

Так как начальная скорость в горизонтальном направлении равна нулю

$$v_x(0) = 0, \qquad (7)$$

то скорость цилиндра изменяется по закону

$$v_x = \frac{\pi\rho R^2 l\omega g}{m}t^2. \qquad (8) \quad [0.25]$$

Начальное смещение тоже равно нулю

$$x(0) = 0, \qquad (9)$$

поэтому смещение в произвольный момент времени составляет

$$x = \frac{\pi\rho R^2 l\omega g}{3m}t^3. \qquad (10) \quad [0.25]$$

Подставляя сюда время падения по вертикали

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad (11) \quad [0.25]$$

окончательно получаем

$$x = \frac{\pi\rho R^2 l\omega g}{3m}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = 0{,}370\ \text{см}. \qquad (12) \quad [0.5]$$

Часть 1.2 (3.5 балла)

Из метода электростатических изображений известно, что поле справа от проводящей плоскости представляет собой суперпозицию самого заряда q, расположенного на шарике, и фиктивного заряда $-q$, расположенного зеркально симметрично по отношению к проводящей поверхности пластины.

Прежде всего определим заряд шарика после подключения к источнику напряжения. Потенциал шарика с учетом его изображения равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2L)}. \qquad (1) \quad [0.5]$$

Так как источник напряжения создает потенциал U относительно Земли, то

$$\varphi = U, \qquad (2)$$

откуда следует, что

$$q = \frac{8\pi\varepsilon_0 rL}{2L - r}U. \qquad (3) \quad [0.5]$$

Из того же метода изображений находим, что на шарик, расположенный на расстоянии x от проводящей пластины, действует сила

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}, \qquad (4) \quad [0.5]$$

которая при смещении шарика из положения

$$x_1 = L \qquad (5)$$

до положения

$$x_2 = L - l\sin\alpha \qquad (6)$$

совершает работу

$$A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{q^2 l \sin\alpha}{16\pi\varepsilon_0 L(L - l\sin\alpha)}. \qquad (7) \quad [1.0]$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии шарика в поле тяжести Земли, изменение которой равно

$$\Delta W = mgl(1 - \cos\alpha). \qquad (8) \quad [0.5]$$

Из выражений (3), (7) и (8) получаем

$$U = \left(1 - \frac{r}{2L}\right)\sqrt{\frac{mg\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)L(L - \sin\alpha)}{\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (10) \quad [0.5]$$

Часть 1.3 (3.5 балла)

Энергия одного фотона по формуле Планка равна

$$E = \hbar\omega, \qquad (1) \quad [0.25]$$

где циклическая частота связана с частотой колебаний ν по формуле

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2) \quad [0.25]$$

Общее число фотонов N_0, излучаемых передатчиком мощности P в единицу времени равно

$$N_0 = \frac{P}{E} = \frac{P}{2\pi\hbar\nu}. \qquad (3) \quad [0.5]$$

Так как пучок имеет угол расходимости α, то его радиус на расстоянии L от аппарата будет равен

$$\mathrm{R} = L\,sin\,\alpha \qquad (4) \quad [0.5]$$

и покроет площадь

$$S = \pi R^2. \qquad (5) \quad [0.5]$$

Число фотонов, регистрируемых в единицу времени на единицу площади на расстоянии L от аппарата, равно

$$N_S = \frac{N_0}{S}, \qquad (6) \quad [0.5]$$

а число фотонов, которые регистрируются радиотелескопом

$$N' = N_S\frac{\pi D^2}{4}. \qquad (7) \quad [0.5]$$

Собирая вместе (1)-(7), получаем

$$N' = \frac{PD^2}{8\pi\hbar\nu L^2\,sin^2\,\alpha} = 0.73\cdot 10^4\ \text{с}^{-1}. \qquad (8) \quad [0.5]$$

Задача 2. КПД циклических процессов (10.0 балла)

2.1. Из школьного курса физики известно, что КПД цикла Карно равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.75. \qquad (1) \quad [0.2]$$

