Решение задач. 11 класс.
Задача 1. «Солянка» (10,0 балла)
Часть 1А

Пусть v – скорость шарика перед ударом о пластинку, а Δt – очень малое время удара шарика о пластинку. В момент удара о пластинку на шарик будет действовать сила реакции со стороны пластинки, равная по теореме об импульсе силы

$$N'\Delta t = 2mv, \quad (1)$$

а это приведет к тому, что пластинка с такой же силой будет давить на плоскость и возникнет дополнительная сила трения

$$F_{\text{тр}}{}' \le \mu N'. \quad (2)$$

В результате действия этой силы трения скорость пластинки уменьшится на величину Δv_1, которая находится из теоремы об импульсе силы

$$M\Delta v_1 = F_{\text{тр}}{}'\Delta t. \quad (3)$$

После соударения шарик будет находиться в воздухе в течении времени

$$t = \frac{2v}{g} \quad (4)$$

и за это время скорость пластинки возрастет на величину Δv_2, которая находится из теоремы об импульсе силы

$$M\Delta v_2 = \left(F - F_{\text{тр}}\right)t, \quad (5)$$

в которой сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu M g. \quad (6)$$

Для того чтобы скорость не увеличивалась необходимо соблюдение условия

$$\Delta v_1 = \Delta v_2, \quad (7)$$

откуда

$$m \ge \frac{F}{\mu g} - M = 0.5 \text{ кг}. \quad (8)$$

Часть 1В

По закону электромагнитной индукции Фарадея В треугольнике будет возникать э.д.с индукции, равная

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (1)$$

Изменение потока пропорционально изменению площади и равно

$$\Delta \Phi = B\Delta S, \quad (2)$$

где

$$\Delta S = lv\Delta t. \quad (3)$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = Blv. \quad (4)$$

Сопротивление стержня находится по формуле

$$R = \rho\frac{l}{S}, \quad (5)$$

откуда искомая сила тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BvS}{\rho} = 10{,}0 \text{ А}. \quad (6)$$

Часть 1С

Собирающая линза дает действительное изображение, расположенное за линзами на расстоянии a, которое находится из формулы линзы

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F_1}, \quad (1)$$

откуда

$$a = \frac{LF_1}{L - F_1}. \quad (2)$$

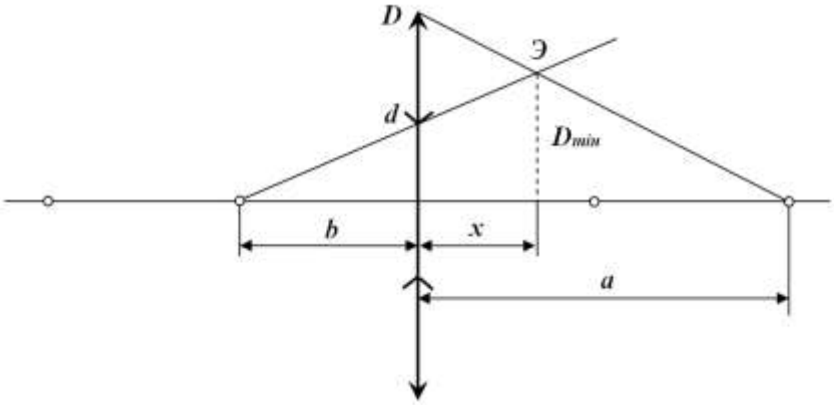
Рассеивающая линза дает мнимое изображение, расположенное перед линзой на расстоянии b, которое находится из формулы линзы

$$\frac{1}{L}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{F_2}, \quad (3)$$

откуда

$$b=\frac{LF_2}{L+F_2}. \quad (4)$$

Сразу за линзой будут наблюдаться расходящийся и сходящийся пучки, поэтому минимальный размер пятна на экране, перемещающемся за линзами, будет наблюдать в точке, соответствующей пересечению этих пучков как показано на рисунке внизу.



