Решение задач. 10 класс.

Задача 1 (10.0 балла)

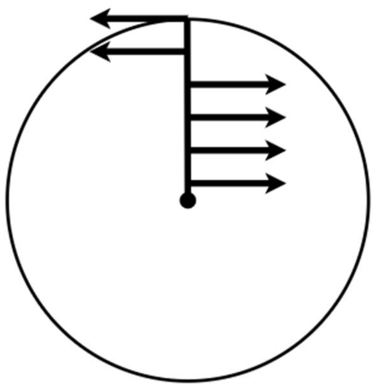
Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1.1 (3.0 балла)

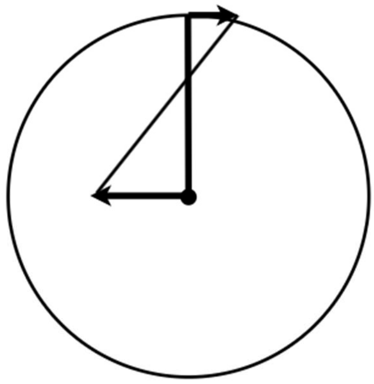
В начальный момент времени диск начинает раскручиваться, так как по всей области контакта возникает сила трения, направленная в одну сторону. Раскручивание диска прекращается, когда полный момент сил трения обращается в нуль, то есть

$$M_{\text{тр}} = 0. \qquad (1) \quad [0.2]$$

Для выполнения условия (1) необходимо, чтобы в разных точках контакта сила трения была направлена в разные стороны. Это обеспечивается тем, что сила трения направлена против относительной скорости трущихся поверхностей. Это означает, что у диска установится такая угловая скорость, чтобы в точках контакта с цилиндром на расстояниях от 0 до некоторого x относительная скорость направлена в одну сторону, а на расстояниях от x до R в другую, смотрите рисунок ниже.



Распределение силы трения



Распределение относительной скорости

[0.9]

В самой точке x относительная скорость должна обратиться в ноль, то есть

$$v_{\text{отн}} = 0. \qquad (2) \quad [0.1]$$

Рассчитаем полный момент сил трения, действующих на диск. Для этого разобьем место контакта на маленькие части. Так как цилиндр прижимается к диску равномерно, то момент сил, действующих на фрагмент Δx и расположенный на расстоянии x от оси диска равен

$$\Delta M_{\text{тр}} = ax\Delta x. \qquad (3) \quad [0.3]$$

Теперь необходимо просуммировать по всем малым элементам. Так как эта зависимость перед Δx линейная, то достаточно взять среднее значение перед Δx и умножить на соответствующий интервал, тогда полный момент оказывается равен

$$M_{\text{тр}} = a\left(\frac{0+x}{2}\right)x - a\left(\frac{R+x}{2}\right)(R-x). \qquad (4) \quad [0.5]$$

Приравнивая полный момент сил трения нулю в соответствии с (1), получим

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \qquad (5) \quad [0.2]$$

Скорость точки цилиндра, которая касается диска, равна

$$v_{\text{ц}} = \omega_0 r, \qquad (6) \quad [0.2]$$

а скорость точки диска на расстоянии (5) равна

$$v_x = \frac{\omega R}{\sqrt{2}}. \qquad (7) \quad [0.2]$$

Относительная скорость в этой точке

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{ц}} - v_x \qquad (8) \quad [0.2]$$

должна обратиться в нуль в соответствии с (2), откуда окончательно находим

$$\omega = \sqrt{2}\omega_0 \frac{r}{R}. \qquad (9) \quad [0.2]$$

Часть 1.2 (3.5 балла)

Из метода электростатических изображений известно, что поле справа от проводящей плоскости представляет собой суперпозицию самого заряда q, расположенного на шарике, и фиктивного заряда $-q$, расположенного зеркально симметрично по отношению к проводящей поверхности пластины.

