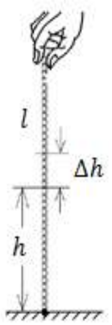
Решение задач. 9 класс.

Задача 1. «Солянка» (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1A (3,0 балла)



После того как отпускают цепочку, она будет падать с ускорением g и через время t на столе будет лежать участок цепочки длиной:

$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

Если длина всей цепочки равна l, то вес этого участка:

$$P = g\frac{hm}{l} \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2) получим:

$$P = \frac{mg^2t^2}{2l} \qquad (3)$$ **[1,0 балл]**

Оставшаяся часть цепочки будет лететь со скоростью $v = gt$.

За последующий бесконечно малый промежуток времени Δt на стол упадет элемент цепочки длиной:

$$\Delta h = v\Delta t \qquad (4)$$ **[0,5 баллов]**

Масса данного элемента цепочки равна:

$$\Delta m = \frac{m\cdot\Delta h}{l} \qquad (5)$$ **[0,5 баллов]**

Из-за взаимодействия со столом цепочка потеряет импульс, и на стол будет действовать дополнительная сила:

$$F_{\text{доп}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v\Delta m}{\Delta t} = \frac{v\cdot m\cdot\Delta h}{l\cdot\Delta t} = \frac{mg^2}{l}t^2 \qquad (6)$$ **[1,0 балл]**

Суммарная сила, действующая со стороны цепочки на стол:

$$F = P + F_{\text{доп}} = \frac{3mg^2t^2}{2l} \qquad (7)$$ **[0,5 баллов]**

Часть 1B (3,5 баллов)

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая:

$$cM\Delta t_1 = m\lambda + cm(t_1 - \Delta t_1) \qquad (1)$$ **[1,5 баллов]**

где m - масса кубика льда,
λ - удельная теплота плавления льда,
c - удельная теплоемкость воды,
t_1 - исходная температура чая.

Разделяя уравнение (1) на cm получим:

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \frac{\lambda}{c} + t_1 \qquad (2)$$

Запишем уравнение теплового баланса для второго случая:

$$\left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \frac{\lambda}{c} + t_1 \qquad (3)$$ **[1,0 балл]**

Исключая из (2) и (3) правые части, получим:

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right)\Delta t_1 = \left(\frac{M}{2m} + 1\right)(\Delta t_1 + \Delta t_2) \qquad (4)$$

Из уравнения (4) найдем отношение:

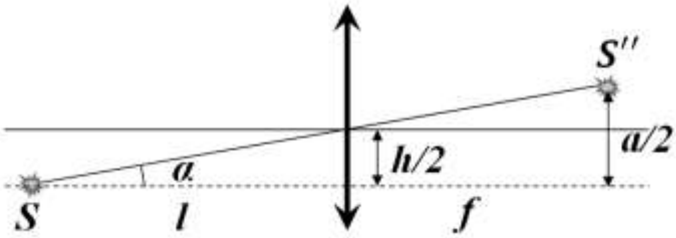
$$\frac{M}{m} = \frac{2\Delta t_2}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = \frac{2\cdot 10}{12-10} = 10$$

Следовательно, масса кубика льда:

$$m = \frac{M}{10} = \frac{100}{10} = 10 \text{ г.}$$ **[1,0 балл]**

Часть 1C (3,5 баллов)

После шлифовки две половины можно рассматривать, как две линзы со сдвинутыми оптическими осями и со сдвинутыми оптическими центрами. Сдвиг каждого центра относительно исходной оптической оси обозначим $\frac{h}{2}$, где h – толщина слоя, снятого при шлифовке. Так как луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется, то можно построения следующий рисунок.



[2,0 балла]

Видно, что

$$tg\alpha = \frac{\frac{h}{2}}{l} = \frac{a}{2(l+f)}. \qquad (1) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

Из уравнения (1) получаем:

$$h = \frac{al}{l+f}. \qquad (2) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Верхнее изображение S'' формирует нижняя часть линзы, а нижнее изображение S''' формирует верхняя часть линзы.

