Решение задач. 11 класс
Задача 1. Нелинейная нитка (10.0 балла)

А) Условие сохранения объема записывается в виде

$$S_0 l_0 = Sl, \tag{1}$$

откуда

$$S = \frac{S_0 l_0}{l}. \tag{2}$$

Б) Запишем длину нити в виде

$$l = l_0 + x. \tag{3}$$

Подставляя в выражении для силы, получим

$$F = a + \frac{b}{l} = a + \frac{b}{l_0 + x}. \tag{4}$$

Разложим выражении (4) в области малых деформаций $x << l_0$, имеем

$$F = a + \frac{b}{l_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right). \tag{5}$$

Сравнивая с законом Гука, получим

$$\frac{E_0 S_0}{l_0} = -\frac{b}{l_0^2}, \tag{6}$$

$$a + \frac{b}{l_0} = 0. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (6) и (7), получим

$$b = -E_0 S_0 l_0, \tag{8}$$

$$a = E_0 S_0. \tag{9}$$

В) Выразим изменение силы через малое изменение длины. Очевидно, что

$$\delta F = \frac{dF}{dl}\delta l, \tag{10}$$

откуда подставляя (4) и используя (9), находим

$$\delta F = \frac{E_0 S_0 l_0}{l^2}\delta l, \tag{11}$$

Г) Второй закон ньютона для кругового движения тела на нити имеет вид

$$\frac{mv^2}{l} = F = a + \frac{b}{l}. \tag{12}$$

Так как кинетическая энергия равна

$$K = \frac{mv^2}{2}, \tag{13}$$

то используя выражения (8) и (9), найдем

$$l = l_0 + \frac{2K}{E_0 S_0}. \tag{14}$$

Д) Первое уравнение представляет собой закон сохранения момента импульса относительно точки закрепления нити и имеет вид

$$v_t(L + r) = V_t L. \tag{15}$$

Изменение потенциальной энергии растянутой нити равно

$$\Delta U = E_0 S_0 \left(r - l_0 \ln\frac{L + r}{L}\right), \tag{16}$$

а второе уравнение представляет собой закон сохранения энергии, записываемый в виде

$$\frac{m\left(V_t^2+V_r^2\right)}{2}=\frac{m\left(v_t^2+v_r^2\right)}{2}+\Delta U=\frac{m\left(v_t^2+v_r^2\right)}{2}+E_0S_0\left(r-l_0\ln\frac{L+r}{L}\right). \qquad (17)$$

Е) Исключая из уравнения (15) v_t и подставляя в (17), получим

$$\frac{m\left(V_t^2+V_r^2\right)}{2}=\frac{m\left(V_t^2\left(\frac{L}{L+r}\right)^2+v_r^2\right)}{2}+E_0S_0\left(r-l_0\ln\frac{L+r}{L}\right). \qquad (18)$$

Воспользуемся условием $r<<L$ и используем разложения

$$\left(\frac{L}{L+r}\right)^2 \approx 1-2\frac{r}{l}+3\left(\frac{r}{l}\right)^2, \qquad (19)$$

$$\ln\frac{L+r}{L} \approx \frac{r}{L}-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}\right)^2. \qquad (20)$$

Так как в начальный момент до возмущения движение тела является круговым, то должно выполняться условие (14), которое в данном случае имеет вид

$$E_0S_0\left(1-\frac{l_0}{L}\right)=\frac{mV_t^2}{L}, \qquad (21)$$

Комбинируя (18)-(21), получим

$$\frac{mV_r^2}{2}=\frac{mv_r^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3mV_t^2}{L^2}+\frac{E_0S_0l_0}{L^2}\right)r^2. \qquad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой уравнение закон сохранения энергии колебаний тела вдоль нити с эффективной массой

$$m_{eff}=m, \qquad (23)$$

и эффективной жесткостью

$$k_{eff}=\frac{E_0S_0}{L^2}(3L-2l_0). \qquad (24)$$

Значит, частота колебаний находится в виде

$$\omega=\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}=\sqrt{\frac{E_0S_0(3L-2l_0)}{mL^2}}. \qquad (25)$$

При $L>>l_0$, выражение (25) дает

$$\omega=\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}=\sqrt{\frac{3E_0S_0}{mL}}. \qquad (26)$$

Задача 2. Нелинейный резистор (10.0 балла)

