# Решение задач. 10 класс.
## Задача 1. «Солянка» (10,0 балла)
### Часть 1А

Пусть $v$ – скорость шарика перед ударом о пластинку, а $\Delta t$ – очень малое время удара шарика о пластинку. В момент удара о пластинку на шарик будет действовать сила реакции со стороны пластинки, равная по теореме об импульсе силы

$$N'\Delta t = 2mv, \tag{1}$$

а это приведет к тому, что пластинка с такой же силой будет давить на плоскость и возникнет дополнительная сила трения

$$F_{\text{тр}}' \le \mu N'. \tag{2}$$

В результате действия этой силы трения скорость пластинки уменьшится на величину $\Delta v_1$, которая находится из теоремы об импульсе силы

$$M\Delta v_1 = F_{\text{тр}}'\Delta t. \tag{3}$$

После соударения шарик будет находиться в воздухе в течении времени

$$t = \frac{2v}{g} \tag{4}$$

и за это время скорость пластинки возрастет на величину $\Delta v_2$, которая находится из теоремы об импульсе силы

$$M\Delta v_2 = \left(F - F_{\text{тр}}\right)t, \tag{5}$$

в которой сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu M g. \tag{6}$$

Для того чтобы скорость не увеличивалась необходимо соблюдение условия

$$\Delta v_1 = \Delta v_2, \tag{7}$$

откуда

$$m \ge \frac{F}{\mu g} - M = 0.5 \text{ кг}. \tag{8}$$

### Часть 1В

Пока ключ разомкнут суммарный заряд правой пластины конденсатора $C_1$ и левой пластины конденсатора $C_2$

$$q_0 = 0. \tag{1}$$

После замыкания ключа через сопротивления будет течь ток

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}, \tag{2}$$

а падения напряжения на них равны соответственно

$$U_1 = IR_1 \tag{3}$$

и

$$U_2 = IR_2. \tag{4}$$

Конденсаторы включены параллельно сопротивлениям, поэтому напряжения на них совпадают с соответствующими напряжениями на резисторах, а значит заряды конденсаторов равны

$$q_1 = C_1 U_1 \tag{5}$$

и

$$q_2 = C_2 U_2. \tag{6}$$

Так как заряд правой пластины конденсатора $C_1$ положителен, а левой пластины конденсатора $C_2$ отрицателен, то их суммарный заряд равен

$$q = q_1 - q_2. \tag{7}$$

Заряд, протекший через ключ, равен изменению суммарного заряда правой пластины конденсатора $C_1$ и левой пластины конденсатора $C_2$, поэтому

$$\Delta q = q - q_0 = \frac{(C_1 R_1 - C_2 R_2)U}{R_1 + R_2}. \tag{8}$$

### Часть 1С

Так как изображение прямое, то оно является мнимым. Необходимо отдельно рассмотреть случаи собирающей и рассеивающей линз.

1) Собирающая линза.

Формула линзы записывается в виде

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \quad (1)$$

откуда

$$f=\frac{Fd}{F-d}. \quad (2)$$

Здесь $F$ – фокусное расстояние линзы, $d$ – расстояние от предмета до линзы, $f$ – расстояние от линзы до изображения.

Видно, что это расстояние больше чем $d$, поэтому по условию

$$f-d=\frac{F}{2}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем квадратное уравнение

$$2d^2+Fd-F^2=0, \quad (4)$$

которое имеет решения

$$d_1=-F, \quad (5)$$

и

$$d_2=\frac{F}{2}. \quad (6)$$

Так как предмет является действительным, то нас устраивает только корень (6), поэтому окончательно находим по определению увеличения

$$\Gamma=\frac{f}{d}=2. \quad (7)$$

2) Рассеивающая линза.

Формула линзы записывается в виде

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}, \quad (8)$$

откуда

$$f=\frac{Fd}{F+d}. \quad (9)$$

Видно, что это расстояние меньше чем $d$, поэтому по условию

$$d-f=\frac{F}{2}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получаем квадратное уравнение

$$2d^2-Fd-F^2=0, \quad (11)$$

которое имеет решения

$$d_1=F, \quad (12)$$

и

$$d_2=-\frac{F}{2}. \quad (13)$$

Так как предмет является действительным, то нас устраивает только корень (6), поэтому окончательно находим по определению увеличения

