Решение задач. 10 класс.

Задача 1 (9.0 балла)

Часть А (4.0 балла)

В сосуде в равновесии находятся вода, лед и пар в так называемой тройной точке. Как будет показано ниже, после вдвигания поршня в системе останется лед, вода и пар в той же самой тройной точке. Так как объемом воды и льда можно пренебречь по сравнению с объемом пара, то отсюда немедленно находим конечную массу водяного пара $m'_{пара} = m_{пара} / 2 = 1г$. При вдвигании поршня газ совершает отрицательную работу, равную

$$A = -P_{пара} \frac{V_{пара}}{2} = -\frac{m_{пара} RT}{2\mu} \qquad (1)$$

Так как система теплоизолирована, то по первому началу термодинамики изменится внутренняя энергия пара

$$\Delta U = -A = \frac{m_{пара} RT}{2\mu}. \qquad (2)$$

Конечная масса льда определится из уравнения теплового баланса с учетом дополнительной внутренней энергии пара (2), которая пойдет на плавление льда

$$\frac{m_{пара}}{2} r + \Delta U = \lambda (m_{льда} - m'_{льда}). \qquad (3)$$

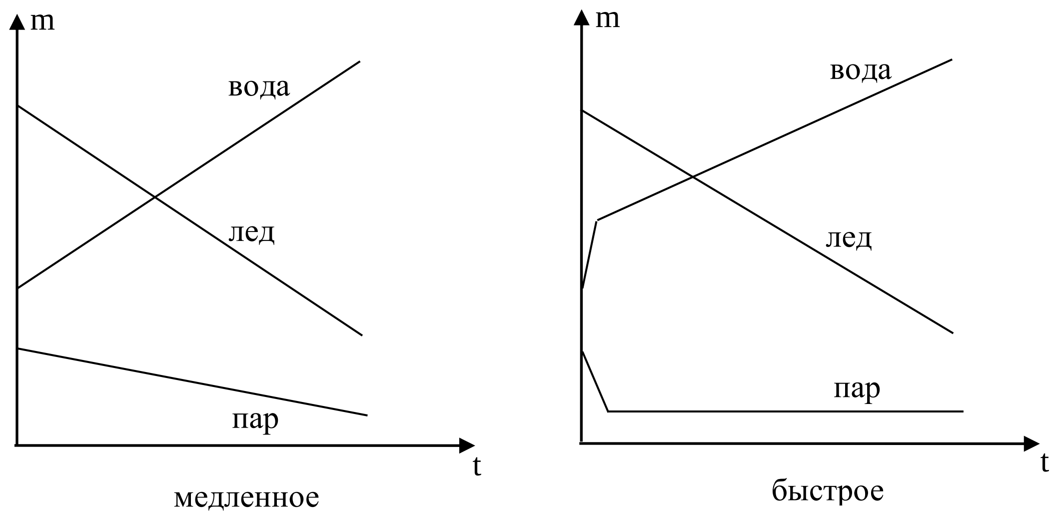
Отсюда с учетом (2) находим конечную массу льда

$$m'_{льда} = 2.2 \text{ г}. \qquad (4)$$

Таким образом, конечная масса воды равна

$$m'_{вода} = m_{вода} + m_{льда} + m_{пара} - m'_{льда} - m'_{пара} = 11.8 \text{ г}. \qquad (5)$$

Проведенные расчеты справедливы как для медленного, так и для быстрого вдвигания поршня. Зависимость же масс льда, пара и воды от времени в этих случаях разная и представлена на рисунке.



В случае медленного вдвигания поршня изменение состава смеси в любой момент времени соответствует равновесным значениям. В случае быстрого вдвигания пар быстро конденсируется в воду, а таяние льда происходит медленно, так как скорость ограничена медленной теплопроводностью.

Часть Б (5.0 балла)

Минимальная скорость пули определяется из закона сохранения энергии. Начальный заряд конденсатора с диэлектрической пластиной внутри $q_0 = \varepsilon CU$, а конечный – $q = CU$. Закон сохранения энергии с учетом сохранения импульса записывается в виде

$$\frac{\varepsilon CU^2}{2}+\frac{m^2v_{\min}^2}{2(M+m)}+A=\frac{CU^2}{2},\qquad(1)$$

где $A=(q-q_0)U=(1-\varepsilon)CU^2$ – работа источника.