Задача 2. Что не договорил Архимед? (10,0 балла)

1. Максимальная сила Архимеда, которая может действовать на сосуд, определяется полным объемом сосуда

$$V = a^2L \qquad (1)$$

и равна

$$F_A = \rho_0 gV. \qquad (2)$$

Эта сила должна компенсировать силу тяжести, действующую на сосуд и равную

$$F = (m_0 + m_{cr})g. \qquad (3)$$

Из условия $F = F_A$, находим

$$m_{cr} = \rho_0 V - m_0 = 4{,}00 \text{ кг}. \qquad (4) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

2. В положении №1 сила Архимеда, действующая на сосуд, равна

$$F_A = \rho_0 gSH, \qquad (5)$$

где поперечное сечение равно

$$S = aL. \qquad (6)$$

Сила тяжести, действующая на сосуд, равна

$$F = (m_0 + m)g, \qquad (7)$$

тогда из условия равновесия получаем

$$H = \frac{m_0 + m}{\rho_0 aL} = 6{,}00 \text{ см}. \qquad (8) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

3. В положении №2 сила Архимеда, действующая на сосуд, равна

$$F_A = \rho_0 gsH, \qquad (9)$$

где поперечное сечение равно

$$s = a^2. \qquad (10)$$

Сила тяжести, действующая на сосуд, равна

$$F = (m_0 + m)g, \qquad (11)$$

тогда из условия равновесия получаем

$$H = \frac{m_0 + m}{\rho_0 a^2} = 30{,}0 \text{ см}. \qquad (12) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

4. Потенциальная энергия системы относительно уровня воды в водоеме состоит из трех частей. Потенциальной энергии пустого сосуда

$$U_{11} = -m_0 g\left(H - \frac{a}{2}\right), \qquad (13) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

потенциальной энергии налитой ртути

$$U_{12} = -mg\left(H - \frac{h}{2}\right), \qquad (14) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

и потенциальной энергии вытесненной воды

$$U_{13} = \rho_0 g S \frac{H^2}{2}. \qquad (15) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Здесь высота столбика ртути h определяется выражением

$$h = \frac{m}{\rho S}, \qquad (16)$$

Последнее выражение положительно, так как вода вытесняется до уровня воды в водоеме. Мысленно это можно представить так, как будто вместе с сосудом в воду входит жидкость плотности $-\rho_0$, так что в итоге образуется пустота, которую и занимает сосуд.

Используя (8), полное изменение потенциальной энергии системы равно

$$U_1 = U_{11} + U_{12} + U_{13} = -\frac{\left[m^2(\rho-\rho_0)+m_0\rho(2m+m_0-\rho_0 a^2 L)\right]}{2aL\rho\rho_0} g = -0.36 \text{ Дж}. \qquad (17) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

5. Потенциальная энергия системы относительно уровня воды в водоеме состоит из трех частей. Потенциальной энергии пустого сосуда

$$U_{21} = -m_0 g\left(H - \frac{L}{2}\right), \qquad (18) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

потенциальной энергии налитой ртути

$$U_{12} = -mg\left(H - \frac{h}{2}\right), \qquad (19) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

и потенциальной энергии вытесненной воды

$$U_{13} = \rho_0 g s \frac{H^2}{2}. \qquad (20) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Здесь высота столбика ртути h определяется выражением

$$h = \frac{m}{\rho s}, \qquad (21)$$

Используя (12), полное изменение потенциальной энергии системы равно

$$U_2 = U_{11} + U_{12} + U_{13} = -\frac{\left[m^2(\rho-\rho_0)+m_0\rho(2m+m_0-\rho_0 a^2 L)\right]}{2a^2\rho\rho_0} g = -1.82 \text{ Дж}. \qquad (22) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

6. Так как

$$U_2 < U_1, \qquad (23) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

то сосуд будет плавать в положении №2, соответствующем меньшему значению потенциальной энергии.

7. Оба положения равновесия возможны, если выполняется условие

$$U_2 = U_1, \qquad (24) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

так как при этом оба положения соответствуют минимуму потенциальной энергии.

Подставляя (17) и (22), получаем

$$m' = \frac{\sqrt{\rho\rho_0 m_0(m_0+(\rho-\rho_0)a^2L)} - \rho m_0}{\rho-\rho_0} = 1{,}26 \text{ кг}. \qquad (25) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Интересно отметить, что формулу (25) можно получить и из уравнения моментов с учетом того факта, что точкой приложения силы Архимеда является центр масс вытесненной воды.