Прежде всего определим заряд шарика после подключения к источнику напряжения. Потенциал шарика с учетом его изображения равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2L)}. \qquad (1) \quad [0.5]$$

Так как источник напряжения создает потенциал U относительно Земли, то

$$\varphi = U, \qquad (2)$$

откуда следует, что

$$q = \frac{8\pi\varepsilon_0 rL}{2L - r} U. \qquad (3) \quad [0.5]$$

Из того же метода изображений находим, что на шарик, расположенный на расстоянии x от проводящей пластины, действует сила

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}, \qquad (4) \quad [0.5]$$

которая при смещении шарика из положения

$$x_1 = L \qquad (5)$$

до положения

$$x_2 = L - l\,sin\,\alpha \qquad (6)$$

совершает работу

$$A = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{q^2 l\,sin\,\alpha}{16\pi\varepsilon_0 L(L - l\,sin\,\alpha)}. \qquad (7) \quad [1.0]$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии шарика в поле тяжести Земли, изменение которой равно

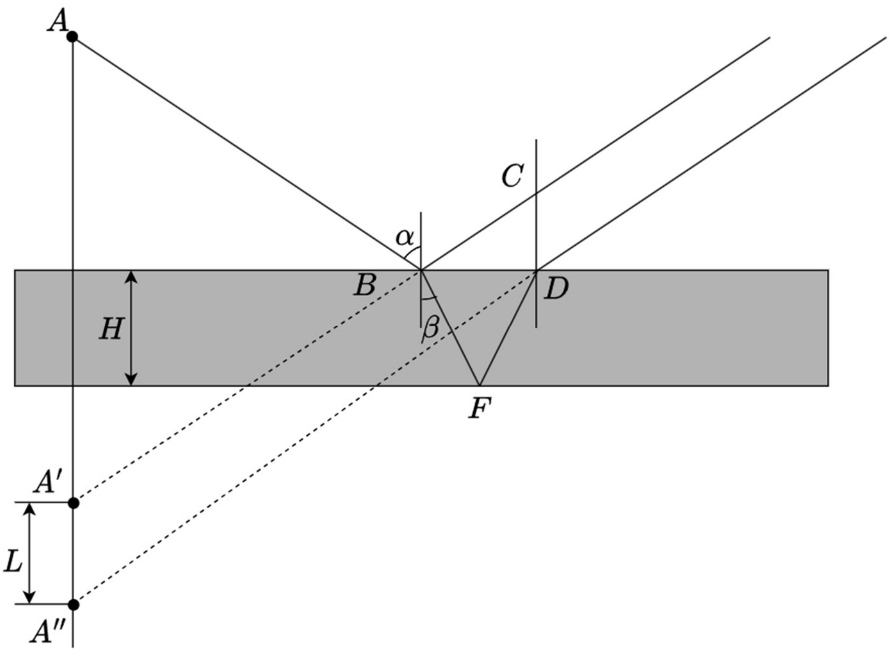
$$\Delta W = mgl(1 - cos\,\alpha). \qquad (8) \quad [0.5]$$

Из выражений (3), (7) и (8) получаем

$$U = \left(1 - \frac{r}{2L}\right)\sqrt{\frac{mg\,tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) L(L - sin\,\alpha)}{\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (10) \quad [0.5]$$

Часть 1.3 (3.5 балла)

Для решения задачи выполним построение лучей, показанное на рисунке ниже



Рассмотрим один из лучей, падающих на пластинку под малым углом, так как при рассматривании собственного изображения мы смотрим под практически прямым углом к пластине. Луч, частично отразившись, сформирует изображение A', а частично преломившись на первой поверхности, отразившись от второй и выйдя наружу, сформирует второе изображение A''. Последующие изображения сформируются после отражений от верхней и нижней поверхностей, и будут отстоять на том же расстоянии L друг от друга, показанном на рисунке.

По закону преломления света

$$\sin\alpha = n\sin\beta\,. \qquad (1) \quad [1]$$

Расстояние BD равно

$$BD = 2H\tan\beta\,, \qquad (2) \quad [0.75]$$

а искомое расстояние есть

$$L = CD = BD\cot\alpha\,. \qquad (3) \quad [0.75]$$

При малости углов необходимо пользоваться соотношениями

$$\tan\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \qquad (4) \quad [0.5]$$

и аналогично для углов β.