2.2. КПД цикла задается формулой

$$\eta = 1 - \frac{T}{T_1}. \qquad (2)$$

По условию за время t газ передаст резервуару количество теплоты

$$Q_2 = \alpha(T - T_2)t. \tag{3}$$

Работа, совершаемая тепловой машиной, равна

$$A = Q_1 - Q_2. \tag{4}$$

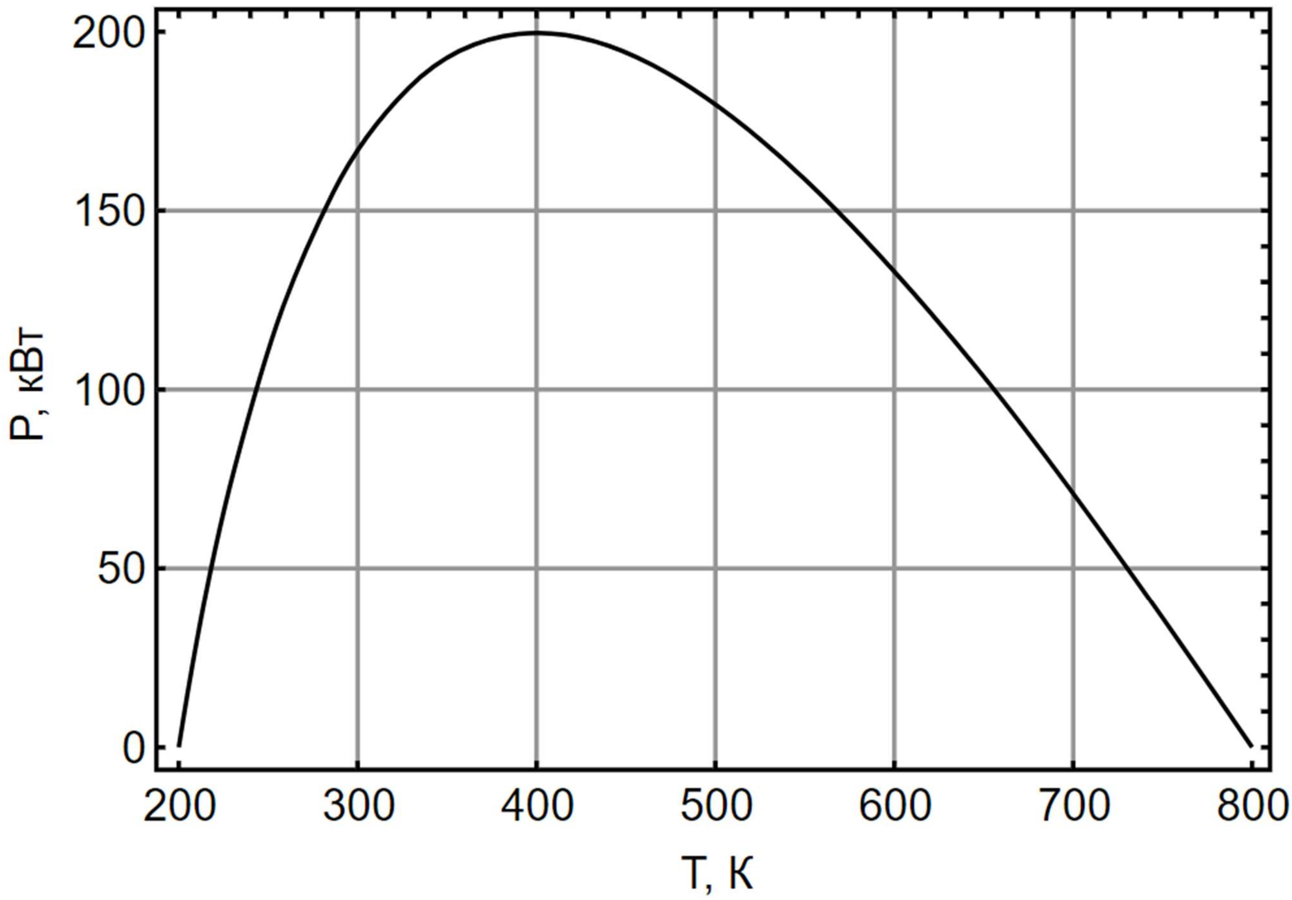
Воспользовавшись формулой для КПД, приведенной в формулировке задачи, получим работу

$$A = \frac{\alpha(T_1 - T)(T - T_2)}{T} t, \qquad (5) \quad [0.5]$$

откуда искомая мощность равна

$$P(T) = \frac{Q}{t} = \frac{\alpha(T_1 - T)(T - T_2)}{T}. \qquad (5) \quad [0.2]$$