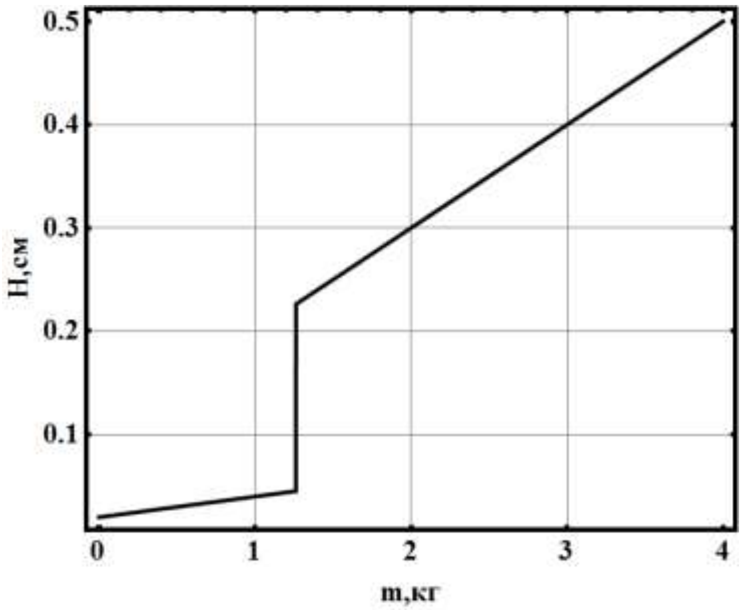
8. При $m < m'$ выполняется $U_1 < U_2$, а значит сосуд плавает в положении №1 и искомое значение глубины погружения равно

$$H(m) = \frac{m_0+m}{\rho_0 a L}, \qquad (26) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

а при $m > m'$ выполняется $U_1 > U_2$, а значит сосуд плавает в положении №2 и искомое значение глубины погружения равно

$$H(m) = \frac{m_0+m}{\rho_0 a^2}. \qquad (27) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

График, определяемый формулами (26) и (27) имеет вид, показанный ниже.



[1,5 баллов]

Задача 3. Что такое стабилизатор? (10,0 балла)

1. Сопротивление стержня стабилизатора R_0 при температуре 0°С равно

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{l}{\pi r^2} = 1.00 \text{ Ом}. \qquad (1)$$ **[0,3 баллов]**

2. Формула зависимости сопротивления стержня от температуры имеет вид

$$R = R_0(1 + \gamma t) = 0{,}83 \text{ Ом}. \qquad (2)$$ **[0,3 баллов]**

3. Мощность теплоотдачи с поверхности стабилизатора определяется формулой

$$P_0 = \alpha S(t - t_0), \qquad (3)$$ **[0,3 баллов]**

где площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$S = 2\pi r l. \qquad (4)$$

Учитывая, что $t_0 = 0°C$, получаем формулу

$$P_0 = At, \qquad (5)$$

в которой коэффициент пропорциональности равен

$$A = 2\pi r l \alpha = 6{,}28 \times 10^{-2} \, \frac{\text{Вт}}{°\text{C}}. \qquad (6)$$ **[1,0 балл]**

4. При подаче напряжения U на стержень стабилизатора в нем выделяется теплота с мощностью, определяемой законом Джоуля-Ленца

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0(1+\gamma t)}. \qquad (7)$$ **[0,3 баллов]**

