Задача 1 Нелинейная нитка (10.0 балла)

Нитка сделана из резины, которая может растягиваться до длин l, значительно превышающих ее начальную длину l_0. У подобной резинки сохраняется ее полный объем.

А) Выразите площадь поперечного сечения S резинки в деформированном состоянии через ее длину l и ее начальные размеры l_0, S_0.

Б) При малых деформациях резинки сила натяжения F и ее удлинение x связаны законом Гука $F = k_0 x$, где начальная жесткость равна $k_0 = E_0 S_0 / l_0$, а E_0 – так называемый модуль Юнга. При больших деформациях резинки $l >> l_0$ закон Гука перестает соблюдаться, а вместо этого выполняется закон $F(l) = a + \frac{b}{l}$. Выразите постоянные a и b через l_0, S_0 и E_0.

В) Предположим, что резинка растянута некоторой силой до длины l. Малое изменение ΔF растягивающей силы приводит к малому изменению ее длины $\Delta l << l$. Выразите ΔF через l, l_0, E_0 и Δl.

Г) Предположим, что к одному из концов резинки присоединено маленькое тело и вся система приведена во вращение относительно другого ее конца. Предполагая движение тела круговым, выразите длину резинки l через кинетическую энергию тела K и через l_0, S_0, E_0.

Д) Проанализируем малые возмущения кругового движения тела из предыдущего пункта. Будем описывать движение системы изменением ее длины $r(t) = l(t) - l(0)$, радиальной $v_r(t)$ и тангенциальной $v_t(t)$ скоростями тела (это компоненты скорости соответственно параллельные и перпендикулярные резинки). Обозначим начальные величины как $L = l(0), V_r = v_r(0)$ и $V_t = v_t(0)$. Запишите два уравнения, связывающие между собой $r(t), v_r(t)$ и $v_t(t)$. В уравнениях используйте следующие величины: масса тела m, а также $L, V_r, V_t, l_0, S_0, E_0$

Е) Предполагая $r << L$, найдите соотношение между $r(t)$ и $v_r(t)$, которое также содержит $m, L, V_r, V_t, l_0, S_0, E_0$. Найдите период T малых осцилляций $r(t)$. Упростите выражение для T при $L >> l_0$.

Подсказка. Вам могут понадобиться следующие формулы:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2, \text{ при } x << 1,$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}, \text{ при } x << 1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \text{ где } C \text{ – некоторая постоянная.}$$

Задача 2 Нелинейный резистор (10.0 балла)

Эксперименты по измерению электрического сопротивления нелинейного резистора показали следующее. При повышении температуры резистора от комнатной температуры $T_0 = 20°C$ до температуры $T_1 = 100°C$ мгновенно происходит скачок величины сопротивления от $R_1 = 50$ до $R_2 = 100 Ом$. При понижении температуры обратный скачок происходит при более низкой температуре, равной $T_2 = 99°C$. К резистору подключили источник с напряжением $U_1 = 60 В$ и, спустя некоторое время, его температура установилась равной $T_3 = 80°C$. После этого в начальный момент времени $t = 0$ к резистору, имеющему температуру T_0, подключили источник с напряжением $U_1 = 80 В$ и обнаружили, что в цепи возникли электрические колебания тока. Теплоемкость резистора равна $C = 3 Дж / К$, а температура в комнате остается постоянной.

Продолжительность тура 4 часа.

Считайте, что теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха в соответствии с законом Ньютона-Рихмана

$$P_{ext} = \alpha(T_s - T_0),$$

где P_{ext} – мощность потерь с поверхности проводника температурой поверхности T_s, T_0 – температура окружающего воздуха в комнате, α – некоторая постоянная, называемая коэффициентом теплоотдачи.

А) Найдите и рассчитайте коэффициент теплоотдачи α.

Б) При разогреве резистора от момента времени $t = 0$ его температура изменяется по закону

$$T(t) = A_1 + A_2 e^{-bt}.$$

Найдите A_1, A_2 и b.

В) Определите момент времени t_1, когда произойдет первый скачок сопротивления резистора.

Г) Чему равен период τ_0 установившихся колебаний температуры?

Д) Какое количество джоулева тепла Q выделяется на резисторе за один период колебаний?

Задача 3 Квантовая модель атома (10.0 балла)

Рассмотрим строение атома водорода с точки зрения квантовой механики. В центре находится неподвижное атомное ядро, представляющее собой положительно заряженный протон. Вокруг ядра движется электрон, однако его траектория с точки зрения квантовой механики неизвестна, так как действует принцип неопределенности Гейзенберга. Из курса химии известно, что в этом случае электрон можно представить как заряженное облако. Пусть в основном состоянии атома водорода объемная плотность заряда электронного облака описывается формулой

$$\rho_0 = Ae^{--2r/a_0},$$

где r – расстояние от протона, который можно считать точечным, а $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 / m_e e^2$ – так называемый боровский радиус, $m_e = 9.11\times10^{-31}\,кг$ – масса электрона, $e = 1.602\times10^{-19}\,Кл$ – элементарный заряд, $\hbar = 1.05\times10^{-34}\,Дж\cdot с$ – постоянная Планка, $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная.

А) Найдите A и выразите его через заданные выше величины.

Б) Найдите напряженность электрического поля $E(r)$ на расстоянии r от ядра. Постройте график этой зависимости.

В) Потенциал электрического поля $\varphi(r)$ на расстоянии r от ядра имеет вид

$$\varphi(r) = \left(A_1 + \frac{A_2}{r}\right)e^{-br}.$$

Найдите A_1, A_2 и b.

Г) Найдите энергию взаимодействия W_e протона с электронным облаком.

Д) Найдите собственную энергию W_i электронного облака.

Атом водорода поглотил фотон, в результате чего плотность электронного облака стала описываться формулой

$$\rho = B\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)^2 e^{--r/a_0},$$

Е) Найдите B и выразите его через заданные выше величины.

Ж) Найдите круговую частоту ω поглощенного фотона и рассчитайте ее численное значение.

Продолжительность тура 4 часа.

3) В принципе, указанный выше переход невозможен, так как осуществляется между двумя состояниями электрона, в которых его орбитальный момент равен нулю. Можете ли вы предположить, почему дело обстоит именно так?

Подсказка. Используйте следующие значения интегралов:

$$\int e^{-bx}dx = -\frac{1}{b}e^{-bx} + C\text{, где } C \text{ – произвольная постоянная,}$$

$$\int x^n e^{-bx}dx = -\frac{x^n}{b}e^{-bx} + \frac{n}{b}\int x^{n-1}e^{-bx}dx\text{, где } n \text{ – натуральное число}$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-bx})^2}{x^2} = b\ln 4\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{(1-e^{-bx})e^{-bx}}{x} = \ln 2\,.$$

Продолжительность тура 4 часа.