А) В состоянии равновесия мощность тепла, выделяемого на резисторе

$$P=\frac{U_1^2}{R_1} \qquad (1)$$

должна быть равна мощности тепловых потерь, то есть

$$\frac{U_1^2}{R_1}=\alpha(T_3-T_0), \qquad (2)$$

откуда

$$\alpha=\frac{U_1^2}{R_1(T_3-T_0)}=1.2\,Вт/К. \qquad (3)$$

Б) Уравнение теплового баланса для резистора записывается в виде

$$C\frac{dT}{dt}=\frac{U_2^2}{R_1}-\alpha(T-T_0). \qquad (4)$$

Подставляя указанную в условии зависимость и используя начальное условие

$$T(0)=T_0, \qquad (5)$$

получаем для коэффициентов следующие значения

$$A_1=T_0+\frac{U_2^2}{\alpha R_1}, \qquad (6)$$

$$A_2=-\frac{U_2^2}{\alpha R_1}, \qquad (7)$$

$$b=-\frac{\alpha}{C}. \qquad (8)$$

В) Зависимость температуры от времени описывается формулой

$$T(t)=T_0+\frac{U_2^2}{\alpha R_1}\left(1-e^{-\frac{\alpha t}{C}}\right), \qquad (9)$$

поэтому момент времени, когда температура резистора станет равной T_1, определяется из условия

$$T(t_1)=T_1, \qquad (10)$$

откуда

$$t_1=-\frac{C}{\alpha}\ln\left[1-\frac{\alpha(T_1-T_0)R_1}{U_2^2}\right]=3.47c. \qquad (11)$$

Г) Температура резистора будет то подниматься от температуры T_2 до температуры T_1, то наоборот. Найдем время t_{21} повышения температуры от T_2 до T_1. Аналогично (11) время повышения температуры резистора до величины T_2 равно

$$t_2=-\frac{C}{\alpha}\ln\left[1-\frac{\alpha(T_2-T_0)R_1}{U_2^2}\right], \qquad (12)$$

откуда

$$t_{21}=t_1-t_2=\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_1}{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_1}\right]. \qquad (13)$$

При понижении температуры уравнение теплового баланса для резистора записывается в виде

$$C\frac{dT}{dt}=\frac{U_2^2}{R_2}-\alpha(T-T_0). \qquad (14)$$

Уравнение (14) аналогично уравнению (4) Подставляя указанную в условии зависимость и используя начальное условие

$$T(0)=T_0, \qquad (15)$$

получаем для коэффициентов следующие значения

$$A_1=T_0+\frac{U_2^2}{\alpha R_2}, \qquad (16)$$

$$A_2=T_1-T_0-\frac{U_2^2}{\alpha R_1}, \qquad (17)$$

$$b=-\frac{\alpha}{C}. \qquad (18)$$

Зависимость температуры от времени описывается формулой

$$T(t)=T_0+\frac{U_2^2}{\alpha R_2}+\left(T_1-T_0-\frac{U_2^2}{\alpha R_1}\right)e^{-\frac{\alpha t}{C}}, \qquad (19)$$

поэтому момент времени, когда температура резистора станет равной T_2, определяется из условия

$$T(t_{12})=T_1, \qquad (20)$$

откуда время t_{12} понижения температуры от T_1 до T_2 определяется выражением

$$t_{12}=\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_2}{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_2}\right]. \qquad (21)$$

Видно, что выражение (21) симметрично формуле (13) и его можно было бы записать сразу.

Отсюда находим период колебаний

$$\tau_0=t_{12}+t_{21}=\frac{C}{\alpha}\ln\left[\left(\frac{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_1}{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_1}\right)\left(\frac{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_2}{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_2}\right)\right]=0.188c.. \qquad (22)$$

Д) Количество джоулева тепла Q_1, выделяемого за время повышения температуры от T_2 до T_1 равно

$$Q_1=\frac{U_2^2}{R_1}t_{21}=\frac{U_2^2}{R_1}\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_1}{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_1}\right], \qquad (23)$$

а количество джоулева тепла Q_2, выделяемого за время понижения температуры от T_1 до T_2 записывается в виде

$$Q_1=\frac{U_2^2}{R_1}t_{21}=\frac{U_2^2}{R_2}\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_2}{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_2}\right]. \qquad (24)$$

Отсюда находим полное количество тепла Q , выделяемого в резисторе за период колебаний

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{U_2^2}{R_1}\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_1}{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_1}\right]+\frac{U_2^2}{R_2}\frac{C}{\alpha}\ln\left[\frac{U_2^2-\alpha(T_1-T_0)R_2}{U_2^2-\alpha(T_2-T_0)R_2}\right]=17.9\text{Дж}.$$

