Решение задач. 9 класс.

Решение задач. 9 класс.

Задача 1. «Солянка» (10,0 баллов)

Часть 1A

При растяжении пружины на величину x на подставку будет действовать направленная вверх сила, равная

$$F = kx. \tag{1}$$

Помимо этого на подставку действует сила тяжести

$$F_g = mg. \tag{2}$$

Очевидно, что условие подпрыгивания подставки имеет вид

$$F = F_g, \tag{3}$$

откуда находим величину, на которую должна быть растянута пружина

$$x = \frac{Mg}{k}. \tag{4}$$

Применяя закон сохранения энергии к двум положениям шарика, получим

$$\frac{kx_0^2}{2} = mg(x + x_0) + \frac{kx^2}{2}, \tag{5}$$

откуда находим два решения

$$x_{0,1} = -\frac{Mg}{k}, \tag{6}$$

$$x_{0,2} = \frac{(M+2m)g}{k}. \tag{7}$$

Так как деформация шарика не может быть отрицательной, то выбираем ответ $x_{0,2}$.

Часть 1B

Известно, что зависимость сопротивления от температуры имеет вид

$$R = R_0(1 + \alpha T), \tag{1}$$

в котором сопротивление при нуле температуры вычисляется через проводимость как

$$R_0 = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}. \tag{2}$$

Из (1) следует. что при изменении температуры на ΔT сопротивление изменяется на величину

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}\alpha\Delta T. \tag{3}$$

С другой стороны при этом внутренняя энергия возрастает на величину, даваемую формулой

$$\Delta U = cm\Delta T, \tag{4}$$

в которой масса образца определяется выражением

$$m = \rho l S. \tag{5}$$

Решая совместно (3) и (4), получим

$$\Delta U = \frac{c\rho S^2\sigma\Delta R}{\alpha} = 114 \text{ Дж}. \tag{6}$$

Часть 1C

Так как изображение прямое, то оно является мнимым. Необходимо отдельно рассмотреть случаи собирающей и рассеивающей линз.

1) Собирающая линза.

Формула линзы записывается в виде

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{1}$$

откуда

$$f = \frac{Fd}{F-d}. \tag{2}$$

Здесь F – фокусное расстояние линзы, d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от линзы до изображения.

Видно, что это расстояние больше чем d, поэтому по условию

$$f - d = \frac{F}{2}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем квадратное уравнение

$$2d^2 + Fd - F^2 = 0, \tag{4}$$

которое имеет решения

$$d_1 = -F, \tag{5}$$

и

$$d_2 = \frac{F}{2}. \tag{6}$$

Так как предмет является действительным, то нас устраивает только корень (6), поэтому окончательно находим по определению увеличения

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 2. \tag{7}$$

2) Рассеивающая линза.

Формула линзы записывается в виде

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \tag{8}$$

откуда

$$f = \frac{Fd}{F+d}. \tag{9}$$

Видно, что это расстояние меньше чем d, поэтому по условию

$$d - f = \frac{F}{2}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем квадратное уравнение

$$2d^2 - Fd - F^2 = 0, \tag{11}$$

которое имеет решения

$$d_1 = F, \tag{12}$$

и

$$d_2 = -\frac{F}{2}. \tag{13}$$

Так как предмет является действительным, то нас устраивает только корень (6), поэтому окончательно находим по определению увеличения

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Задача 2. Ледяная вода (10,0 балла)

1) Пусть V_0 – объем подводной части айсберга, V – объем его надводной части. Тогда по закону Архимеда

$$F_A = \rho_0 g V_0, \tag{1}$$

где g - ускорение свободного падения.

Так как айсберг не тонет, то сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на айсберг

$$F = mg = F_A, \tag{2}$$

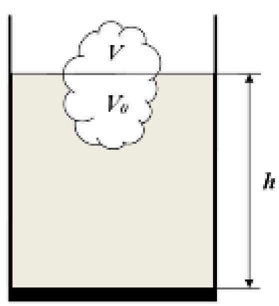
где

$$m = \rho(V + V_0). \tag{3}$$

Решая совместно (1)-(3), получаем

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0 - \rho} = 9.$$

(4)



2) Пусть в стакан налили воду массой M и положили кусок льда массой m так, что он плавает. По закону Архимеда, объем вытесненной воды V_0 (то есть подводной части льда) равен массе льда

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0}, \tag{5}$$

а объем налитой воды

$$V = \frac{M}{\rho_0}. \tag{6}$$

Уровень воды в стакане определяется выражением

$$h = \frac{V + V_0}{S} = \frac{M + m}{\rho_0 S}. \tag{7}$$

Решение задач. 9 класс.