2.3. График зависимости мощности от температуры имеет следующий вид



[0.6]

2.4. Аналитически максимальную мощность можно найти, приравняв производную функции (6) нулю

$$P'(T) = 0, \qquad (7) \quad [0.5]$$

откуда находим температуру, при которой достигается максимальная мощность

$$T_{\max} = \sqrt{T_1 T_2} = 400\ \text{К} \qquad (8) \quad [0.5]$$

равная

$$P_{\max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 = 200\ \text{кВт}. \qquad (9) \quad [0.5]$$

Аналогичные ответы можно уточнить численно из графика, не вычисляя производных.

2.5. Из уравнения состояния 1 моля идеального газа

$$PV = RT \qquad (10) \quad [0.2]$$

следует, что минимальная температура достигается там, где произведение давления на объем минимально, а это, очевидно, следует точке 1, поэтому

$$T_{\min} = \frac{P_0 V_0}{R}. \qquad (11) \quad [0.3]$$

2.6. Максимальная температура достигается там, где произведение давления на объём максимально, что соответствует некоторой точке процесса 2 → 3. Уравнение процесса 2 → 3 представляет собой прямую линию вида

$$P(V) = P_0 - \frac{P_0}{V_0}(V - 3V_0). \qquad (12) \quad [0.5]$$

Тогда температура в процессе 2 → 3 в соответствии с (10) изменяется с объемом по закону

$$T(V) = \frac{\left(P_0 - \frac{P_0}{V_0}(V - 3V_0)\right)V}{R}, \qquad (13) \quad [0.2]$$

Формула (13) представляет собой параболическую зависимость, вершина которой находится в точке

$$V = 2V_0, \qquad (14) \quad [0.3]$$

а максимальное значение температуры составляет

$$T_{\max} = \frac{4P_0 V_0}{R}. \qquad (15) \quad [0.3]$$

2.7. В соответствии с приведенной в условии формулы для КПД цикла Карно, получаем

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 0.75. \qquad (16) \quad [0.2]$$

2.8. Для определения истинного КПД цикла рассчитаем подведенное и отведенное количество теплоты в каждом процессе. Процесс 1 → 2 является изохорным и в нем тепло подводится в количестве

$$Q_{12}^{+} = \frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 3P_0V_0. \qquad (17) \quad [0.5]$$

Процесс 3 → 1 является изобарным и в нем отводится количество теплоты

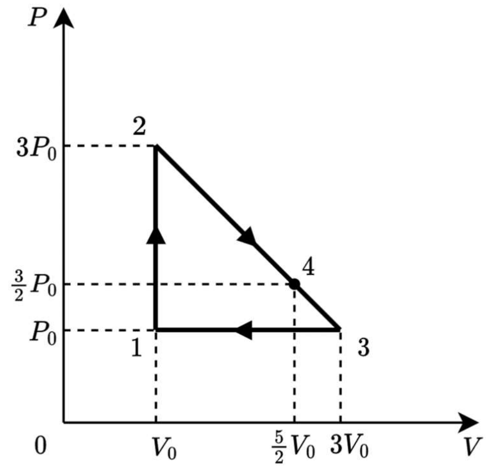
$$Q_{31}^{-} = \frac{5}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 5P_0V_0. \qquad (18) \quad [0.5]$$

Рассмотрим подробно процесс 2 → 3. Сказать изначально, отводится или подводится здесь тепло невозможно. В действительности на прямой 2 → 3 существует точка 4, в которой она касается адиабаты. Найдем эту точку. Прямая 2 → 3 имеет угловой коэффициент наклона, равный

$$k = -\frac{P_0}{V_0}. \qquad (19) \quad [0.3]$$

С другой стороны, из уравнения адиабаты

$$PV^{\gamma} = \text{const}. \qquad (20) \quad [0.2]$$



следует, что коэффициент наклона адиабаты в произвольной точке равен

$$k_a = -\frac{\gamma P}{V}, \qquad (21) \quad [0.3]$$

где для одноатомного идеального газа

$$\gamma = \frac{5}{3}. \qquad (22) \quad [0.2]$$

Приравнивая (19) и (20) с использованием (12) и (21), получаем

$$V_4 = \frac{5}{2}V_0, \quad P_4 = \frac{3}{2}P_0. \qquad (23) \quad [0.5]$$

Участок $2 \to 4$ идет менее круто, чем соответствующие адиабаты, поэтому на нем подводится количество тепла, равное

$$Q_{24}^{+} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_0\frac{5}{2}V_0 - 3P_0V_0\right) + \frac{3P_0 + \frac{3}{2}P_0}{2}\frac{3}{2}V_0 = \frac{9}{2}P_0V_0. \qquad (24) \quad [1.0]$$