Из построения видно, что

$$\frac{D_{min}}{(x+b)}=\frac{d}{b}, \quad (5)$$

$$\frac{D_{min}}{(a-x)}=\frac{D}{a}. \quad (6)$$

Отсюда

$$D_{min}=\frac{a+b}{\frac{a}{d}+\frac{b}{D}}=\frac{dDL(F_1+F_2)}{L(dF_1+DF_2)-F_1F_2(D-d)}=1{,}5\ \text{см} \quad (7)$$

Задача 2. Газовый цилиндр (10,0 балла)

1) На поршень действует сила давления со стороны газа, равная

$$F=pS, \quad (1)$$

а также сила, вызванная деформацией пружины и равная по закону Гука

$$F_s=-kx_0. \quad (2)$$

Так как поршень находится в равновесии, то

$$F+F_s=0. \quad (3)$$

Из (1)-(3) получаем, что давление газа под поршнем равно

$$p=\frac{kx_0}{S}. \quad (4)$$

2) Из уравнения Менделеева-Клайперона для газа массой m_0 под поршнем имеем

$$pV=\frac{m_0}{\mu}RT_0, \quad (5)$$

где объем газа V равен

$$V=Sx_0. \quad (6)$$

Из уравнений (4)-(6) получаем массу газа под поршнем в виде

$$m_0=\frac{\mu k x_0^2}{RT_0}. \quad (7)$$

3) Согласно (4) давление газа под поршнем пропорционально x

$$p\sim x, \quad (8)$$

а его объем

$$V\sim x, \quad (9)$$

поэтому в соответствии с (5)

$$T \sim x^2. \tag{10}$$

Таким образом

$$T = 4T_0. \tag{11}$$

4) Внутренняя энергия газа возрастет на величину, равную

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m_0}{\mu}R(T - T_0), \tag{12}$$

при этом газ совершит работу, которая уйдет на изменение энергии упругой деформации пружины

$$A = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}. \tag{13}$$

По первому началу термодинамики находим

$$Q = \Delta U + A = 6kx_0^2. \tag{14}$$

5) Из уравнения (1) заключаем, что при любом процессе давление и объем газа связаны соотношением

$$pV^{-1} = const, \tag{15}$$

откуда с учетом уравнения состояния газа получаем

$$TV^{-2} = const. \tag{16}$$

Отсюда следует простая формула для связи изменения температуры и объема газа

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{2}\frac{V}{T}. \tag{17}$$

По определению, молярная теплоемкость газа равна

$$C = \frac{1}{\nu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}, \tag{18}$$

где $\nu = m_0/\mu$ – число молей.

Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T, \tag{19}$$

а совершаемая им работа

$$A = p\Delta V. \tag{20}$$

С учетом первого начало термодинамики (14) и выражения (17), получаем

$$C = 2R. \tag{21}$$

6) Так как сосуд теплоизолирован от окружающей среды, то в процессе колебаний поршня давление газа в нем будет менять по адиабате, уравнений которой имеет вид

$$pV^\gamma = const. \tag{22}$$

где $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты одноатомного газа.

В соответствии с уравнением (22) малое изменение давления газа под поршнем связано с малым изменением его объема

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma p}{V}. \tag{23}$$

В результате изменения объема газа на поршень будет действовать возвращающая сила

$$F_1 = \Delta pS = -\frac{\gamma pS}{x}\Delta x = -\gamma k\Delta x. \tag{24}$$

и сила упругости со стороны пружины

$$F_2 = -k\Delta x. \tag{25}$$

Полная возвращающая сила равна

$$F = F_1 + F_2 = (\gamma + 1)k\Delta x \tag{26}$$

и пропорциональна отклонению, что приводит к гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{(\gamma+1)k}{m}}. \tag{27}$$

Массой газа можно полностью пренебречь по сравнению с массой поршня.