В состоянии теплового равновесия выполняется условие

$$P = P_0, \qquad (8)$$ **[0,2 балла]**

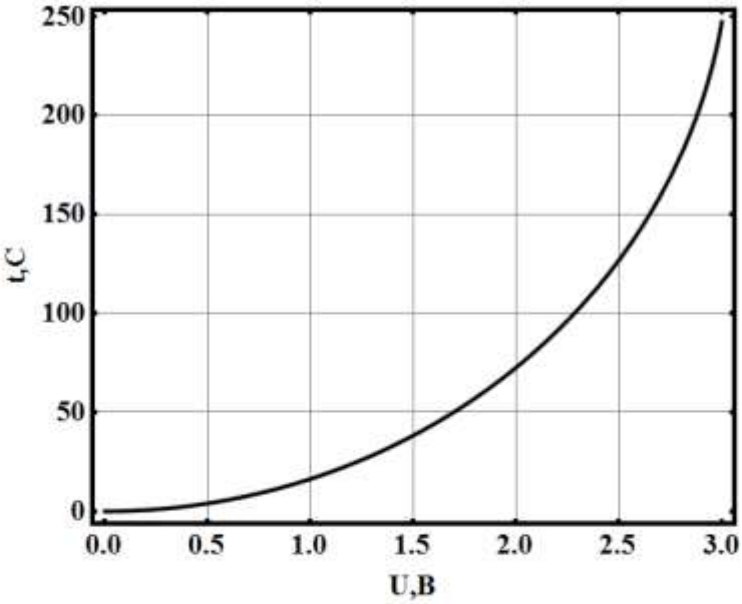
откуда следует, что температура определяется из решения квадратного уравнения и имеет вид

$$t_{1/2} = \frac{1}{2\gamma}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4U^2\gamma}{AR_0}}\right). \qquad (9)$$ **[0,5 баллов]**

Физический смысл имеет только корень со знаком плюс, так как при $U = 0$ должно быть $t = 0°\text{C}$, поэтому

$$t = \frac{1}{2\gamma}\left(\sqrt{1 + \frac{4U^2\gamma}{AR_0}} - 1\right). \qquad (10)$$ **[0,5 баллов]**

График этой зависимости имеет вид, показанный ниже.



[0,5 баллов]

5. Так как значение γ отрицательно, то выражение (10) имеет смысл только если

$$U < U_{max} = \sqrt{-\frac{AR_0}{4\gamma}} = 3{,}04\ \text{В}. \qquad (11) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

6. Из формул (5), (7) и (8) следует, что

$$U(t) = \sqrt{AtR_0(1+\gamma t)}. \qquad (12) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

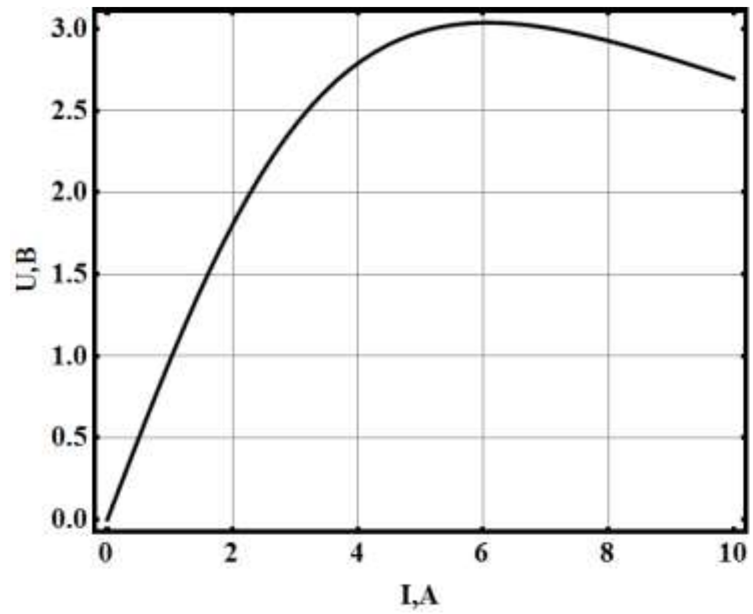
С другой стороны по закону Ома с учетом (2) имеем

$$I(t) = \frac{U(r)}{R(t)} = \sqrt{\frac{At}{R_0(1+\gamma t)}}. \qquad (13) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

Исключая температуру из формул (12) и (13) температуру, получаем

$$U = \frac{IR_0}{\left(1-\frac{\gamma I^2 R_0}{A}\right)}. \qquad (14) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

График этой зависимости изображен на рисунке ниже.



