Решение задач. 9 класс.

Задача 1. Гонка на мотоцикле (8.0 баллов)

А) Максимальное ускорение при разгоне мотоцикла будет ограничено тремя факторами: а) силой трения скольжения ведущего колеса, б) условием движения без переворачивания ввиду потери контакта переднего колеса с дорогой и в) мощностью двигателя.
Условия движения без переворачивания:

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{1}$$

$$N_2 \cdot \frac{l}{2} - N_1 \cdot \frac{l}{2} - F \cdot h = 0, \tag{2}$$

$$N_1 \geq 0. \tag{3}$$

Здесь N_1 и N_2 – силы нормального давления на переднее и заднее колесо соответственно; m – масса мотоцикла с гонщиком; l – расстояние между осями колёс; h – высота центра масс системы над дорогой; F - сила трения, действующая на заднее ведущее колесо и разгоняющая мотоцикл.

Из выражений (1) – (3), для силы трения получаем:

$$F \leq mg \cdot \frac{l}{2h}. \tag{4}$$

Для силы трения скольжения имеем:

$$F_{ск} \leq \mu mg. \tag{5}$$

Из условий задачи и выражений (4) и (5) видно, что проскальзывания заднего ведущего колеса не будет вплоть до состояния переворота, а максимальное ускорение

$$a_{\max} = g/2 \tag{6}$$

мотоцикла будет обеспечиваться максимально возможной силой трения $F = mg/2$, ещё не приводящей к перевороту мотоцикла.

Б) Из условия ограниченной мощности W для движения мотоцикла со скоростью v при действующей силе F:

$$W = F \cdot \text{v}, \tag{7}$$

получаем максимальную скорость v_0, до которой может разогнаться мотоцикл с ускорением $a_{\max}$:

$$\text{v}_0 = \frac{W}{F} = \frac{2W}{mg} = 20 м/с. \tag{8}$$

Это значение меньше требуемой конечной скорости $\text{v}_f = 120 км/час \approx 33{,}3 м/с$, поэтому дальнейший разгон мотоцикла будет происходить с уменьшающимся ускорением, в соответствии с выражением (6):

$$a(\text{v}) = \frac{W}{m\text{v}}. \tag{9}$$

Время разгона на первом этапе (с ускорением $a_{\max} = g/2$):

$$t_1 = \frac{\text{v}_0}{a_{\max}} = \frac{2\text{v}_0}{g} = 4с. \tag{10}$$

Для второго этапа разгона применяем закон баланса энергии:

$$W \cdot t_2 = \frac{m\text{v}_f^2}{2} - \frac{m\text{v}_0^2}{2}, \tag{11}$$

откуда:

$$t_2 = \frac{m(\text{v}_f^2 - \text{v}_0^2)}{2W} \approx 3.56с. \tag{12}$$

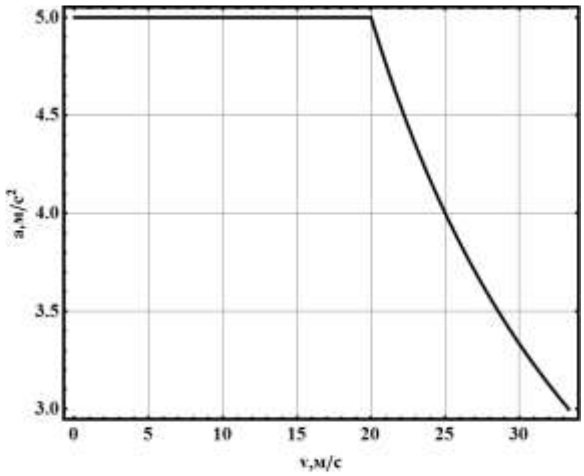
Таким образом, полное время разгона равно

$$t = t_1 + t_2 \approx 7.56с. \tag{13}$$

В) Минимальное ускорение в соответствии с (9) достигается при максимальной скорости и равно

$$a_{\min} = \frac{W}{mv_к} = 3м/с^2. \qquad (14)$$

Г) График зависимости ускорения от скорости имеет два участка – постоянное ускорение $a_{\max} = g/2 = 5м/с^2$ до скорости $v_0 = 20м/с$, и на втором участке ускорение уменьшается по закону $a = \frac{W}{mv}$ до минимального значения.



