Решение задач. 11 класс.

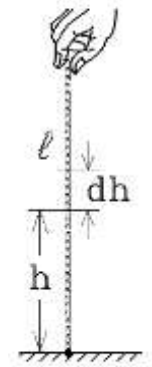
Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1А (3,0 балла)

Цепочка массы m висит неподвижно, касаясь нижним концом поверхности стола. Цепочку отпускают. Найдите среднюю величину силы давления цепочки на стол за время падения. Ускорение свободного падения g.

Часть 1А (3,0 балла)



Цепочка массы m, длиной l висит неподвижно, касаясь нижним концом поверхности стола. Цепочку отпускают. Найдите зависимость силы давления цепочки на стол от времени. Ускорение свободного падения g.

После того как отпускают цепочку, она будет падать с ускорением g и через время t на столе будет лежать участок цепочки длиной:

$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad (1) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Если длина всей цепочки равна l, то вес этого участка:

$$P = g\frac{hm}{l} \qquad (2) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Подставляя (1) в (2) получим:

$$P = \frac{mg^2t^2}{2l} \qquad (3) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Оставшаяся часть цепочки будет лететь со скоростью $v = gt$. **[0,1 баллов]**

За последующий бесконечно малый промежуток времени Δt на стол упадет элемент цепочки длиной:

$$\Delta h = v\Delta t \qquad (4) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Масса данного элемента цепочки равна:

$$\Delta m = \frac{m \cdot \Delta h}{l} \qquad (5) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Из-за взаимодействия со столом цепочка потеряет импульс, и на стол будет действовать дополнительная сила:

$$F_{\text{доп}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v\Delta m}{\Delta t} = \frac{v \cdot m \cdot \Delta h}{l \cdot \Delta t} = \frac{mg^2}{l}t^2 \qquad (6) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

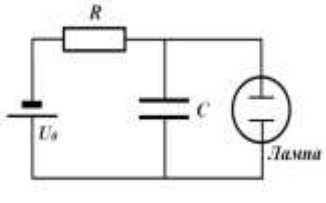
Суммарная сила, действующая со стороны цепочки на стол:

$$F = P + F_{\text{доп}} = \frac{3mg^2t^2}{2l} \qquad (7) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

Среднее значение за все время падения $\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}}$ имеет величину: **[0,2 балла]**

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\tau - 0}\int_0^\tau F dt = \frac{mg^2\tau^2}{2l} = mg \qquad (8) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

Часть 1В (3,5 балла)



Конденсатор заряжается до напряжения зажигания лампы и затем очень быстро разряжается через лампу. Так как $U_0 \gg U_1$ (где U_0 - напряжение источника; U_1 - напряжение зажигания лампы), то силу тока зарядки $I_1 = U_0/R$ можно считать постоянной. **[1,0 балл]**

Тогда время зарядки $\tau = \frac{Q_1}{I_1}$ **[1,0 балл]**

где $Q_1 = U_1 C$ - заряд на конденсаторе при напряжении U_1. **[0,5 баллаов]**

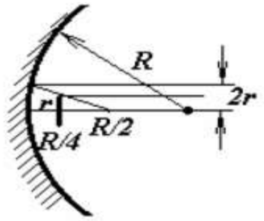
Для времени зарядки получаем

$$\tau = RC\frac{U_1}{U_0}. \qquad (1) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Пренебрегая временем разрядки, получим частоту вспышек

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}\frac{U_0}{U_1} = \frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{10^3}{10} = 10^3\text{Гц} = 1\text{кГц}. \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Часть 1С (3,5 балла)



Так как диск находится в воздухе, то мощность теплоотдачи W' пропорциональна разности температур поверхности диска и воздуха ΔT. Пусть плотность потока энергии падающего света равна ω_0. Тогда мощность световой энергии, попадающей на переднюю грань диска равна

$$W_2 = \pi r^2 \omega_0 \qquad (1) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

В установившемся режиме эта мощность равна мощности теплоотдачи

$$W_2' = \lambda \Delta T_2, \qquad (2) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

где λ – коэффициент теплоотдачи.