Отсюда находим минимальную скорость пули

$$v_{\min}=U\sqrt{\frac{C(\varepsilon-1)}{m}\left(1+\frac{M}{m}\right)}.\qquad(2)$$

Для расчета времени, через которое диэлектрическая пластина покинет конденсатор, найдем действующую на нее силу. Воспользуемся методом определения сил из выражения для энергии. Пусть пластина выдвинута из конденсатора на длину x. Тогда емкость конденсатора будет определяться суммой параллельно соединенных конденсаторов с диэлектриком и без него

$$C_н=C\frac{x}{h}+\varepsilon C\frac{h-x}{h},\qquad(3)$$

а заряд равен

$$q_н=C_нU.\qquad(4)$$

Сместим пластину на небольшую величину δx. Тогда емкость конденсатора изменится и станет

$$C_к=C\frac{x+\delta x}{h}+\varepsilon C\frac{h-x-\delta x}{h},\qquad(5)$$

а заряд будет равен

$$q_к=C_кU.\qquad(6)$$

Силу находим из закона сохранения энергии, считая, что она совершает работу $F\delta x$

$$\frac{C_нU^2}{2}+F\delta x+\delta A=\frac{C_кU^2}{2},\qquad(7)$$

где $\delta A=(q_к-q_н)U$ – работа источника.

Решая совместно (3)-(7), находим силу, которая оказывается постоянной и равной

$$F=\frac{(\varepsilon-1)CU^2}{2h}.\qquad(8)$$

Используя ускорение $a=F/(M+m)$, получим искомое время в виде

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a}}=\frac{2h}{U}\sqrt{\frac{m+M}{C(\varepsilon-1)}}.\qquad(9)$$

Задача 2. Нелинейная нитка (10.0 балла)

А) Условие сохранения объема записывается в виде

$$S_0l_0=Sl,\qquad(1)$$

откуда

$$S=\frac{S_0l_0}{l}.\qquad(2)$$

Б) Запишем длину нити в виде

$$l=l_0+x.\qquad(3)$$

Подставляя в выражении для силы, получим

$$F=a+\frac{b}{l}=a+\frac{b}{l_0+x}.\qquad(4)$$

Разложим выражении (4) в области малых деформаций $x<<l_0$, имеем

$$F=a+\frac{b}{l_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right).\qquad(5)$$

Сравнивая с законом Гука, получим

$$\frac{E_0 S_0}{l_0} = -\frac{b}{l_0^2}, \tag{6}$$

$$a + \frac{b}{l_0} = 0. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (6) и (7), получим

$$b = -E_0 S_0 l_0, \tag{8}$$

$$a = E_0 S_0. \tag{9}$$

В) Выразим изменение силы через малое изменение длины. Очевидно, что

$$\delta F = \frac{dF}{dl}\delta l, \tag{10}$$

откуда подставляя (4) и используя (9), находим

$$\delta F = \frac{E_0 S_0 l_0}{l^2}\delta l, \tag{11}$$

Г) Второй закон ньютона для кругового движения тела на нити имеет вид

$$\frac{mv^2}{l} = F = a + \frac{b}{l}. \tag{12}$$

Так как кинетическая энергия равна

$$K = \frac{mv^2}{2}, \tag{13}$$

то используя выражения (8) и (9), найдем

$$l = l_0 + \frac{2K}{E_0 S_0}. \tag{14}$$

Д) Первое уравнение представляет собой закон сохранения момента импульса относительно точки закрепления нити и имеет вид

$$v_t(L+r) = V_t L. \tag{15}$$

Изменение потенциальной энергии растянутой нити равно

$$\Delta U = E_0 S_0\left(r - l_0 \ln\frac{L+r}{L}\right), \tag{16}$$

а второе уравнение представляет собой закон сохранения энергии, записываемый в виде

$$\frac{m\left(V_t^2 + V_r^2\right)}{2} = \frac{m\left(v_t^2 + v_r^2\right)}{2} + \Delta U = \frac{m\left(v_t^2 + v_r^2\right)}{2} + E_0 S_0\left(r - l_0 \ln\frac{L+r}{L}\right). \tag{17}$$

Е) Исключая из уравнения (15) v_t и подставляя в (17), получим

$$\frac{m\left(V_t^2 + V_r^2\right)}{2} = \frac{m\left(V_t^2\left(\frac{L}{L+r}\right)^2 + v_r^2\right)}{2} + E_0 S_0\left(r - l_0 \ln\frac{L+r}{L}\right). \tag{18}$$