Из соотношений (1)-(4), получаем

$$L = \frac{2H}{n} = 20\text{ см}. \qquad (5) \quad [0.5]$$

Задача 2. КПД циклических процессов (10.0 балла)

2.1. Из школьного курса физики известно, что КПД цикла Карно равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.75. \qquad (1) \quad [0.2]$$

2.2. КПД цикла задается формулой

$$\eta = 1 - \frac{T}{T_1}. \qquad (2)$$

По условию за время t газ передаст резервуару количество теплоты

$$Q_2 = \alpha(T - T_2)t. \qquad (3)$$

Работа, совершаемая тепловой машиной, равна

$$A = Q_1 - Q_2. \qquad (4)$$

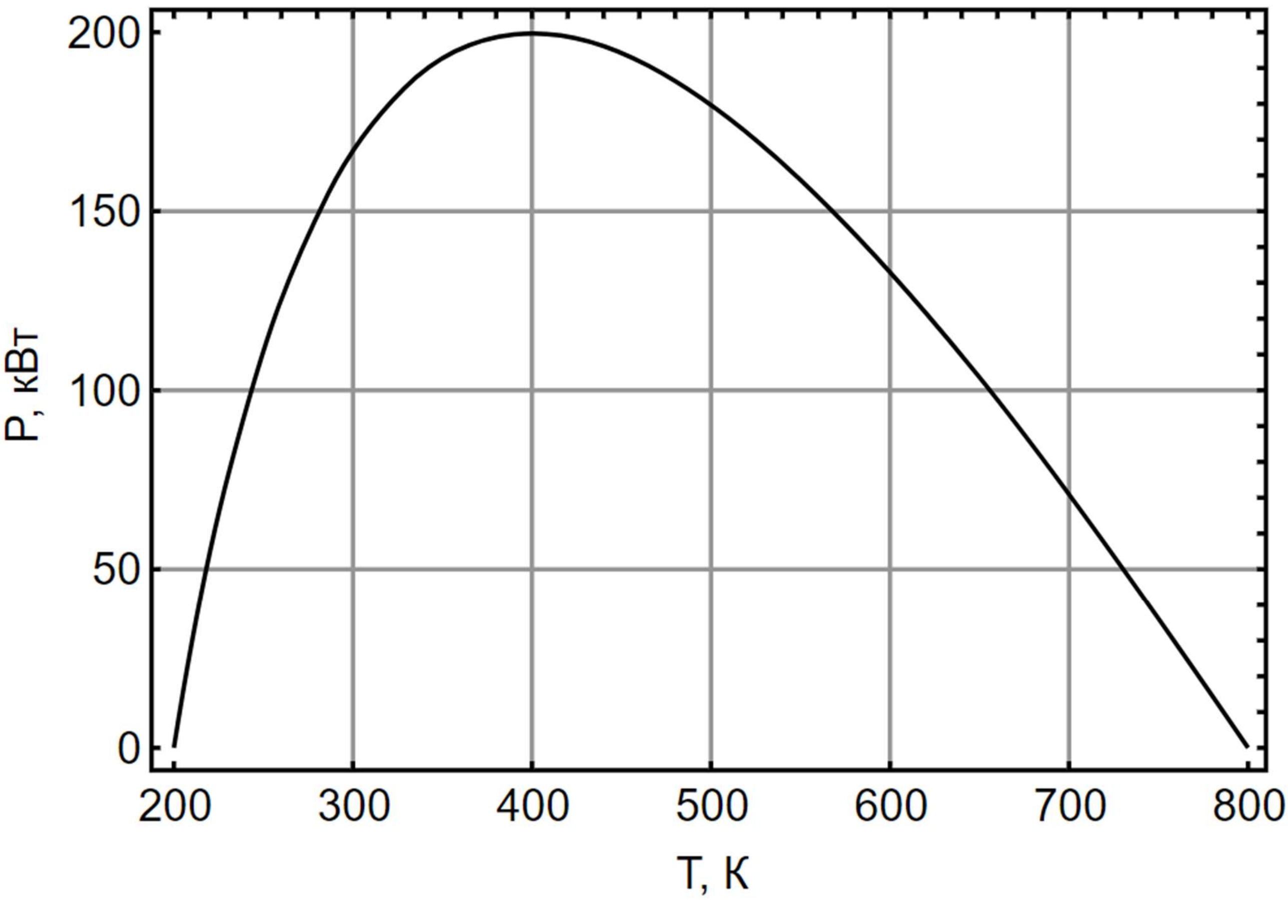
Воспользовавшись формулой для КПД, приведенной в формулировке задачи, получим работу

$$A = \frac{\alpha(T_1 - T)(T - T_2)}{T}t, \qquad (5) \quad [0.5]$$

откуда искомая мощность равна

$$P(T) = \frac{Q}{t} = \frac{\alpha(T_1 - T)(T - T_2)}{T}. \qquad (5) \quad [0.2]$$

