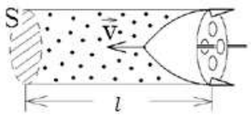
Решение задач. 10 класс.

Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех независимых частей.

Часть 1А (3,0 балла)

Способ_1



Закон сохранения импульса для неупругого столкновения ракеты с облаком космической пыли записывается в следующем виде:

$$m_0v_0 = (m_0 + \Delta m)\cdot(v_0 - \Delta v) \quad (1) \quad \textbf{[1,0 балл]}$$

Масса облака космической пыли, на которую изменится первоначальная масса ракеты после столкновения:

$$\Delta m = m_1\cdot n\cdot l\cdot S \quad (2) \quad \textbf{[0,25 баллов]}$$

Конечная скорость ракеты:

$$v = (v_0 - \Delta v) = \delta\, v_0 \quad (3) \quad \textbf{[0,25 баллов]}$$

где $\delta = 0{,}99$

Тогда, подставляя уравнения (2) и (3) в (1) получим:

$$m_0v_0 = (m_0 + m_1\cdot n\cdot l\cdot S)\cdot\delta v_0 \quad (4) \quad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Искомая ширина облака:

$$l = \frac{m_0}{m_1 n\cdot S}\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) = 2{,}02\cdot 10^{10}\text{м}. \quad (5) \quad \textbf{[1,0 балл]}$$

Способ_2

За время Δt ракета, летящая со скоростью v, столкнется с пылью, находящейся в объеме $Sv\Delta t$ и суммарная масса этой пыли, которая увеличит массу ракеты:

$$\Delta m = m_1\cdot n\cdot Sv\Delta t \quad (1)$$

Массу ракеты можно определить по уравнению Мещерского (пылинки прилипают к ракете создавая силу торможения) для реактивного движения в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} = F_{\text{торм}} \quad (2)$$

Устраняя dt из уравнения (2), находим:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dm}{m} = d\big(ln(v) + ln(m)\big) = d\big(ln(vm)\big) = 0 \quad (3)$$

Уравнения (3) получим:

$$vm = v_0m_0 = const \text{ или } m = \frac{v_0m_0}{v} \quad (4)$$

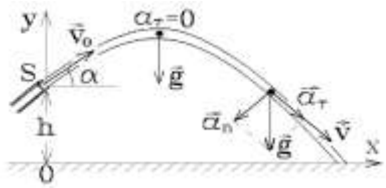
С учетом вышеприведенных уравнений и соотношений получим:

$$dl = vdt = -\frac{v_0m_0}{nSm_1}\frac{dv}{v^2} \quad (5)$$

Проинтегрировав обе части и с учетом конечной скорости $v = 0{,}99v_0$, найдем:

$$l = \frac{v_0m_0}{nSm_1}\left(\frac{1}{0{,}99v_0} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{v_0}{0{,}99nSm_1} = 2{,}02\cdot 10^7 \text{ км}.$$

Часть 1B (3,5 баллов)



Радиус кривизны $R = \frac{v^2}{a_n}$ будет наименьшим в верхней точке траектории, где скорость струи $v = v_0cos\alpha$ минимальна (α-угол наклона брандспойта к горизонту), а нормальное ускорение $a_n = g$ – максимально (смотрите рисунок).

Отсюда

$$R_{min} = h = \frac{(v_0cos\alpha)^2}{g} \quad (1) \quad \textbf{[1,0 балл]}$$

и $cos\alpha = \sqrt{\frac{gh}{v_0^2}}$ (2)

Из кинематического соотношения

$$y = h + v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \qquad (3) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

можно определить время полета струидо падения на землю:

$$t = \frac{\left(v_0 sin\alpha + \sqrt{v_0^2 sin^2\alpha + 2gh}\right)}{g} \qquad (4)$$

Подставляя сюда начальный угол α из формулы (2), найдем:

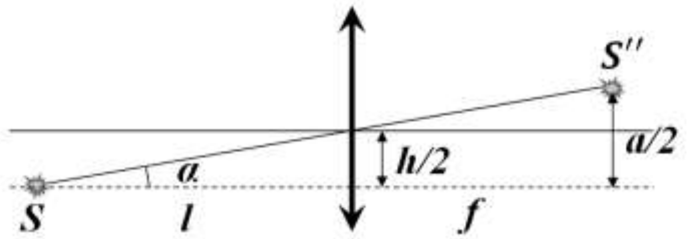
$$t = \frac{\left(\sqrt{v_0^2 - gh} + \sqrt{v_0^2 + gh}\right)}{g} \qquad (5) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