Из уравнении (1) и (2) следует

$$\Delta T_2 = \frac{\pi r^2 \omega_0}{\lambda} \qquad (3) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

Учитывая, что фокусное расстояние сферического зеркала равно $R/2$, легко найти, что на заднюю грань диска попадает энергия, переносимая световым потоком через кольцо с внутренним радиусом r и внешним $2r$. **[1,0 балл]**

$$W_1 = (\pi(2r)^2 - \pi r^2)\omega_0 = 3\pi r^2 \omega_0 \qquad (4) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

В состоянии термодинамического равновесия она равна мощности теплоотдачи:

$$W_1' = \lambda \Delta T_1, \qquad (5) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

Тогда

$$\Delta T_1 = \frac{3\pi r^2 \omega_0}{\lambda} \qquad (6) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

С учетом (3) и (6) найдем искомое отношение:

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 3. \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Задача 2. Что за одноатомный газ? (10,0 балла)

1. На поршень действует сила давления со стороны газа, равная

$$F_0 = p_0 S, \qquad (1) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

а также сила, вызванная взаимодействием поршня с дном сосуда и равная

$$F_q = qE, \qquad (2) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

где q – заряд поршня, а E – электрическое поле дна сосуда.

Так как фактически мы имеем плоский конденсатор, то электрическое поле дна определяется формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (3) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

где поверхностная плотность заряда определяется формулой

$$\sigma = \frac{q}{S}. \qquad (4) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Так как поршень находится в равновесии, то

$$F_0 = F_q. \qquad (5) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Из (1)-(3) получаем, что давление газа под поршнем равно

$$p_0 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = 4{,}15 \times 10^6 \text{ Па}. \qquad (6) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

2. Из уравнения Менделеева-Клайперона для газа массой m_0 под поршнем имеем

$$p_0 V_0 = \frac{m_0}{\mu} R T_0, \qquad (7) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

где объем газа V равен

$$V_0 = S x_0. \qquad (8) \qquad \textbf{[0,1 баллов]}$$

Из уравнений (6)-(8) получаем молярную массу газа под поршнем в виде

$$\mu = \frac{2\varepsilon_0 S m R T_0}{x_0 q^2} = 4{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}. \qquad (9) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Одноатомный газ с такой молярной массой, очевидно, является гелием. **[0,1 баллов]**

3. Из уравнения (6) следует, что давление газа остается постоянным, то есть процесс изобарный, а так как газ сосуде является одноатомным, то его молярная теплоемкость равна

$$C_p = \frac{5}{2}R = 20{,}8\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}. \qquad (10) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

4. Согласно (6) давление газа под поршнем постоянно, а значит

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}. \qquad (11) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

Так как по условию $V = 2V_0$, то отсюда следует, что

$$T = 2T_0 = 200\ \text{К}. \qquad (12) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

5. С учетом (10), находим

$$Q = C_p \frac{m}{\mu}(T - T_0) = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT_0 = 519\ \text{Дж}. \qquad (13) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

6. Так как сосуд теплоизолирован от окружающей среды, то в процессе колебаний поршня давление газа в нем будет менять по адиабате, уравнений которой имеет вид

$$pV^{\gamma} = const. \qquad (14) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

где $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты одноатомного газа.

В соответствии с уравнением (14) малое изменение давления газа под поршнем связано с малым изменением его объема

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma p_0}{V_0}. \qquad (15) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

В результате изменения объема газа на поршень будет действовать возвращающая сила

$$F_1 = \Delta p S = -\frac{\gamma p_0 S}{x_0}\Delta x = -\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 S}\Delta x, \qquad (16) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

а сила притяжения поршня к дну сосуда не изменится.