7) Пусть поршень отклонился от положения равновесия на некоторую величину x. Так как на систему не действуют внешние силы, то положение центра масс системы измениться не может, то поршень должен сместиться в противоположную сторону на величину y, равную

$$mx - My = 0, \tag{28}$$

поэтому на поршень будет действовать возвращающая сила

$$F = -k(x+y) = -k\left(1+\frac{m}{M}\right)x. \qquad (29)$$

Таким образом, уравнение движения поршня имеет вид

$$m\ddot{x} = -k\left(1+\frac{m}{M}\right)x \qquad (30)$$

и описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}. \qquad (31)$$

Задача 3. Черный ящик и катушка (10.0 балла)

1) Через достаточно большое время сила тока ы цепи перестанет изменяться со временем, поэтому э.д.с. самоиндукции в катушке будет равна нулю, так как

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = 0. \qquad (1)$$

Это означает, что падение напряжения на черном ящике равно напряжению источника. Из вольт-амперной характеристики черного ящика находим, что

$$I = 0{,}1 \text{ мА}. \qquad (2)$$

2) Аналогичные рассуждения приводят в выводу, что ток достигает насыщения

$$I = 1 \text{ мА}. \qquad (3)$$

3) Уравнение, описывающее изменение тока в цепи имеет вид

$$U_0 - \mathcal{E} = U(I), \qquad (4)$$

где

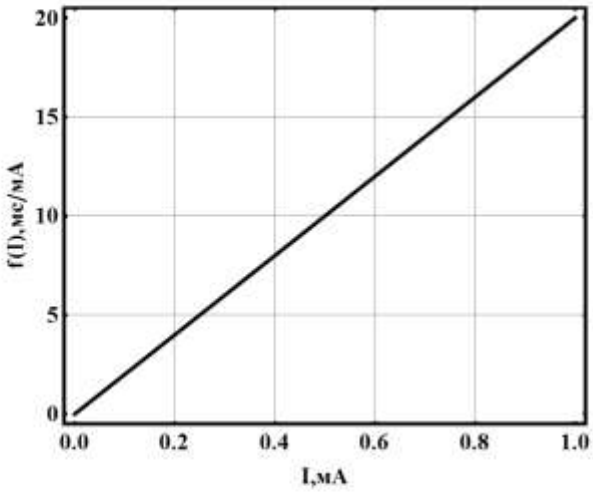
$$\mathcal{E} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (5)$$

есть э.д.с. самоиндукции катушки, а $U = U(I)$ – вольтамперная характеристика черного ящика, представленная на рисунке.

Перепишем (4) с использованием (5) в виде

$$\Delta t = \frac{L}{U_0 - U(I)}\Delta I = f(I)\Delta I, \qquad (6)$$

где $f(I) = L/(U_0 - U(I))$ – некоторая функция от тока в цепи.



Функция $f(I)$ легко строится графически по заданной функции $U = U(I)$ и имеет линейный вид, показанный на рисунке слева (уравнение $f(I) = 20I$ [мс/мА]).

Время, через которое ток в цепи станет равным $I = 0{,}4$ мА, определяется в соответствии с (6) площадью под графиком функции $f(I)$ и равно

$$t = 10I^2 = 1.6\text{мс}. \qquad (8)$$

4) Аналогично определяется время Δt, в течении которого сила тока в цепи увеличится от $I_0 = 0{,}4$ мА до $I = 0{,}9$ мА.

$$t = 10(I^2 - I_0^2) = 6.5\text{мс}. \qquad (9)$$

5) Решая обратную задачу, из формулы (8) находим

$$I = \sqrt{\frac{t[\text{мс}]}{10}} = 0{,}5 \text{ мА}. \qquad (10)$$

6) Аналогично формуле (10) находим

$$I = \sqrt{\frac{t[\text{мс}]}{10}} = 1{,}1 \text{ мА}. \qquad (11)$$

Из вольтамперной характеристики видно, что такой сила тока быть не может – она выходит на насыщение. Таким образом, величина силы тока в этот момент времени равна