(25)

Задача 3. Квантовая модель атома (10.0 балла)

А) Рассмотрим элемент объема электронного облака, расположенного на расстоянии от x до $x+dx$ от протона. Он равен

$$dV=4\pi x^2dx, \qquad (1)$$

а его заряд

$$dq=\rho dV. \qquad (2)$$

Так как в целом атом нейтрален, то полный заряд электронного облака должен быть равен по модулю заряду протона, то есть

$$\int_0^\infty dq=\int_0^\infty \rho dV=-e, \qquad (3)$$

откуда

$$A=-\frac{e}{\pi a_0^3}. \qquad (4)$$

Б) Найдем напряженность электрического поля с помощью теоремы Гаусса. Полный заряд q, находящийся в атоме от протона на расстоянии от 0 до r равен

$$q=e+\int_0^r \rho dV=e\left(1+2\frac{r}{a_0}+2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}. \qquad (5)$$

По теореме Гаусса напряженность электрического поля равна

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+2\frac{r}{a_0}+2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}. \qquad (6)$$

В) Существует связь между потенциалом электрического поля и его напряженностью, которая выражается формулой

$$E=-\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (7)$$

Подставляя выражение, заданное в условии задачи, находим искомые коэффициенты

$$A_1=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad (8)$$

$$A_2=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad (9)$$

$$b=\frac{2}{a_0}. \qquad (10)$$

Г) Энергия взаимодействия протона с электронным облаком вычисляется по формуле

$$W_e=\int_0^\infty \frac{e\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 x}, \qquad (11)$$

откуда

$$W_e=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}. \qquad (12)$$

Д) Для вычисления собственной энергии электронного облака рассчитаем напряженность создаваемого им электрического поля. Заряд облака, расположенного на расстоянии от 0 до r, равен

$$q_e=\int_0^r \rho dV=e\left[\left(1+2\frac{r}{a_0}+2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right)e^{-\frac{2r}{a_0}}-1\right], \qquad (13)$$

а создаваемое им электрическое поле находится из теоремы Гаусса

$$E_e=\frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (14)$$

Плотность энергии электрического поля известна и равна

$$w_i=\frac{\varepsilon_0 E_e^2}{2}, \qquad (15)$$

а сама энергия вычисляется по формуле

$$W_i=\int_0^\infty w_i dV. \qquad (16)$$

Собирая формулы (13)-(16), окончательно получаем

$$W_i=\frac{5e^2}{64\pi\varepsilon_0 a_0}. \qquad (17)$$

Е) Так как в целом атом нейтрален, то полный заряд электронного облака должен быть равен по модулю заряду протона, то есть из (3) снова находим

$$B=-\frac{e}{8\pi a_0^3}. \qquad (18)$$

Ж) Новая энергия взаимодействия протона с электронным облаком вычисляется по формуле (11) и равна

$$W_e^{new}=-\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0 a_0}. \qquad (19)$$

Для вычисления нового значения собственной энергии электронного облака рассчитаем напряженность создаваемого им электрического поля. Заряд облака, расположенного на расстоянии от 0 до r, равен

$$q_e^{new} = \int_0^r \rho dV = e\left[\left(1+\frac{r}{a_0}\left(1+\frac{1}{2}\frac{r}{a_0}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a_0}\right)^3\right)\right)e^{-\frac{r}{a_0}}-1\right]. \qquad (20)$$

Повторяя вычисления, окончательно получаем

$$W_i^{new} = \frac{77e^2}{4096\pi\varepsilon_0 a_0}. \qquad (21)$$

При изменении конфигурации электронного облака изменяется как энергия его взаимодействия с протоном, так и его собственная энергия. Изменение энергии

$$\Delta W = W_e^{new} + W_i^{new} - W_e - W_i = \frac{525e^2}{4096\pi\varepsilon_0 a_0} \qquad (22)$$

должно быть равно энергии фотона

$$\Delta W = \hbar\omega, \qquad (23)$$

откуда

$$\omega = \frac{525e^2}{4096\pi\hbar\varepsilon_0 a_0} = 2.15\times10^{14}c^{-1}. \qquad (24)$$

3) Запрещенность этого перехода связана с сохранением момента импульса, так как поглощаемый фотон обладает собственным моментом импульса – спином. Тем не менее, фотон указанной частоты может реально поглощаться атомом водорода, это обусловлено так называемым вырождением энергетических уровней атома водорода.