За это время из брандспойта вылетает вода объемом $v_0 St$. Поэтому масса воды, находящейся в воздухе

$$m = \rho_{\text{воды}} v_0 St = \frac{\rho_{\text{воды}} v_0 S t}{g}\left(\sqrt{v_0^2 - gh} + \sqrt{v_0^2 + gh}\right) = 91{,}7 \text{ кг}. \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

Часть 1С (3,5 баллов)

После шлифовки две половины можно рассматривать, как две линзы со сдвинутыми оптическими осями и со сдвинутыми оптическими центрами. Сдвиг каждого центра относительно исходной оптической оси обозначим $\frac{h}{2}$, где h – толщина слоя, снятого при шлифовке. Так как луч, проходящий через оптический центр линзы, не преломляется, то можно построения следующий рисунок.



[2,0 балла]

Видно, что

$$tg\alpha = \frac{\frac{h}{2}}{l} = \frac{a}{2(l+f)}. \qquad (1) \qquad \textbf{[1,0 балл]}$$

Из уравнения (1) получаем:

$$h = \frac{al}{l+f}. \qquad (2) \qquad \textbf{[0,5 баллов]}$$

Верхнее изображение S'' формирует нижняя часть линзы, а нижнее изображение S''' формирует верхняя часть линзы.

Задача 2. Что за одноатомный газ? (10,0 балла)

1. На поршень действует сила давления со стороны газа, равная

$$F_0 = p_0 S, \qquad (1) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

а также сила, вызванная взаимодействием поршня с дном сосуда и равная

$$F_q = qE, \qquad (2) \qquad \textbf{[0,2 балла]}$$

где q – заряд поршня, а E – электрическое поле дна сосуда.

Так как фактически мы имеем плоский конденсатор, то электрическое поле дна определяется формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (3) \qquad \textbf{[0,3 баллов]}$$

где поверхностная плотность заряда определяется формулой

$$\sigma = \frac{q}{S}. \qquad (4)$$

Так как поршень находится в равновесии, то

$$F_0 = F_q. \qquad (5)$$

Из (1)-(3) получаем, что давление газа под поршнем равно

$p_0 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = 4{,}15 \times 10^6$ Па. (6) **[0,7 баллов]**

2. Из уравнения Менделеева-Клайперона для газа массой m_0 под поршнем имеем

$p_0 V_0 = \frac{m_0}{\mu} R T_0$, (7) **[0,2 балла]**

где объем газа V равен

$V_0 = S x_0$. (8)

Из уравнений (6)-(8) получаем молярную массу газа под поршнем в виде

$\mu = \frac{2\varepsilon_0 S m R T_0}{x_0 q^2} = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. (9) **[0,7 баллов]**

Одноатомный газ с такой молярной массой, очевидно, является гелием.

3. Из уравнения (6) следует, что давление газа остается постоянным, то есть процесс изобарный, а так как газ сосуде является одноатомным, то его молярная теплоемкость равна

$C_p = \frac{5}{2} R = 20{,}8$ Дж/(моль · К). (10) **[0,3 баллов]**

4. Согласно (6) давление газа под поршнем постоянно, а значит

$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$. (11) **[0,2 балла]**

Так как по условию $V = 2V_0$, то отсюда следует, что

$T = 2T_0 = 200$ К. (12) **[0,2 балла]**

5. С учетом (10), находим

$Q = C_p \frac{m}{\mu}(T - T_0) = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu} R T_0 = 519$ Дж. (13) **[0,5 баллов]**

6. Так как сосуд теплоизолирован от окружающей среды, то в процессе колебаний поршня давление газа в нем будет менять по адиабате, уравнений которой имеет вид

$pV^\gamma = const$. (14) **[0,3 баллов]**

где $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты одноатомного газа.

В соответствии с уравнением (14) малое изменение давления газа под поршнем связано с малым изменением его объема

$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma p_0}{V_0}$. (15) **[0,2 балла]**

В результате изменения объема газа на поршень будет действовать возвращающая сила

$F_1 = \Delta p S = -\frac{\gamma p_0 S}{x_0}\Delta x = -\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 S}\Delta x$, (16) **[0,2 балла]**

а сила притяжения поршня к дну сосуда не изменится.