$$\Gamma=\frac{f}{d}=\frac{1}{2}. \quad (14)$$

## Задача 2. Газовый цилиндр (10,0 балла)

1) На поршень действует сила давления со стороны газа, равная

$$F=pS, \quad (1)$$

а также сила, вызванная деформацией пружины и равная по закону Гука

$$F_s=-kx_0. \quad (2)$$

Так как поршень находится в равновесии, то

$$F+F_s=0. \quad (3)$$

Из (1)-(3) получаем, что давление газа под поршнем равно

$$p=\frac{kx_0}{S}=5{,}00\cdot 10^3\ \text{Па}. \quad (4)$$

2) Из уравнения Менделеева-Клайперона для газа массой $m_0$ под поршнем имеем

$$pV = \frac{m_0}{\mu} RT_0, \tag{5}$$

где объем газа $V$ равен

$$V = Sx_0. \tag{6}$$

Из уравнений (4)-(6) получаем массу газа под поршнем в виде

$$m_0 = \frac{\mu k x_0^2}{RT_0} = 2{,}05 \cdot 10^{-7} \text{ кг}. \tag{7}$$

3) Согласно (4) давление газа под поршнем пропорционально $x$

$$p \sim x, \tag{8}$$

а его объем

$$V \sim x, \tag{9}$$

поэтому в соответствии с (5)

$$T \sim x^2. \tag{10}$$

Таким образом

$$T = 4T_0 = 1172 \text{ К}. \tag{11}$$

4) Внутренняя энергия газа возрастет на величину, равную

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m_0}{\mu} R(T - T_0), \tag{12}$$

при этом газ совершит работу, которая уйдет на изменение энергии упругой деформации пружины

$$A = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}. \tag{13}$$

По первому началу термодинамики находим

$$Q = \Delta U + A = 6kx_0^2 = 0{,}15 \text{ Дж}. \tag{14}$$

5) Из уравнения (1) заключаем, что при любом процессе давление и объем газа связаны соотношением

$$pV^{-1} = const, \tag{15}$$

откуда с учетом уравнения состояния газа получаем

$$TV^{-2} = const. \tag{16}$$

Отсюда следует простая формула для связи изменения температуры и объема газа

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{2}\frac{V}{T}. \tag{17}$$

По определению, молярная теплоемкость газа равна

$$C = \frac{1}{v}\frac{\Delta Q}{\Delta T}, \tag{18}$$

где $v = m_0/\mu$ – число молей.

Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2} vR\Delta T, \tag{19}$$

а совершаемая им работа

$$A = p\Delta V. \tag{20}$$

С учетом первого начало термодинамики (14) и выражения (17), получаем

$$C = 2R = 16{,}6 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}. \tag{21}$$

6) Так как сосуд теплоизолирован от окружающей среды, то в процессе колебаний поршня давление газа в нем будет менять по адиабате, уравнений которой имеет вид

$$pV^{\gamma} = const. \tag{22}$$

где $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты одноатомного газа.

В соответствии с уравнением (22) малое изменение давления газа под поршнем связано с малым изменением его объема

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{\gamma p}{V}. \tag{23}$$

В результате изменения объема газа на поршень будет действовать возвращающая сила

$$F_1 = \Delta p S = -\frac{\gamma p S}{x}\Delta x = -\gamma k \Delta x. \tag{24}$$

и сила упругости со стороны пружины

$$F_2 = -k\Delta x. \quad (25)$$

Полная возвращающая сила равна

$$F = F_1 + F_2 = (\gamma + 1)k\Delta x \quad (26)$$

и пропорциональна отклонению, что приводит к гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{(\gamma+1)k}{m}} = 51{,}6\ \text{с}^{-1}. \quad (27)$$

Массой газа можно полностью пренебречь по сравнению с массой поршня.

7) Пусть поршень отклонился от положения равновесия на некоторую величину $x$. Так как на систему не действуют внешние силы, то положение центра масс системы измениться не может, то поршень должен сместиться в противоположную сторону на величину $y$, равную

$$mx - My = 0, \quad (28)$$

поэтому на поршень будет действовать возвращающая сила

$$F = -k(x + y) = -k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x. \quad (29)$$

Таким образом, уравнение движения поршня имеет вид

$$m\ddot{x} = -k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x \quad (30)$$

и описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} = 36{,}5\ \text{с}^{-1}. \quad (31)$$

## Задача 3. Черный ящик (10,0 балла)

1) Известно, что вольтметры показывают падение напряжения на них самих. Сопротивление вольтметров, соединенных параллельно, равно

$$R_{II} = \frac{RR}{R+R} = \frac{R}{2}, \quad (1)$$

а полное сопротивление цепи

$$R_{tot} = R + R_{II} = \frac{3}{2}R. \quad (2)$$

Сила тока, протекающего через вольтметр $V_1$ равна

$$I_{tot} = \frac{\mathcal{E}}{R_{tot}}, \quad (3)$$

а значит падение напряжения на нем равно

$$V_1 = I_{tot}R = \frac{2}{3}\mathcal{E} = 6\ \text{В}. \quad (4)$$

Падение напряжения на вольтметрах $V_2$ и $V_3$ равны между собой и составляют

$$V_2 = V_3 = \mathcal{E} - V_1 = \frac{1}{3}\mathcal{E} = 3\ \text{В}. \quad (5)$$

2) Из вольтамперной характеристики следует, что при напряжении равном нулю сила тока через черный ящик не равна нулю. Это означает, что в черном ящике присутствует источник питания (батарейка).