Задача 2. Космические истории (11.0 балла)

А) Второй закон Ньютона для движения тела по круговой траектории вокруг Земли имеет вид

$$\frac{mv_1^2}{(R_E + h)} = G\frac{mM_E}{(R_E + h)^2}, \qquad (1)$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M_E}{R_E + h}} = 7.76км/с. \qquad (2)$$

Период обращения тела по круговой траектории равен

$$T_1 = \frac{2\pi(R_E + h)}{v_1} = \frac{2\pi(R_E + h)^{3/2}}{\sqrt{GM_E}} = 89.3мин. \qquad (3)$$

Б) Минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло поле тяготения Земли, определяется законом сохранения энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM_E}{R_E} = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M_E}{R_E}} = 11.2км/с. \qquad (5)$$

В) Для того чтобы тело могло покинуть пределы солнечной системы, находясь на расстоянии от Солнца, равным радиусу орбиты Земли, ему необходимо иметь скорость, которая определяется аналогично (4) из закона сохранения энергии, и равна

$$v_{21} = \sqrt{2G\frac{M_S}{R_0}}. \qquad (6)$$

Для обеспечения минимальной скорости, необходимо использовать скорость движения Земли по орбите, которая, аналогично (1), определяется вторым законом Ньютона и равна

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_S}{R_0}}. \qquad (7)$$

Таким образом, при покидании поля тяготения Земли, тело должно иметь скорость

$$v_{rel} = v_{21} - v_0 = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{G\frac{M_S}{R_0}}\,. \qquad (8)$$

Тогда минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло пределы солнечной системы, определяется из закона сохранения энергии, который в данном случае записывается в виде

$$\frac{mv_3^2}{2} - G\frac{mM_E}{R_E} = \frac{mv_{rel}^2}{2}\,, \qquad (9)$$

откуда

$$v_3 = \sqrt{G\left(2\frac{M_E}{R_E} + (3-2\sqrt{2})\frac{M_S}{R_0}\right)} = 16.6\,км/с\,. \qquad (10)$$

Г) Для нахождения максимальной скорости при столкновении с Землей воспользуемся следующим приемом. При обращении хода течения времени $t \to -t$ ситуация будет выглядеть следующим образом. Тело стартует с поверхности Земли и необходимо найти максимальную скорость, которую можно сообщить телу, чтобы на большом расстоянии от Солнца его скорость стала нулевой.

Очевидно, что скорость тела будет максимальной, если после выхода из поля тяготения Земли его скорость будет направлена против тяготения Земли, тогда в системе отсчета, связанной с Солнцем

$$v_{rel} = v_{21} + v_0 = \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{G\frac{M_S}{R_0}}\,. \qquad (11)$$

Тогда из закона сохранения энергии, который в данном случае записывается в виде

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} - G\frac{mM_E}{R_E} = \frac{mv_{rel}^2}{2}\,, \qquad (12)$$

получим

$$v_{max} = \sqrt{G\left(2\frac{M_E}{R_E} + \left(3+2\sqrt{2}\right)\frac{M_S}{R_0}\right)} = 72{,}7\ \text{км/с}. \qquad (13)$$

Д) При столкновении Земля будет иметь новую орбитальную скорость, которая определяется из закона сохранения энергии

$$v_{0new} = \frac{M_E v_0 - m v_{\max}}{M_E + m}\,. \qquad (14)$$

Минимальное расстояние до Солнца новой орбиты Земли определяется из закона сохранения энергии, который записывается в виде

$$\frac{M_E v_{0new}^2}{2} - G\frac{M_E M_S}{R_0} = \frac{M_E v^2}{2} - G\frac{M_E M_S}{R_x}\,, \qquad (15)$$

и вторым законом Кеплера, имеющего вид

$$v_{0new} R_0 = v R_x\,. \qquad (16)$$

Отсюда находим минимальное расстояние от Земли до Солнца

$$R_x = 1.20 \times 10^{11}\,м\,. \qquad (17)$$

Тогда новый период обращения определяется третьим законом Кеплера

$$\left(\frac{T_{Enew}}{T_E}\right)^2 = \left(\frac{\frac{R_0+R_x}{2}}{R_0}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1+\frac{R_x}{R_0}\right)^3 \qquad (18)$$