Уравнение движения поршня принимает вил

$Ma = -\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 S}\Delta x$, (17)

что приводит к гармоническим колебаниям с частотой

$\omega = \sqrt{\frac{\gamma q^2}{2\varepsilon_0 x_0 M S}} = 3{,}72 \times 10^3$ с$^{-1}$. (18) **[1,0 балл]**

7. Скорость подвижного поршня будет максимальной в тот момент, когда суммарная сила, действующая на него, обратится в нуль. Так как заряд поршня уменьшился вдвое, то в соответствие с формулой (2) новое равновесное давление равно

$p = \frac{p_0}{2}$, (19) **[0,5 баллов]**

В соответствии с уравнением адиабаты (14) и уравнением состояния (7) температура газа в сосуде уменьшится и станет равной

$T = \frac{T_0}{2^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{T_0}{2^{2/5}}$. (20)

Так как теплообмен с окружающей средой отсутствует, то по первому началу термодинамики изменение внутренней энергии равно совершенной газом работе, то есть

$\Delta U + A = 0$. (21) **[0,3 баллов]**

Работа газа целиком затрачивается на увеличение кинетической энергии поршня, поэтому

$A = \frac{M v_{max}^2}{2} + \Delta W$, (22) где ΔW потенциальная энергия конденсатора равна:

$$\Delta W = \frac{q^2}{4\varepsilon_0 S}(x - x_0),\ x = 2^{1/\gamma}x_0 = 2^{3/5}x_0 \qquad (23)$$

а изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R(T - T_0). \qquad (24)$$

Их уравнений (20)-(23) окончательно получаем

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mRT_0}{\mu M}\left(4 - 3\cdot 2^{-2/5} - 2^{3/5}\right)} \approx 6{,}62\ \text{м/с}. \qquad (25)$$ **[1,0 балл]**

8. В соответствии с уравнением адиабаты давление в сосуде изменяется с координатой x по закону

$$p(x) = p_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma}. \qquad (26)$$ **[0,2 балла]**

Так как поршень движется равноускоренно и его начальная скорость равна нулю, то координата x изменяется по закону

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \qquad (27)$$ **[0,2 балла]**

Уравнение движения поршня имеет вид

$$Ma = p(x)S - \frac{q(q - q(t))}{2\varepsilon_0 S}. \qquad (28)$$ **[0,3 баллов]**

Используя условие $at^2/2 \ll x_0$, находим **[0,3 баллов]**

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0 SMa}{q} = 2{,}07\times 10^{-9}\ \text{Кл}, \qquad (29)$$ **[1,0 балл]**

$$C_2 = \frac{\gamma q a}{2x_0} = 14{,}3\times 10^{-3}\ \text{Кл/с}^2. \qquad (30)$$ **[1,0 балл]**

Задача 3. Что такое стабилизатор? (10,0 балла)

1. Сопротивление стержня стабилизатора R_0 при температуре 0°C равно

$$R_0 = \rho_0\frac{l}{S} = \rho_0\frac{l}{\pi r^2} = 1.00\ \text{Ом}. \qquad (1)$$ **[0,3 баллов]**

2. Формула зависимости сопротивления стержня от температуры имеет вид

$$R = R_0(1 + \gamma t) = 0{,}83\ \text{Ом}. \qquad (2)$$ **[0,3 баллов]**

3. Мощность теплоотдачи с поверхности стабилизатора определяется формулой

$$P_0 = \alpha S(t - t_0), \qquad (3)$$ **[0,3 баллов]**

где площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$S = 2\pi r l. \qquad (4)$$

Учитывая, что $t_0 = 0°C$, получаем формулу

$$P_0 = At, \qquad (5)$$

в которой коэффициент пропорциональности равен

$$A = 2\pi r l\alpha = 6{,}28\times 10^{-2}\ \frac{\text{Вт}}{°\text{C}}. \qquad (6)$$ **[1,0 балл]**

4. При подаче напряжения U на стержень стабилизатора в нем выделяется теплота с мощностью, определяемой законом Джоуля-Ленца

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0(1 + \gamma t)}. \qquad (7)$$ **[0,3 баллов]**