Таким образом, уровень воды в стакане определяется суммарной массой воды и льда, которая при таянии измениться не может. Это значит, что уровень воды в стакане остается неизменным.

3) Масса налитой в стакан воды равна

$$M = \rho_0 V, \qquad (8)$$

а значит формула (7) дает

$$h = \frac{V+V_0}{S} = \frac{\rho_0 V + m}{\rho_0 S} = 6{,}00 \text{ см}. \qquad (9)$$

4) Для того чтобы определить массу кусков льда в калориметрах, надо рассмотреть те эксперименты, в которых он полностью растаял. Это соответствует конечным температурам, отличающимся от температуры равновесия льда и воды, которая равна 0℃.

Пусть установившаяся температура равна $t > 0$℃, тогда уравнение теплового баланса имеет вид

$$cM(t_0 - t) = \lambda m + cm(t - 0℃), \qquad (10)$$

откуда

$$t = t_0 - \frac{(\lambda + ct_0)m}{c(m+M)}. \qquad (11)$$

Используя (7), окончательно получаем

$$t = t_0 - \frac{(\lambda + ct_0)m}{c\rho S h}. \qquad (12)$$

В уравнение (12) входят две неизвестные величины m и t_0. Выберем две экспериментальные точки, так что

$$t_1 = t_0 - \frac{(\lambda + ct_0)m}{c\rho S h_1}, \qquad (13)$$

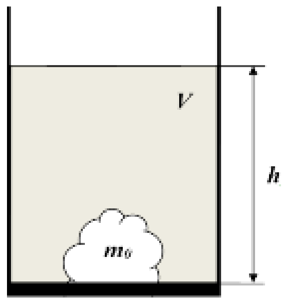
$$t_2 = t_0 - \frac{(\lambda + ct_0)m}{c\rho S h_2}. \qquad (14)$$

Решая совместно (13) и (14), находим

$$m = \frac{c\rho_0 S h_1 h_2 (t_1 - t_2)}{c(h_1 t_1 - h_2 t_2) + \lambda(h_1 - h_2)} = 27{,}0 \text{ г}. \qquad (15)$$

5) Аналогично, из (13) и (14) получаем

$$t_0 = \frac{h_1 t_1 - h_2 t_2}{t_1 - t_2} = 10{,}0 \text{ ℃}. \qquad (16)$$



6) Так как плотность льда меньше плотности воды, то при его плавлении суммарный объем льда и воды должен уменьшатся, а это приведет к уменьшению уровня воды в калориметре.

7) Пусть m_0 – начальная, а m – конечная масса льда. Тогда уровни воды в сосуде равны соответственно

$$Sh_1 = V + \frac{m_0}{\rho}, \qquad (17)$$

$$Sh_2 = V + \frac{m}{\rho} + \frac{m_0 - m}{\rho_0}. \qquad (18)$$

Вычитая (18) из (17), получим

$$S\Delta h = (m_0 - m)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = \frac{(m_0 - m)(\rho_0 - \rho)}{\rho_0 \rho}. \qquad (19)$$

Уравнение теплового баланса в данном случае имеет вид

$$c\rho V t_0 = \lambda(m_0 - m). \qquad (20)$$

Из (19) и (20) получаем

$$t_0 = \frac{\lambda \rho_0 S \Delta h}{cV(\rho_0 - \rho)} = 36{,}0 \text{ ℃}. \qquad (21)$$

8) Известно, что при кристаллизации выделяется тепло. Например, это приводит к тому, что перед выпадением снега наблюдается потепление. Выделившееся количество тепла пойдет на увеличении температуры воды, которая в равновесном состоянии должна достигнуть 0℃. Масса льда m, который намерзнет на гвозде, находится из уравнения теплового баланса

$$\lambda m = cM(0 - t_0). \qquad (22)$$

Намерзший на гвозде лед может привести к его всплытию. Для этого средняя плотность гвоздя с намерзшим льдом должна сравняться с плотностью воды, то есть

$$\rho_0 = \frac{m_s + m}{\frac{m_s}{\rho_s} + \frac{m}{\rho}}. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что максимальная масса гвоздя m_s равна

$$m_s = -\frac{c\rho_s V t_0}{\lambda}\frac{\rho_0(\rho_0 - \rho)}{\rho(\rho_s - \rho_0)} = 1{,}60 \text{ г}. \qquad (24)$$

Задача 3. Черный ящик (10,0 балла)