откуда

$$T_{Enew} = 2{,}7 \times 10^7 c. \qquad (19)$$

Задача 3. Охлаждаемый резистор (11.0 балла)

А) Джоулево тепло, выделяемое в резисторе, полностью идет на его нагревание. Мощность джоулевых потерь равна

$$P = \frac{U^2}{R_1}. \tag{1}$$

Уравнение теплового баланса в данном случае имеет вид

$$C(T - T_0) = Pt = \frac{U^2}{R_1} t, \tag{2}$$

откуда

$$T(t) = T_0 + \frac{U^2}{CR_1} t. \tag{3}$$

Таким образом, температура будет линейно возрастать со временем по формуле (3) до тех пор, пока она не достигнет значения T_1. Это произойдет в момент времени

$$t_1 = \frac{C(T_1 - T_0)R_1}{U^2} = 160c. \tag{4}$$

Б) После скачка сопротивления изменится мощность джоулевых потерь (1)

$$P = \frac{U^2}{R_1}. \tag{5}$$

Время, необходимое для достижения температуры T_{cr}, при которой включается вентилятор

$$t_2 = t_1 + \frac{C(T_{cr} - T_1)R_2}{U^2} = 200c. \tag{6}$$

В) После включения вентилятора температура резистора начнет уменьшаться до тех пор, пока она не достигнет температура T_2. Для этого потребуется время Δt_1, которое определяется из уравнения теплового баланса

$$C(T_{cr} - T_2) = \left(P_Q - \frac{U^2}{R_2}\right)\Delta t_1, \tag{7}$$

то есть

$$\Delta t_1 = \frac{CR_2(T_{cr} - T_2)}{P_Q R_2 - U^2} = 26.6c. \tag{8}$$

Из (8) видно, что после достижения температуры T_2 вентилятор продолжает работать и температура резистора продолжает падать. Минимальная температура определяется из уравнения

$$C(T_2 - T_{\min}) = \left(P_Q - \frac{U^2}{R_2}\right)(\tau - \Delta t_1), \tag{9}$$

откуда

$$T_{\min} = T_2 + \frac{R_2(P_Q R_1 - U^2)}{R_1(P_Q R_2 - U^2)}(T_{cr} - T_2) - \frac{(P_Q R_1 - U^2)}{CR_1}\tau = 58.3°C. \tag{10}$$

Г) Для определения периода возникающих колебаний осталось определить время Δt, за которое резистор нагреется от температуры $T_{\min}$ до T_1. Оно находится из уравнения

$$C(T_1 - T_{\min}) = \frac{U^2}{R_1}\Delta t\,,(11) \tag{11}$$

откуда

$$\Delta t = \frac{C(T_1 - T_{\min})R_1}{U^2} = 83.3c. \tag{12}$$

Окончательно находим период колебаний

$$\tau_0 = \tau + \Delta t + \frac{C(T_{cr} - T_1)R_2}{U^2} = 213c\ . \qquad (13)$$

Д) Количество выделяемого в резисторе тепла за период колебаний в точности равно количеству тепла, отводимого вентилятором. Последнее легко находится

$$Q = P_Q \tau = 360\,Дж\,. \qquad (14)$$

Е) Полная зависимость температуры от времени имеет вид

$$T(t) = \begin{cases} T_0 + \dfrac{U^2}{CR_1}t, & 0 < t < t_1 \\ T_1 + \dfrac{U^2}{CR_2}(t - t_1), & t_1 < t < t_2 \\ T_{cr} - \left(P_Q - \dfrac{U^2}{CR_2}\right)(t - t_2), & t_2 < t < t_2 + \Delta t_1 \\ T_2 - \left(P_Q - \dfrac{U^2}{CR_1}\right)(t - t_2 - \Delta t_1), & t_2 + \Delta t_1 < t < t_2 + \tau \end{cases}. \qquad (15)$$

После этого ход зависимости полностью повторяется и график имеет следующий вид