2.3. График зависимости мощности от температуры имеет следующий вид



[0.6]

2.4. Аналитически максимальную мощность можно найти, приравняв производную функции (6) нулю

$$P'(T) = 0, \qquad (7) \quad [0.5]$$

откуда находим температуру, при которой достигается максимальная мощность

$$T_{\max} = \sqrt{T_1 T_2} = 400\ \text{К} \qquad (8) \quad [0.5]$$

равная

$$P_{\max} = \alpha\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2 = 200\ \text{кВт}. \qquad (9) \quad [0.5]$$

Аналогичные ответы можно уточнить численно из графика, не вычисляя производных.

2.5. Из уравнения состояния 1 моля идеального газа

$$PV = RT \qquad (10) \quad [0.2]$$

следует, что минимальная температура достигается там, где произведение давления на объем минимально, а это, очевидно, следует точке 1, поэтому

$$T_{\min} = \frac{P_0 V_0}{R}. \qquad (11) \quad [0.3]$$

2.6. Максимальная температура достигается там, где произведение давления на объём максимально, что соответствует некоторой точке процесса $2 \to 3$. Уравнение процесса $2 \to 3$ представляет собой прямую линию вида

$$P(V) = P_0 - \frac{P_0}{V_0}(V - 3V_0). \qquad (12) \quad [0.5]$$

Тогда температура в процессе $2 \to 3$ в соответствии с (10) изменяется с объемом по закону

$$T(V) = \frac{\left(P_0 - \frac{P_0}{V_0}(V - 3V_0)\right)V}{R}, \qquad (13) \quad [0.2]$$

Формула (13) представляет собой параболическую зависимость, вершина которой находится в точке

$$V = 2V_0, \qquad (14) \quad [0.3]$$

а максимальное значение температуры составляет

$$T_{\max} = \frac{4P_0V_0}{R}. \qquad (15) \quad [0.3]$$

2.7. В соответствии с приведенной в условии формулы для КПД цикла Карно, получаем

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 0.75. \qquad (16) \quad [0.2]$$

2.8. Для определения истинного КПД цикла рассчитаем подведенное и отведенное количество теплоты в каждом процессе. Процесс $1 \to 2$ является изохорным и в нем тепло подводится в количестве

$$Q_{12}^{+} = \frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 3P_0V_0. \qquad (17) \quad [0.5]$$

Процесс $3 \to 1$ является изобарным и в нем отводится количество теплоты

$$Q_{31}^{-} = \frac{5}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 5P_0V_0. \qquad (18) \quad [0.5]$$

Рассмотрим подробно процесс $2 \to 3$. Сказать изначально, отводится или подводится здесь тепло невозможно. В действительности на прямой $2 \to 3$ существует точка 4, в которой она касается адиабаты. Найдем эту точку. Прямая $2 \to 3$ имеет угловой коэффициент наклона, равный

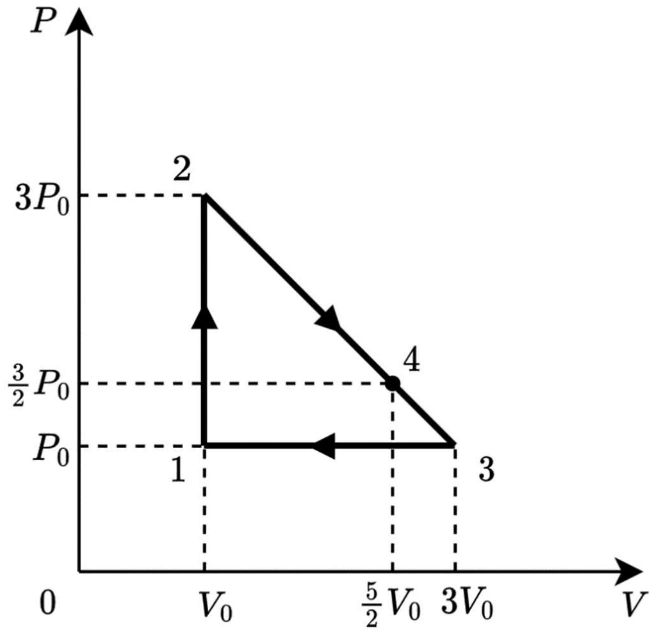
$$k = -\frac{P_0}{V_0}. \qquad (19) \quad [0.3]$$