Участок $4 \to 3$ идет более круто, чем соответствующие адиабаты, поэтому на нем отводится количество тепла, равное

$$Q_{43}^{-} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_0\frac{5}{2}V_0 - P_0 3V_0\right) + \frac{P_0 + \frac{3}{2}P_0}{2}\frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2}P_0V_0. \qquad (24) \quad [1.0]$$

Искомый КПД оказывается равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}^{-} + Q_{43}^{-}}{Q_{12}^{+} + Q_{24}^{+}} = \frac{4}{15}. \qquad (25) \quad [0.5]$$

Задача 3. Элементарная физика черных дыр (10.0 балла)

3.1. Гравитационное поле звезды падает с расстоянием от нее, поэтому у черной звезды минимальной массы вторая космическая скорость

$$v_{II} = \sqrt{2G\frac{M_{\min}}{R}}. \qquad (1) \quad [0.25]$$

достигает на ее поверхности значения скорости света

$$v_{II} = c. \qquad (2) \quad [0.2]$$

Так как черная дыра по условию представляет собой однородный шар с плотностью ρ, то его масса равна

$$M_{\min} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3. \qquad (3) \quad [0.2]$$

Отсюда находим минимальную массу черной дыры

$$M_{\min} = \sqrt{\frac{3c^6}{32\pi\rho G^3}} = 8.15 \cdot 10^{30} \text{ кг}. \qquad (4) \quad [0.35]$$

3.2. Из формулы, аналогичной (3), находим радиус черной дыры

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = 40.2 \cdot 10^3 \text{ м}. \qquad (5) \quad [0.3]$$

3.3. Момент инерции однородного шара равен

$$I = \frac{2}{5}MR^2. \qquad (6) \quad [0.2]$$

В процессе коллапса звезды гравитационные силы направлены к ее центру и не могут изменить собственного момента импульса звезды относительно оси, поэтому

$$I_0\omega_0 = I\omega. \qquad (7) \quad [0.3]$$

Период вращения связан с угловой частотой соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (8) \quad [0.2]$$

Из полученных соотношений следует, что период вращения черной дыры вокруг своей оси составит

$$T = T_0\frac{R^2}{R_0^2} = 5.55\cdot 10^{-4}\ \text{с}. \qquad (9) \quad [0.3]$$

3.4. Чтобы получить информацию о каких-либо процессах, надо чтобы физические сигналы из соответствующих точек пространства смогли достигнуть наблюдателя. Это возможно только для точек, удаленных от черной дыры на расстояние большее R_g, вблизи которого вторая космическая скорость совпадает со скоростью света

$$c = \sqrt{2G\frac{M}{R_g}}, \qquad (10) \quad [0.5]$$

откуда находим

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} = 4.48\cdot 10^5\ \text{м}. \qquad (11) \quad [0.3]$$

3.5. Поскольку силовые магнитные линии вморожены в вещество звезды, то они передвигаются вместе с ней. Рассмотрим некоторый контур в звезде, который пронизывается силовыми линиями магнитного поля. При коллапсе звезды размеры контура тоже уменьшаются пропорционально размерам самой звезды, а так как линии поля вморожены в вещество, то их количество остается неизменным. Теперь осталось вспомнить, что величина индукции магнитного поля пропорционально густоте силовых линий, то есть

$$B\sim\frac{1}{R^2}, \qquad (12) \quad [0.5]$$

поэтому

$$B = \frac{B_0R_0^2}{\left(2R_g\right)^2} = 1.44\cdot 10^4\ \text{Тл}. \qquad (13) \quad [0.4]$$