1) Известно, что вольтметры показывают падение напряжения на них самих. Сопротивление вольтметров, соединенных параллельно, равно

$$R_{II} = \frac{RR}{R+R} = \frac{R}{2}, \qquad (1)$$

а полное сопротивление цепи

$$R_{tot} = R + R_{II} = \frac{3}{2}R. \qquad (2)$$

Сила тока, протекающего через вольтметр V_1 равна

$$I_{tot} = \frac{\mathcal{E}}{R_{tot}}, \qquad (3)$$

а значит падение напряжения на нем равно

$$V_1 = I_{tot}R = \frac{2}{3}\mathcal{E} = 6 \text{ В}. \qquad (4)$$

Падение напряжения на вольтметрах V_2 и V_3 равны между собой и составляют

$$V_2 = V_3 = \mathcal{E} - V_1 = \frac{1}{3}\mathcal{E} = 3 \text{ В}. \qquad (5)$$

2) Из вольтамперной характеристики следует, что при напряжении равном нулю сила тока через черный ящик не равна нулю. Это означает, что в черном ящике присутствует источник питания (батарейка).

3) Мощность, развиваемая черным ящиком, равна

$$P = UI, \qquad (6)$$

где по условию

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = 1. \qquad (7)$$

Из симметрии выражений (5) и (6) следует, что максимальная мощность достигается при

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}},\ \ I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad (8)$$

и равна

$$P_{max} = \frac{1}{2}U_0 I_0 = 0{,}5 \text{ мВт}. \qquad (9)$$

4) Пусть черный ящик развивает максимальную мощность, тогда сила тока в нем и падение напряжения даются выражением (8). Сила тока, протекающего через вольтметр V_2, равна

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}R}, \qquad (10)$$

а значит сила тока, протекающего через вольтметр V_1, составляет

$$I_1 = I_2 + \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \qquad (11)$$

Отсюда находим напряжение источника

$$\mathcal{E} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} + I_1 R = U_0\sqrt{2} + \frac{I_0}{\sqrt{2}}R. \qquad (12)$$

При этом показания вольтметров равны

$$V_1 = I_1 R = \frac{U_0 + I_0 R}{\sqrt{2}} = 1{,}41 \text{ В}, \qquad (13)$$

$$V_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \text{ В}. \qquad (14)$$

5) Пусть падение напряжения на черном ящике равно U, а сила протекающего через него тока – I. Сила тока, протекающего через вольтметр V_2, равна

$$I_2 = \frac{U}{R}, \qquad (15)$$

а значит сила тока, протекающего через вольтметр V_1, составляет

$$I_1 = I_2 + I. \tag{16}$$

Отсюда напряжение источника

$$\mathcal{E} = U + I_2 R = 2U + IR. \tag{17}$$

Таким образом, сила тока, протекающего через черный ящик, зависит от напряжения источника по закону

$$I = \frac{\mathcal{E} - 2U}{R}. \tag{18}$$

Для удобства, перепишем соотношение (18) в безразмерном виде

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\mathcal{E}}{U_0}\frac{U_0}{I_0 R} - \frac{U}{U_0}\frac{2U_0}{I_0 R}. \tag{19}$$

Одновременно с соотношением (19) существует связь между U и I, выражаемая вольтамперной характеристикой

$$I = \begin{cases} I_0\sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2}, & \left|\frac{U}{U_0}\right| \le 1 \\ 0, & \left|\frac{U}{U_0}\right| > 1 \end{cases}. \tag{20}$$

Решая совместно (19) и (20) при $\mathcal{E} = 0$, получим

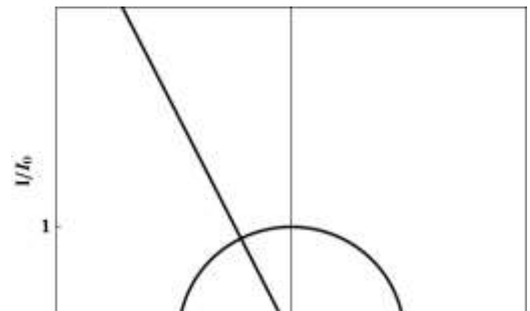
$$U = -U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}}, \tag{21}$$

$$I = I_0 \frac{\frac{2U_0}{I_0 R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}}. \tag{22}$$

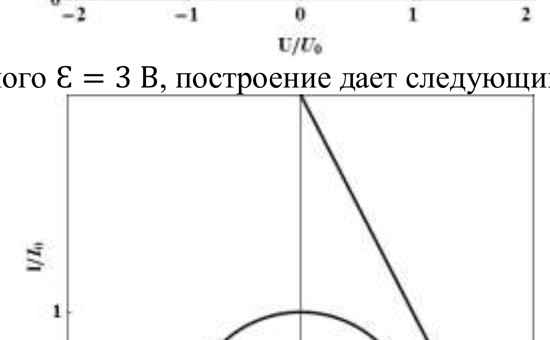
Таким образом, показания вольтметров равны

$$V_1 = -V_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}} = 0{,}45 \text{ В}. \tag{23}$$

Соответствующее графическое построение приведено на рисунке ниже, на котором прямая соответствует уравнению (19).