С другой стороны, из уравнения адиабаты

$$PV^{\gamma} = \text{const}. \qquad (20) \quad [0.2]$$

следует, что коэффициент наклона адиабаты в произвольной точке равен

$$k_a = -\frac{\gamma P}{V}, \qquad (21) \quad [0.3]$$



где для одноатомного идеального газа

$$\gamma = \frac{5}{3}. \qquad (22) \quad [0.2]$$

Приравнивая (19) и (20) с использованием (12) и (21), получаем

$$V_4 = \frac{5}{2}V_0, \quad P_4 = \frac{3}{2}P_0. \qquad (23) \quad [0.5]$$

Участок $2 \to 4$ идет менее круто, чем соответствующие адиабаты, поэтому на нем подводится количество тепла, равное

$$Q_{24}^{+} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_0\frac{5}{2}V_0 - 3P_0V_0\right) + \frac{3P_0 + \frac{3}{2}P_0}{2}\frac{3}{2}V_0 = \frac{9}{2}P_0V_0. \qquad (24) \quad [1.0]$$

Участок 4 → 3 идет более круто, чем соответствующие адиабаты, поэтому на нем отводится количество тепла, равное

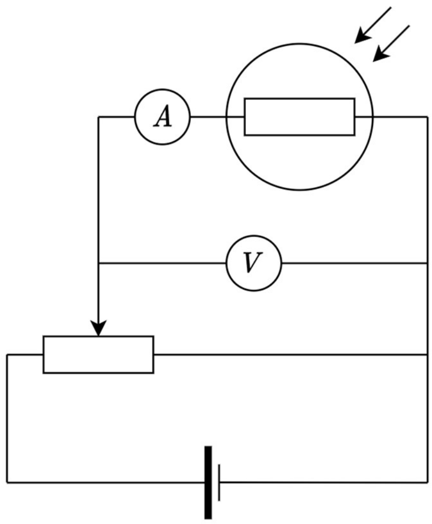
$$Q_{43}^{-} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}P_0\frac{5}{2}V_0 - P_0 3V_0\right) + \frac{P_0 + \frac{3}{2}P_0}{2}\frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2}P_0V_0. \qquad (24) \quad [1.0]$$

Искомый КПД оказывается равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{31}^{-} + Q_{43}^{-}}{Q_{12}^{+} + Q_{24}^{+}} = \frac{4}{15}. \qquad (25) \quad [0.5]$$

Задача 3. Фоторезистор и солнечный элемент (10.0 балла)

3.1.[0.5] Принципиальная электрическая схема для измерения вольт-амперной характеристики одинакова для всех элементов и имеет вид, показанный ниже.



3.2.[1.0] Сопротивление фоторезистора зависит от его освещенности, а поскольку показания амперметра не меняются, значит ток через фоторезистор не протекает, то есть падение напряжения на сопротивлении R равно

$$U_R = U_2. \qquad (1)$$

С другой стороны, из правой части схемы следует, что то же самое напряжение равно

$$U_R = \frac{U_1}{R + R_1}R. \qquad (2)$$

Приравнивая выражения (1) и (2), находим

$$R = \frac{U_2}{U_1 - U_2}R_1 = 10 \text{ Ом}. \qquad (3)$$

3.3.[0.5] Показания амперметра легко находятся и равны

$$I_A = \frac{U_2}{R} = \frac{U_1 - U_2}{R_1} = 0.6 \text{ А}. \qquad (4)$$

3.4.[1.0] Из приведенного выражения следует, что сопротивление фоторезистора меняется от его освещенности по закону

$$R = \frac{R_0}{2 - \exp(-\Phi)}, \quad R_0 = 5 \text{ Ом}, \qquad (5)$$

то есть при отсутствии освещенности $\Phi = 0$ оно равно R_0.
Собранная электрическая схема представляет собой мостик Уитстона, при этом ток через амперметр отсутствует, если выполняется условие

$$\frac{R_3}{R_0} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{6}$$

откуда

3.5.[1.0] Полное сопротивление всей цепи равно

$$R_{\text{tot}} = \frac{RR_1}{R + R_1} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \tag{8}$$