3.6. Рассчитаем полную работу гравитационных сил. Для этого возьмем однородный шар и будем постепенно удалять его тонкими слоями на бесконечность. Пусть в данный момент масса шара равна M, а его радиус составляет R. Тогда для удаления слоя массой dM понадобится совершить работу, равную

$$dA_{\text{tot}} = -G\frac{M}{R}dM. \qquad (14) \quad [0.5]$$

С другой стороны, радиус шара зависит от его массы согласно формуле (5) и его подстановка в (14) дает

$$dA_{\text{tot}} = -\sqrt[3]{\frac{4\pi\rho}{3}}GM^{2/3}dM. \qquad (15) \quad [0.3]$$

Интегрируя формулу (15) от начальной массы звезды до нуля и вновь используя выражение (5), получаем

$$A_{\text{tot}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \qquad (16) \quad [0.3]$$

Эта работа равна взятой с обратным знаком гравитационной энергии самой звезды

$$U = -A_{\text{tot}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \qquad (17) \quad [0.2]$$

Таким образом, в процессе коллапса полное изменение гравитационной энергии звезды

$$\Delta U = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0} - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{2R_g} = -4.016\cdot 10^{48}\ \text{Дж}. \qquad (18) \quad [0.5]$$

С другой стороны, кинетическая энергия вращения звезды возрастает на величину

$$\Delta K = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I_0\omega_0}{2}. \qquad (19) \quad [0.3]$$

Воспользовавшись законом сохранения момента импульса (7), получаем

$$\Delta K = \frac{I_0\omega_0^2}{2}\left(\frac{R_0^2}{\left(2R_g\right)^2} - 1\right) = 0{,}025 \cdot 10^{48} \text{ Дж}. \qquad (20) \quad [0.3]$$

Таким образом, работа гравитационных сил A, совершенная над веществом звезды X при ее коллапсе из начального состояния до радиуса $2R_g$, равна

$$A = -\Delta U - \Delta K = 3.99 \cdot 10^{48\,\text{Дж}}. \qquad (21) \quad [0.3]$$

3.7. Из приведенного в условии выражения следует, что

$$dt = -\frac{15360\pi G^2}{\hbar c^4} M^2 dM, \qquad (22)$$

которое необходимо проинтегрировать от начальной массы звезды до ее минимальной $M_{\min}$ при которой она перестает быть черной дырой. То есть искомое время жизни составляет

$$t = \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4}\left(M^3 - M_{\min}^3\right) = 2.26 \cdot 10^{81} \text{ с}. \qquad (23) \quad [0.3]$$

Видно, что время жизни черной дыры на много порядков превышает время жизни Вселенной.

3.8. В процессе сжатия звезды ее вращение ускоряется, что приводит к сильному росту центробежных сил инерции. Рассмотрим частицу вещества звезды массой m вблизи ее экватора, тогда на нее в системе отсчета, связанной с звездой, действует центробежная сила инерции

$$F = m\omega^2 R. \qquad (24) \quad [0.3]$$

С другой стороны, из закона сохранения момента импульса (7) и выражения для момента инерции (6) следует, что

$$F = \frac{m\omega_{\max}^2 R_0^4}{R^2}, \qquad (25) \quad [0.5]$$

где $\omega_{\max} = 2\pi/T_{\min}$ – начальная угловая скорость вращения звезды.

Из выражения (25) следует, что центробежная сила возрастает при сжатии быстрее, чем гравитационная сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния. Это означает, что в принципе сжатие звезды до черной дыры может быть остановлено.

Приравнивая выражение (25) к гравитационной силе

$$F = G\frac{Mm}{R^2}, \qquad (26) \quad [0.2]$$

получаем радиус, при котором достигается баланс сил

$$R_{\text{stop}} = \frac{\omega_0^2 R_0^4}{GM}. \qquad (27) \quad [0.3]$$

Для того, чтобы звезда смогла сжаться до черной дыры, необходимо, чтобы

$$R_{\text{stop}} < R_g, \qquad (28) \quad [0.5]$$

откуда с использованием (11) и (27), получаем

$$T_{\min} = \frac{2\pi R_0^2}{\sqrt{GMR_g}}, \qquad (29) \quad [0.7]$$

Искомое отношение равно

$$\frac{T_0}{T_{\min}} = \frac{T_0\sqrt{GMR_g}}{2\pi R_0^2} = 5.17. \qquad (30) \quad [0.5]$$