Уравнение движения поршня принимает вил

$$Ma = -\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 S}\Delta x, \qquad (17) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

что приводит к гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 M S}} = 3{,}72 \times 10^3\ \text{с}^{-1}. \qquad (18) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

7. Скорость подвижного поршня будет максимальной в тот момент, когда суммарная сила, действующая на него, обратится в нуль. Так как заряд поршня уменьшился вдвое, то в соответствие с формулой (2) новое равновесное давление равно

$$p = \frac{p_0}{2}, \qquad (19) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

В соответствии с уравнением адиабаты (14) и уравнением состояния (7) температура газа в сосуде уменьшится и станет равной

$$T = \frac{T_0}{2^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{T_0}{2^{2/5}}. \qquad (20) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

Так как теплообмен с окружающей средой отсутствует, то по первому началу термодинамики изменение внутренней энергии равно совершенной газом работе, то есть

$$\Delta U + A = 0. \qquad (21) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

Работа газа целиком затрачивается на увеличение кинетической энергии поршня, поэтому

$$A = \frac{Mv_{max}^2}{2} + \Delta W, \qquad (22)$$

где ΔW потенциальная энергия конденсатора равна:

$$\Delta W = \frac{q^2}{4\varepsilon_0 S}(x - x_0),\ x = 2^{1/\gamma}x_0 = 2^{3/5}x_0 \qquad (23) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

а изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R(T - T_0). \qquad (24) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

Их уравнений (20)-(23) окончательно получаем

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mRT_0}{\mu M}\left(4 - 3 \cdot 2^{-2/5} - 2^{3/5}\right)} \approx 6{,}62\ \text{м/с}. \qquad (25) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

8. В соответствии с уравнением адиабаты давление в сосуде изменяется с координатой x по закону

$$p(x) = p_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma}. \qquad (26) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

Так как поршень движется равноускоренно и его начальная скорость равна нулю, то координата x изменяется по закону

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (27)$$ **[0,1 балла]**

Уравнение движения поршня имеет вид

$$Ma = p(x)S - \frac{q(q-q(t))}{2\varepsilon_0 S}. \quad (28)$$ **[0,3 баллов]**

Используя условие $at^2/2 \ll x_0$, находим

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0 SMa}{q} = 2{,}07 \times 10^{-9}\ \text{Кл}, \quad (29)$$ **[1,0 балл]**

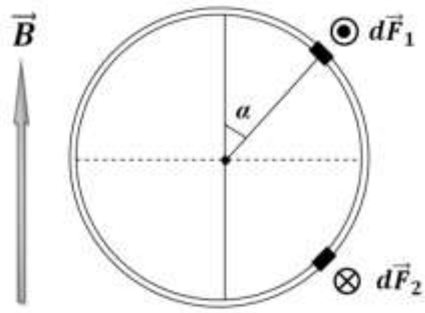
$$C_2 = \frac{\gamma q a}{2x_0} = 14{,}3 \times 10^{-3}\ \text{Кл/с}^2. \quad (30)$$ **[1,0 балл]**

Задача 3. Что такое гиромагнитные явления? (10,0 балла)

1. Рассмотрим два элемента кольца длиной dl, симметрично расположенные относительно диаметра, как показано на рисунке. Согласно закону Ампера силы, действующие на эти элементы равны по модулю

$$dF_1 = IB\cos\alpha\, dl, \quad (1)$$

$$dF_2 = IB\cos\alpha\, dl = dF_1. \quad (2)$$ **[0,3 баллов]**



Так как направления сил противоположны и все кольцо можно разбить на симметричные элементы, от отсюда получаем

$$\vec{F} = \sum d\vec{F}_i = 0. \quad (3)$$ **[0,7 баллов]**

Альтернативное доказательство.

Выражение для силы Ампера в векторном виде записывается так

$$d\vec{F} = I\vec{B} \times d\vec{l},$$

и принимая во внимание, что магнитное поле постоянно, после интегрирования получаем

$$F = I\vec{B} \times \oint d\vec{l} = 0,$$

так как

$$\oint d\vec{l} = 0.$$

2. Так как силы, действующие на элементы равны и противоположны по направлению, то они создают момент, равный

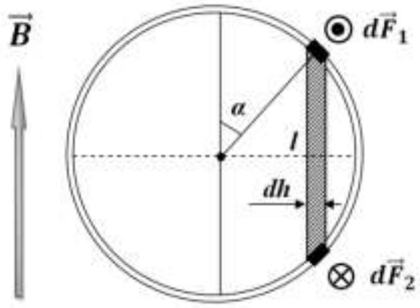
$$dM = dF_1 l. \quad (4)$$ **[0,3 баллов]**