В состоянии теплового равновесия выполняется условие

$$P = P_0, \qquad (8)$$ **[0,2 балла]**

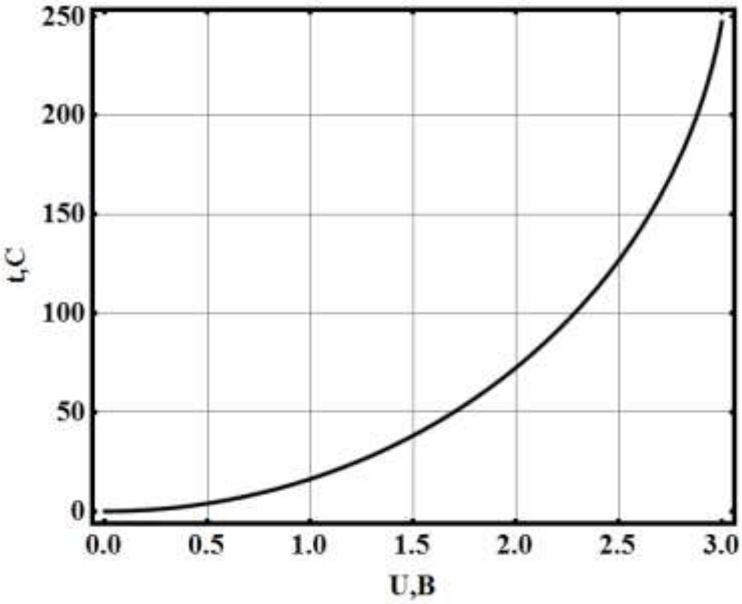
откуда следует, что температура определяется из решения квадратного уравнения и имеет вид

$$t_{1/2} = \frac{1}{2\gamma}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4U^2\gamma}{AR_0}}\right). \qquad (9)$$ **[0,5 баллов]**

Физический смысл имеет только корень со знаком плюс, так как при $U = 0$ должно быть $t = 0°C$, поэтому

$$t = \frac{1}{2\gamma}\left(\sqrt{1 + \frac{4U^2\gamma}{AR_0}} - 1\right). \qquad (10)$$ **[0,5 баллов]**

График этой зависимости имеет вид, показанный ниже.



[0,5 баллов]

5. Так как значение γ отрицательно, то выражение (10) имеет смысл только если

$$U < U_{max} = \sqrt{-\frac{AR_0}{4\gamma}} = 3{,}04 \text{ В}. \quad (11)$$ **[0,3 баллов]**

6. Из формул (5), (7) и (8) следует, что

$$U(t) = \sqrt{AtR_0(1+\gamma t)}. \quad (12)$$ **[0,3 баллов]**

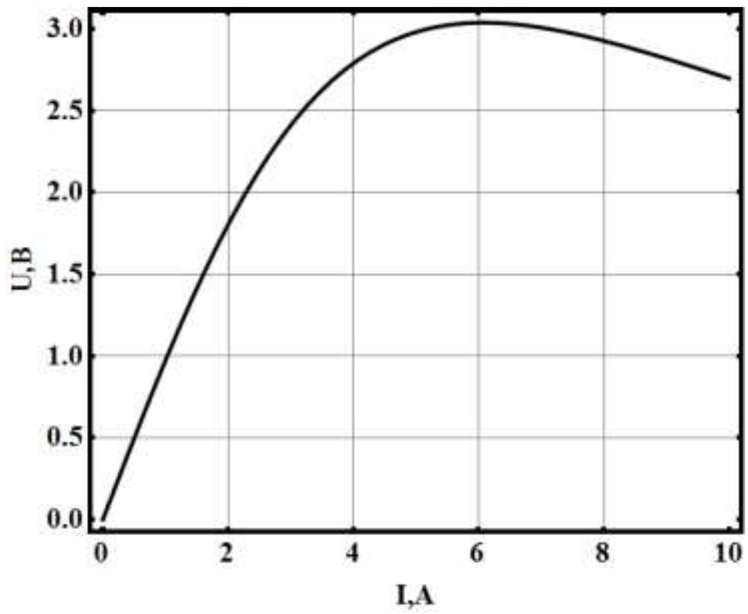
С другой стороны по закону Ома с учетом (2) имеем

$$I(t) = \frac{U(r)}{R(t)} = \sqrt{\frac{At}{R_0(1+\gamma t)}}. \quad (13)$$ **[0,3 баллов]**

Исключая температуру из формул (12) и (13) температуру, получаем

$$U = \frac{IR_0}{\left(1 - \frac{\gamma I^2 R_0}{A}\right)}. \quad (14)$$ **[0,2 балла]**

График этой зависимости изображен на рисунке ниже.