$$I = 1{,}0 \text{ мА}. \qquad (12)$$

7) При прохождении переменного электрического тока черный ящик ведет себя как активное сопротивление, так как реактивная составляющая в нем отсутствует. Так как черный ящик и катушка включены последовательно, то сила тока в них одинакова. Известно, что разность фаз при последовательном соединении активного сопротивления и катушки составляет

$$\varphi = \frac{\pi}{2}. \qquad (13)$$

8) Приложенное напряжение имеет постоянную и переменную составляющие. Через достаточно большое время постоянная составляющая напряжения будет целиком падать на черном ящике, то есть

$$U_{x0} = 0{,}9 \text{ В}, \qquad (14)$$

а на катушке постоянная составляющая напряжения будет равна нулю

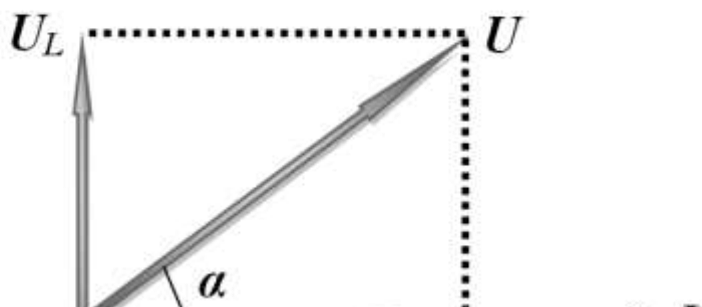
$$U_{L0} = 0/ \qquad (15)$$

При малых колебаниях напряжения черный ящик будет вести себя как простое сопротивление

$$R = 200 \text{ Ом}, \qquad (16)$$

так как в этом случае вольтамперная характеристика черного ящика вблизи точки $U_{x0} = 0{,}9$ В представляет собой участок прямой линии.

Для вычисления напряжений воспользуемся векторной диаграммой, показанной на рисунке для последовательного соединения сопротивления и катушки.



Известно, что сопротивление катушки переменному току равно

$$X_L = \omega L. \qquad (17)$$

Из векторной диаграммы следует, что угол α равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{U_L}{U_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad (18)$$

Амплитуда колебаний напряжения на сопротивлении находится из векторной диаграммы и равна

$$U_R = U \cos\alpha, \qquad (19)$$

где $U = 0{,}01$ В – амплитуда колебаний источника.

Окончательно, с учетом постоянной составляющей напряжения, получаем

$$U_R(t) = U_{R0} + U\cos\alpha \sin(\omega t - \alpha) = [0{,}9 + 0{,}0087 \sin\left(115t - \frac{\pi}{6}\right)] \text{ В}. \qquad (20)$$

9) Амплитуда колебаний напряжения на сопротивлении находится из векторной диаграммы и равна

$$U_R = U\sin\alpha. \tag{21}$$

Окончательно, с учетом постоянной составляющей напряжения, получаем

$$U_L(t) = U_{L0} + U\sin\alpha\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \left[0{,}005\sin\left(115t + \frac{\pi}{3}\right)\right]\text{ В}. \tag{22}$$

10) Постоянная составляющая силы тока определяется напряжением на черном ящике и находится из его вольтамперной характеристики

$$I_0 = 5\text{ мА}, \tag{23}$$

а амплитуда переменной составляющей определяется из векторной диаграммы

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = 0.043\text{ мА}. \tag{24}$$

Окончательно, зависимость силы тока от напряжения имеет вид

$$I(t) = \left[5 + 0{,}043\sin\left(115t - \frac{\pi}{6}\right)\right]\text{ мА}. \tag{25}$$

11) Так как при внешнем напряжении, равном нулю, черный ящик дает некоторую силу тока, то там должен находиться источник. С увеличением выделяемой тепловой мощности сопротивление черного ящика уменьшается, что обычно происходит для полупроводниковых элементов. Так как при некотором напряжении ток достигает насыщения, то скорей всего в ящике находится диод, в котором достигается пробой при напряжении 1 В.