[0,5 баллов]

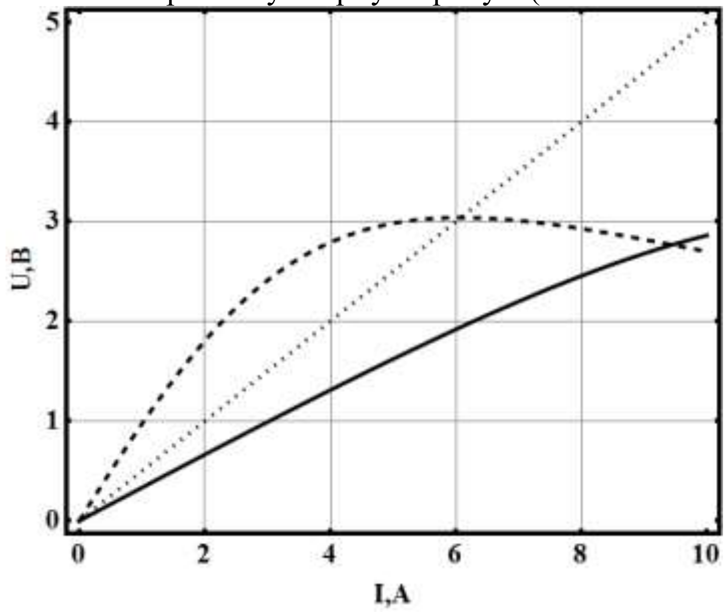
7. При малых токах знаменатель в выражении (14) примерно равен единице, поэтому

$$R_{\text{eff}} = R_0. \qquad (15) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

8. Из формулы (14) следует, что при силе тока, стремящейся в бесконечно, напряжение стремится к нулю, то есть

$$U \to 0. \qquad (16) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

9. При параллельном соединении напряжения на элементах одинаковы, а силы тока складываются. Поэтому надо на том же графике построить вольтамперную характеристику стабилитрона (штриховая линия), обычного сопротивления R_1 (прямая точечная линия), а затем при одинаковых напряжениях сложить токи и построить суммарную кривую (сплошная линия).



[1,0 балл]

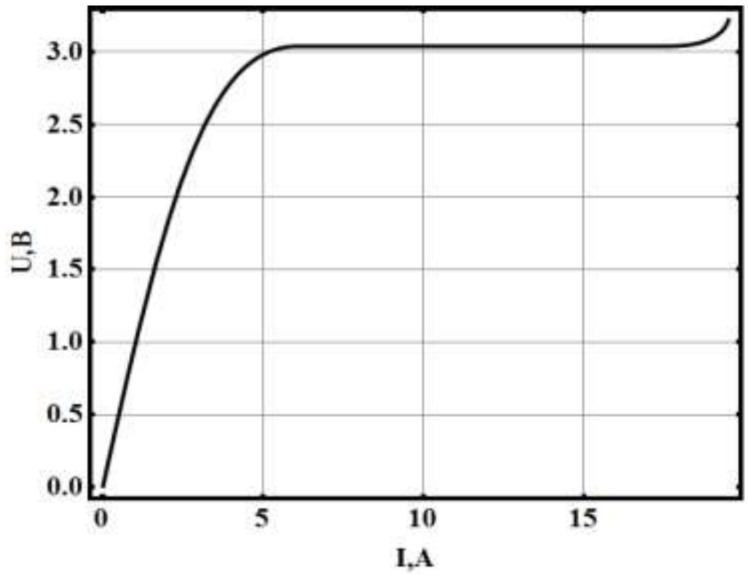
10. Зависимость напряжения от температуры находится аналогично выражению (12) и дает

$$U(t) = \sqrt{AtR_0 \frac{\rho(t)}{\rho_0}}, \qquad (17)$$ **[0,6 баллов]**

а по закону Ома

$$I(t) = \frac{U(r)}{R(t)} = \sqrt{\frac{At\rho_0}{R_0 \rho(t)}}. \qquad (18)$$ **[0,6 баллов]**

Уравнения (17) и (18) определяют вольтамперную характеристику в параметрическом виде, то есть для каждого t из диапазона от 0 до $1000°\mathrm{C}$ вычисляем силу тока и напряжения по формулам (17) и (18) и наносим соответствующие точки на график. В результате получаем рисунок, показанный ниже.



[1,0 балл]

11. Из приведенного выше графика находим, что напряжение стабилизации равно

$$U_{st} \approx 3 \text{ В}. \qquad (19)$$ **[0,2 балла]**

12. Из приведенного выше графика находим, что

$$I_{min} \approx 4{,}5 \text{ А}, \qquad (20)$$ **[0,5 баллов]**

$$I_{max} \approx 19 \text{ А}. \qquad (21)$$ **[0,5 баллов]**