6) В случае напряжения, равного $\mathcal{E} = 3$ В, построение дает следующий рисунок:



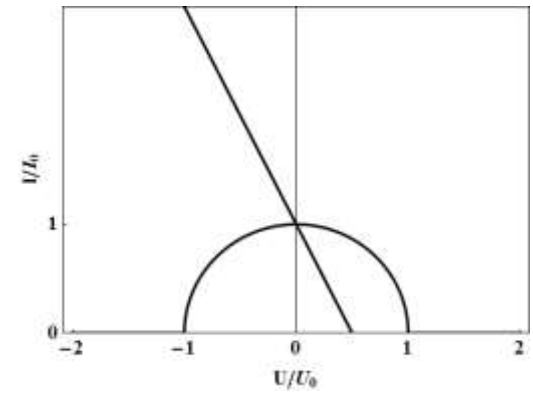
из которого можно заключить, что сила тока, протекающего через черный ящик равна нулю, а напряжение на нем совпадает с напряжением на вольтметре V_2 и составляет

$$V_2 = \frac{\mathcal{E}}{2} = 1{,}5 \text{ В}. \quad (24)$$

Отсюда падение напряжения на вольтметре V_1 равно

$$V_1 = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2} = 1.5 \text{ В}. \quad (25)$$

7) Построение должно давать следующий рисунок



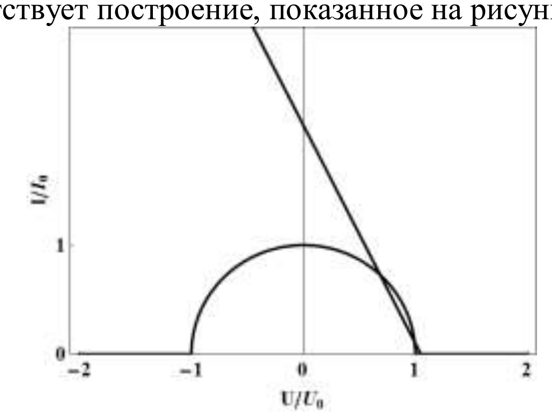
из которого определяем, что напряжение источника равно

$$\mathcal{E} = U_0 = 1 \text{ В}. \quad (26)$$

8) Решая совместно систему уравнений (19) и (20), получаем два корня

$$U = U_0 \frac{\frac{2\mathcal{E}U_0}{I_0^2R^2} \pm \sqrt{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2} - \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2R^2}}}{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2}}. \quad (27)$$

Этому случаю соответствует построение, показанное на рисунке внизу:



Устойчивому решению соответствует меньший из корней, который равен

$$U = U_0 \frac{\frac{2\mathcal{E}U_0}{I_0^2R^2} - \sqrt{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2} - \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2R^2}}}{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2}} = 0{,}69 \text{ В}. \quad (28)$$

9) Не все точки пересечения прямой (19) и полуокружности (20) соответствуют устойчивым значениям тока и напряжения в цепи. Определим, какие точки являются устойчивыми. Пусть напряжение на черном ящике увеличилось на некоторую малую величину δU, тогда сила тока через него уменьшилась на некоторое значение δI. Изменение тока через вольтметр, который подключен параллельно к черному ящику, равно

$$\delta I_R = \frac{\delta U}{R}. \quad (29)$$

Для устойчивости решения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$-\delta I + \delta I_R > 0, \quad (30)$$

так как при этом ток через вольтметр V_1 возрастет, а это приведет к падению напряжения на черном ящике и вольтметре V_2.

Из (29) и (30) следует, что

$$\frac{\delta I}{\delta U} < \frac{1}{R}. \tag{31}$$

Условие (31) соответствует прямой 1 на рисунке, которая является касательной к окружности и ее коэффициент наклона к оси x составляет U_0/I_0R.

Проведя через точку окружности A прямую 2 из уравнения (19), находим максимальное напряжение источника

$$\mathcal{E} = \frac{U_0 + 2I_0R}{\sqrt{1+\left(\frac{I_0R}{U_0}\right)^2}} = 2{,}12\text{ В}. \tag{32}$$