3) Мощность, развиваемая черным ящиком, равна

$$P = UI, \quad (6)$$

где по условию

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{I}{I_0}\right)^2 = 1. \quad (7)$$

Из симметрии выражений (5) и (6) следует, что максимальная мощность достигается при

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}},\ \ I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

и равна

$$P_{max} = \frac{1}{2}U_0 I_0 = 0{,}5\ \text{мВт}. \quad (9)$$

4) Пусть черный ящик развивает максимальную мощность, тогда сила тока в нем и падение напряжения даются выражением (8). Сила тока, протекающего через вольтметр $V_2$, равна

$$I_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}R}, \quad (10)$$

а значит сила тока, протекающего через вольтметр $V_1$, составляет

$$I_1 = I_2 + \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \qquad (11)$$

Отсюда находим напряжение источника

$$\mathcal{E} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} + I_1 R = U_0\sqrt{2} + \frac{I_0}{\sqrt{2}}R. \qquad (12)$$

При этом показания вольтметров равны

$$V_1 = I_1 R = \frac{U_0 + I_0 R}{\sqrt{2}} = 1{,}41\ \text{В}, \qquad (13)$$

$$V_2 = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0{,}71\ \text{В}. \qquad (14)$$

5) Пусть падение напряжения на черном ящике равно $U$, а сила протекающего через него тока – $I$. Сила тока, протекающего через вольтметр $V_2$, равна

$$I_2 = \frac{U}{R}, \qquad (15)$$

а значит сила тока, протекающего через вольтметр $V_1$, составляет

$$I_1 = I_2 + I. \qquad (16)$$

Отсюда напряжение источника

$$\mathcal{E} = U + I_2 R = 2U + IR. \qquad (17)$$

Таким образом, сила тока, протекающего через черный ящик, зависит от напряжения источника по закону

$$I = \frac{\mathcal{E} - 2U}{R}. \qquad (18)$$

Для удобства, перепишем соотношение (18) в безразмерном виде

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\mathcal{E}}{U_0}\frac{U_0}{I_0 R} - \frac{U}{U_0}\frac{2U_0}{I_0 R}. \qquad (19)$$

Одновременно с соотношением (19) существует связь между $U$ и $I$, выражаемая вольтамперной характеристикой

$$I = \begin{cases} I_0\sqrt{1 - \left(\frac{U}{U_0}\right)^2}, & \left|\frac{U}{U_0}\right| \le 1 \\ 0, & \left|\frac{U}{U_0}\right| > 1 \end{cases}. \qquad (20)$$

Решая совместно (19) и (20) при $\mathcal{E} = 0$, получим

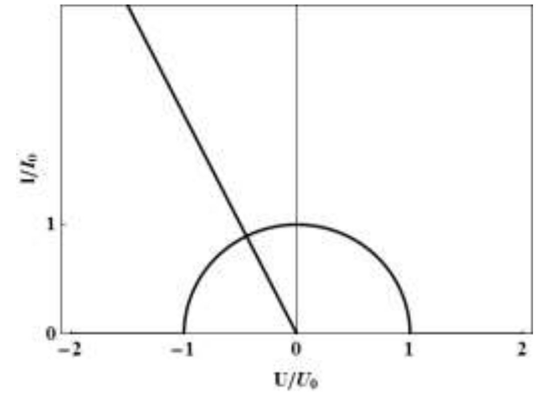
$$U = -U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}}, \qquad (21)$$

$$I = I_0 \frac{\frac{2U_0}{I_0 R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}}. \qquad (22)$$

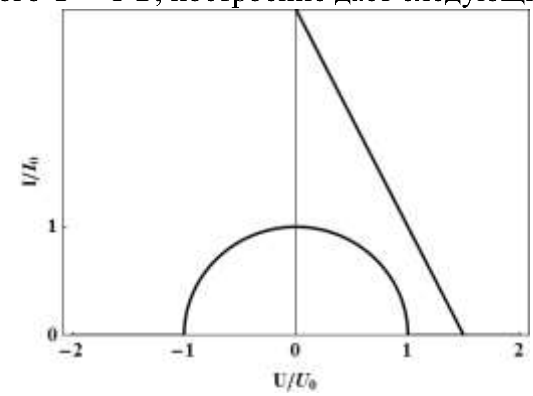
Таким образом, показания вольтметров равны

$$V_1 = -V_2 = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2U_0}{I_0 R}\right)^2}} = 0{,}45\ \text{В}. \qquad (23)$$

Соответствующее графическое построение приведено на рисунке ниже, на котором прямая соответствует уравнению (19).