Падение напряжения на параллельно включенных сопротивлениях R_0 и R_1 составляет

$$U_1 = \frac{U}{R_{\text{tot}}} \frac{RR_1}{R + R_1} \tag{9}$$

и ток через сопротивление R_1 равен

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}. \tag{10}$$

Аналогично, падение напряжения на параллельно включенных сопротивлениях R_2 и R_3 составляет

$$U_2 = \frac{U}{R_{\text{tot}}} \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \tag{11}$$

и ток через сопротивление R_2 равен

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}. \tag{12}$$

Сила тока через амперметр равна

$$I_A = I_2 - I_1. \tag{13}$$

Подставляя числовые значения, находим с использованием (5) при $\Phi = 1$

$$I_A = 216 \text{ мА}. \tag{14}$$

3.6.[0.5] Используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора

$$R = 3.94 \text{ Ом} \tag{15}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi = 0.312. \tag{16}$$

3.7.[0.75] Вновь используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора при освещении точечным источником света

$$R = 3.529 \text{ Ом} \tag{17}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi_0 = 0.539. \tag{18}$$

При повороте плоскости приемника на угол α поток через фоторезистор становится равным

$$\Phi = \Phi_0 \cos\alpha = 0.269, \tag{19}$$

а сопротивление фоторезистора по формуле (5)

$$R = 4.04 \text{ Ом} \tag{20}$$

и используя формулы (8)-(13), получаем

$$I_A = 89 \text{ мА}. \tag{21}$$

3.8.[0.75] Используя формулы (8)-(13), находим сопротивление фоторезистора

$$R = 4.43 \text{ Ом} \tag{22}$$

и из (5) вычисляем освещенность, которая равна

$$\Phi = 0.138 \tag{23}$$

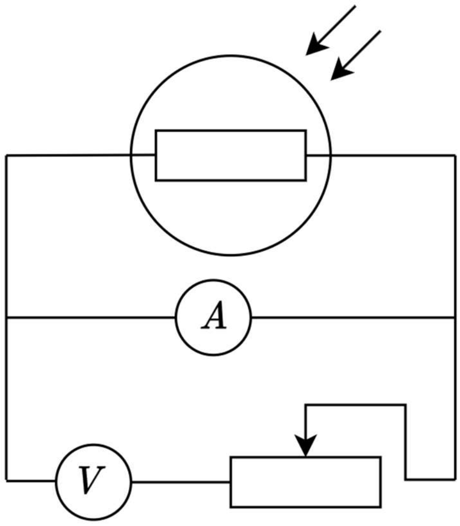
Для точечного источника освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния r до него

$$\Phi \sim \frac{1}{r^2}. \tag{24}$$

поэтому

$$r = L\sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}} = 1.98 \text{ м}. \tag{25}$$

3.9.[1.0] Принципиальная электрическая схема для определения вольтамперной характеристики солнечного элемента имеет вид, показанный на рисунке ниже.



3.10.[1.0] Для нахождения коэффициентов a и b достаточно знать две точки из графика и решить полученную систему уравнений, которая дает

$$a = 0.75\ \text{А}, \tag{26}$$

$$b = 0.03\ \text{А/В}^2. \tag{27}$$

3.11.[0.5] Максимальный ток достигается при напряжении, близком к нулю, и равен

$$I_{\max} = a = 0.75\ \text{А}. \tag{28}$$

3.12.[0.5] Максимальное напряжение достигается при силе тока, близкой к нулю, и равно

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{a}{b}} = 5\ \text{В}. \tag{29}$$

3.13.[1.0] Мощность, развиваемая солнечным элементом, равна

$$P(U) = IU = (a - bU^2)U. \tag{30}$$

Ее максимальное значение можно найти из графика, или напрямую для тех, кто знает производные.

Максимальная мощность равна

$$P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}a}{9}\sqrt{\frac{a}{b}} = 1.44\ \text{Вт} \tag{31}$$

и достигается при напряжении

$$U = \sqrt{\frac{a}{3b}} = 2.89\ \text{В}. \tag{32}$$