[0,5 баллов]

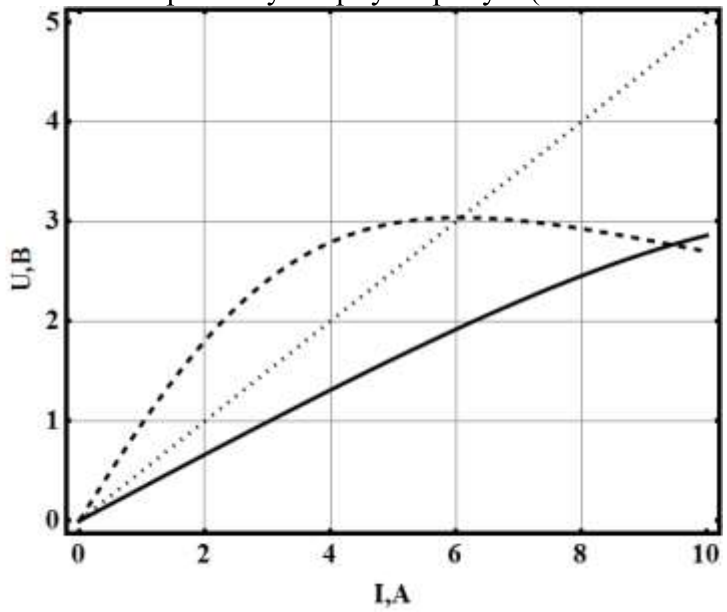
7. При малых токах знаменатель в выражении (14) примерно равен единице, поэтому

$$R_{\text{eff}} = R_0. \quad (15)$$ **[0,3 баллов]**

8. Из формулы (14) следует, что при силе тока, стремящейся в бесконечно, напряжение стремится к нулю, то есть

$$U \to 0. \quad (16)$$ **[0,3 баллов]**

9. При параллельном соединении напряжения на элементах одинаковы, а силы тока складываются. Поэтому надо на том же графике построить вольтамперную характеристику стабилитрона (штриховая линия), обычного сопротивления R_1 (прямая точечная линия), а затем при одинаковых напряжениях сложить токи и построить суммарную кривую (сплошная линия).



[1,0 балл]

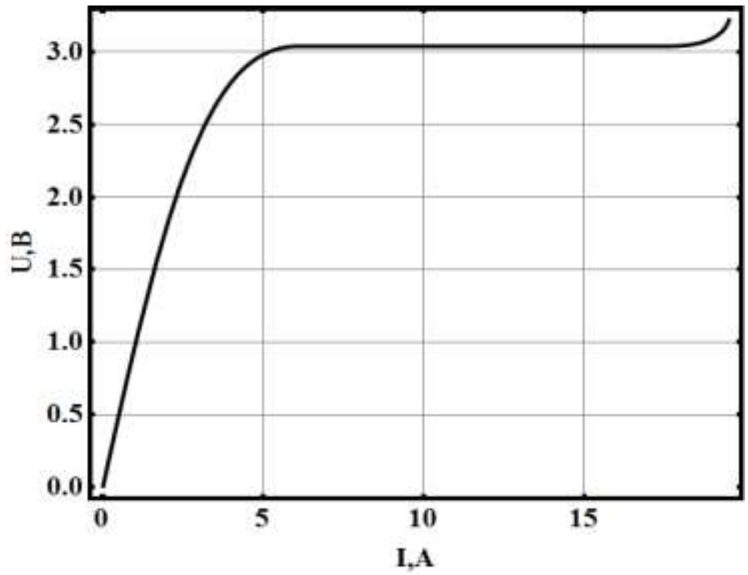
10. Зависимость напряжения от температуры находится аналогично выражению (12) и дает

$$U(t) = \sqrt{AtR_0\frac{\rho(t)}{\rho_0}}, \qquad (17)$$ **[0,6 баллов]**

а по закону Ома

$$I(t) = \frac{U(r)}{R(t)} = \sqrt{\frac{At\rho_0}{R_0\rho(t)}}. \qquad (18)$$ **[0,6 баллов]**

Уравнения (17) и (18) определяют вольтамперную характеристику в параметрическом виде, то есть для каждого t из диапазона от 0 до 1000°C вычисляем силу тока и напряжения по формулам (17) и (18) и наносим соответствующие точки на график. В результате получаем рисунок, показанный ниже.



[1,0 балл]

11. Из приведенного выше графика находим, что напряжение стабилизации равно

$$U_{st} \approx 3 \text{ В}. \qquad (19)$$ **[0,2 балла]**

12. Из приведенного выше графика находим, что

$$I_{min} \approx 4{,}5 \text{ А}, \qquad (20)$$ **[0,5 баллов]**

$$I_{max} \approx 19 \text{ А}. \qquad (21)$$ **[0,5 баллов]**