6) В случае напряжения, равного $\mathcal{E} = 3$ В, построение дает следующий рисунок:



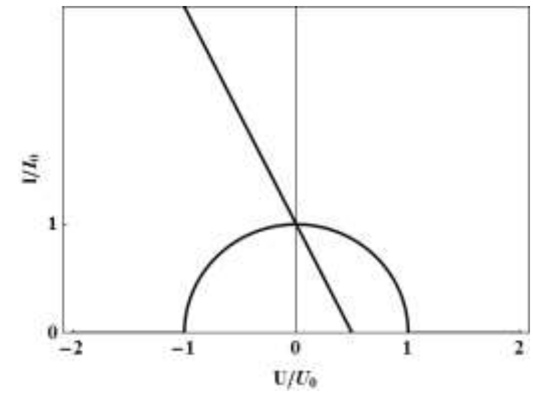

из которого можно заключить, что сила тока, протекающего через черный ящик равна нулю, а напряжение на нем совпадает с напряжением на вольтметре $V_2$ и составляет

$$V_2 = \frac{\mathcal{E}}{2} = 1{,}5 \text{ В.} \tag{24}$$

Отсюда падение напряжения на вольтметре $V_1$ равно

$$V_1 = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{\mathcal{E}}{2} = 1.5 \text{ В.} \tag{25}$$

7) Построение должно давать следующий рисунок



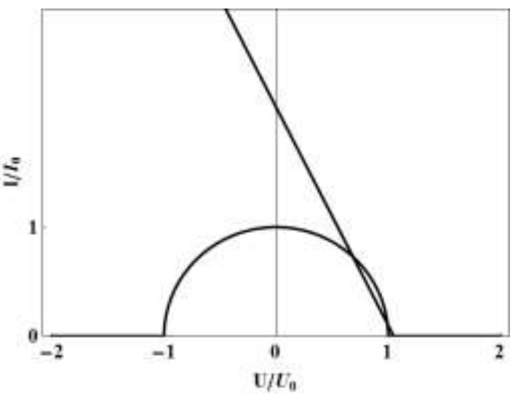

из которого определяем, что напряжение источника равно

$$\mathcal{E} = U_0 = 1 \text{ В.} \tag{26}$$

8) Решая совместно систему уравнений (19) и (20), получаем два корня

$$U = U_0 \frac{\frac{2\mathcal{E}U_0}{I_0^2R^2} \pm \sqrt{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2} - \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2R^2}}}{1 + \frac{4U_0^2}{I_0^2R^2}}. \tag{27}$$

Этому случаю соответствует построение, показанное на рисунке внизу:




Устойчивому решению соответствует меньший из корней, который равен

$$U = U_0 \frac{\frac{2\mathcal{E}U_0}{I_0^2R^2} - \sqrt{1+\frac{4U_0^2}{I_0^2R^2}-\frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2R^2}}}{1+\frac{4U_0^2}{I_0^2R^2}} = 0{,}69\ \text{В}. \qquad (28)$$

9) Не все точки пересечения прямой (19) и полуокружности (20) соответствуют устойчивым значениям тока и напряжения в цепи. Определим, какие точки являются устойчивыми. Пусть напряжение на черном ящике увеличилось на некоторую малую величину $\delta U$, тогда сила тока через него уменьшилась на некоторое значение $\delta I$. Изменение тока через вольтметр, который подключен параллельно к черному ящику, равно

$$\delta I_R = \frac{\delta U}{R}. \qquad (29)$$

Для устойчивости решения необходимо, чтобы выполнялось условие

$$-\delta I + \delta I_R > 0, \qquad (30)$$

так как при этом ток через вольтметр $V_1$ возрастет, а это приведет к падению напряжения на черном ящике и вольтметре $V_2$.

Из (29) и (30) следует, что

$$\frac{\delta I}{\delta U} < \frac{1}{R}. \qquad (31)$$

Условие (31) соответствует прямой 1 на рисунке, которая является касательной к окружности и ее коэффициент наклона к оси $x$ составляет $U_0/I_0R$.

Проведя через точку окружности $A$ прямую 2 из уравнения (19), находим максимальное напряжение источника

$$\mathcal{E} = \frac{U_0 + 2I_0R}{\sqrt{1+\left(\frac{I_0R}{U_0}\right)^2}} = 2{,}12\ \text{В}. \qquad (32)$$