Из рисунка можно заключить. что

$$dh = dl\cos\alpha, \quad (5)$$ **[0,2 балла]**

и тогда площадь, заштрихованная на рисунке равна

$$dS = l dh. \quad (6)$$ **[0,2 балла]**



м

Таким образом, момент равен

$$dM = IBdS \quad (7) \quad \textbf{[0,2 балла]}$$

и после интегрирования получается площадь кольца, то есть

$$M = IBS = IB\pi R^2, \quad (8) \quad \textbf{[0,3 баллов]}$$

откуда

$$p_m = IS = I\pi R^2. \quad (9) \quad \textbf{[0,3 баллов]}$$

3. Сила тока в кольце зависит от концентрации электронов n, их скорости v и поперечного сечения провода S и имеет вид

$$I = nevS, \quad (10) \quad \textbf{[0,4 балла]}$$

где e – элементарный заряд.

Так как электроны движутся по кольцу, то их момент импульса равен

$$L = NmvR, \quad (11) \quad \textbf{[0,5 баллов]}$$

где полное число электронов в кольце равно

$$N = nS2\pi R. \quad (12) \quad \textbf{[0,4 балла]}$$

Поэтому момент импульса всех электронов в кольце принимает вид

$$L = \frac{2m}{e} I\pi R^2. \quad (13) \quad \textbf{[0,2 балла]}$$

4. Из (9) и (13 находим)

$$p_m = \frac{e}{2m} L, \quad (14) \quad \textbf{[0,3 баллов]}$$

то есть

$$g = 1. \quad (15) \quad \textbf{[0,2 балла]}$$

5. Известно, что магнитное поле в веществе увеличивается в μ раз, то есть

$$B' = \mu B. \quad (16) \quad \textbf{[0,5 баллов]}$$

6. Для изменения магнитного поля в цилиндре по его поверхности должен протекать электрической ток I, который создает внутри магнитное поле, вычисляемое по формуле бесконечного соленоида

$$B_0 = \mu_0 \frac{I}{L}. \quad (17) \quad \textbf{[0,4 балла]}$$

Полная индукция магнитного поля в цилиндре

$$B' = B + B_0, \quad (18) \quad \textbf{[0,3 баллов]}$$

откуда с учетом (16) получаем

$$I = \frac{\mu - 1}{\mu_0} BL. \quad (19) \quad \textbf{[0,3 баллов]}$$

7. Ток (19) обусловлен электронами, которые в соответствии с (9) приобретают магнитный момент

$$p_m = \frac{\mu - 1}{\mu_0} BL\pi R^2, \quad (20) \quad \textbf{[0,5 баллов]}$$

а значит эти электроны в соответствии с (14) имеют механический момент

$$L = \frac{2m}{e}\frac{\mu - 1}{\mu_0} BL\pi R^2. \quad (21) \quad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Кристаллическая решетка магнетика по закону сохранения приобретет момента импульса, противоположный по направлению моменту импульса электронов, что приведет к закручиванию нити.

Момент инерции цилиндра равен

$$I_0 = \frac{1}{2} m R^2, \qquad (22) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

а приобретаемая им кинетическая энергия

$$E = \frac{L^2}{2 I_0}. \qquad (23) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

При закручивании нити на угол α_0 необходимо совершить работу

$$A = \frac{1}{2} f \alpha_0^2. \qquad (24) \qquad \textbf{[0,8 баллов]}$$

По закону сохранения энергии

$$E = A, \qquad (25) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

откуда

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{Mf}} \frac{2m}{e} \frac{\mu - 1}{\mu_0} BL\pi R. \qquad (26) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

8. Численные расчеты по формуле (26) дают

$$\alpha_0 = 25{,}4 \times 10^{-3} \text{ рад} = 1.46°. \qquad (27) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

9. Из теории размерностей можно получить, что

$$B = \frac{2m}{eg} \omega = 0{,}114 \text{ мТл}. \qquad (28) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$