Воспользуемся условием $r << L$ и используем разложения

$$\left(\frac{L}{L+r}\right)^2 \approx 1 - 2\frac{r}{l} + 3\left(\frac{r}{l}\right)^2, \tag{19}$$

$$\ln\frac{L+r}{L} \approx \frac{r}{L} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{L}\right)^2. \tag{20}$$

Так как в начальный момент до возмущения движение тела является круговым, то должно выполняться условие (14), которое в данном случае имеет вид

$$E_0 S_0\left(1 - \frac{l_0}{L}\right) = \frac{mV_t^2}{L}, \tag{21}$$

Комбинируя (18)-(21), получим

$$\frac{mV_r^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3mV_t^2}{L^2} + \frac{E_0 S_0 l_0}{L^2}\right) r^2 . \qquad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой уравнение закон сохранения энергии колебаний тела вдоль нити с эффективной массой

$$m_{eff} = m , \qquad (23)$$

и эффективной жесткостью

$$k_{eff} = \frac{E_0 S_0}{L^2}(3L - 2l_0) . \qquad (24)$$

Значит, частота колебаний находится в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{E_0 S_0 (3L - 2l_0)}{mL^2}} . \qquad (25)$$

При $L >> l_0$, выражение (25) дает

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{3E_0 S_0}{mL}} . \qquad (26)$$

Задача 3. Нелинейный резистор (11.0 балла)

А) Джоулево тепло, выделяемое в резисторе, полностью идет на его нагревание. Мощность джоулевых потерь равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} . \qquad (1)$$

Уравнение теплового баланса в данном случае имеет вид

$$C(T - T_0) = Pt = \frac{U^2}{R_1} t , \qquad (2)$$

откуда

$$T(t) = T_0 + \frac{U^2}{CR_1} t . \qquad (3)$$

Таким образом, температура будет линейно возрастать со временем по формуле (3) до тех пор, пока она не достигнет значения T_1. Это произойдет в момент времени

$$t_1 = \frac{C(T_1 - T_0) R_1}{U^2} = 160c . \qquad (4)$$

Б) После скачка сопротивления изменится мощность джоулевых потерь (1)

$$P = \frac{U^2}{R_1} . \qquad (5)$$

Время, необходимое для достижения температуры T_{cr}, при которой включается вентилятор

$$t_2 = t_1 + \frac{C(T_{cr} - T_1) R_2}{U^2} = 200c . \qquad (6)$$

В) После включения вентилятора температура резистора начнет уменьшаться до тех пор, пока она не достигнет температура T_2. Для этого потребуется время Δt_1, которое определяется из уравнения теплового баланса

$$C(T_{cr} - T_2) = \left(P_Q - \frac{U^2}{R_2}\right)\Delta t_1 , \qquad (7)$$

то есть

$$\Delta t_1 = \frac{CR_2(T_{cr} - T_2)}{P_Q R_2 - U^2} = 26.6c\,. \qquad (8)$$

Из (8) видно, что после достижения температуры T_2 вентилятор продолжает работать и температура резистора продолжает падать. Минимальная температура определяется из уравнения

$$C(T_2 - T_{\min}) = \left(P_Q - \frac{U^2}{R_2}\right)(\tau - \Delta t_1)\,, \qquad (9)$$

откуда

$$T_{\min} = T_2 + \frac{R_2(P_Q R_1 - U^2)}{R_1(P_Q R_2 - U^2)}(T_{cr} - T_2) - \frac{(P_Q R_1 - U^2)}{CR_1}\tau = 58.3°C\,. \qquad (10)$$

Г) Для определения периода возникающих колебаний осталось определить время Δt, за которое резистор нагреется от температуры $T_{\min}$ до T_1. Оно находится из уравнения

$$C(T_1 - T_{\min}) = \frac{U^2}{R_1}\Delta t\,,(11) \qquad (11)$$

откуда

$$\Delta t = \frac{C(T_1 - T_{\min})R_1}{U^2} = 83.3c\,. \qquad (12)$$

Окончательно находим период колебаний

$$\tau_0 = \tau + \Delta t + \frac{C(T_{cr} - T_1)R_2}{U^2} = 213c\,. \qquad (13)$$

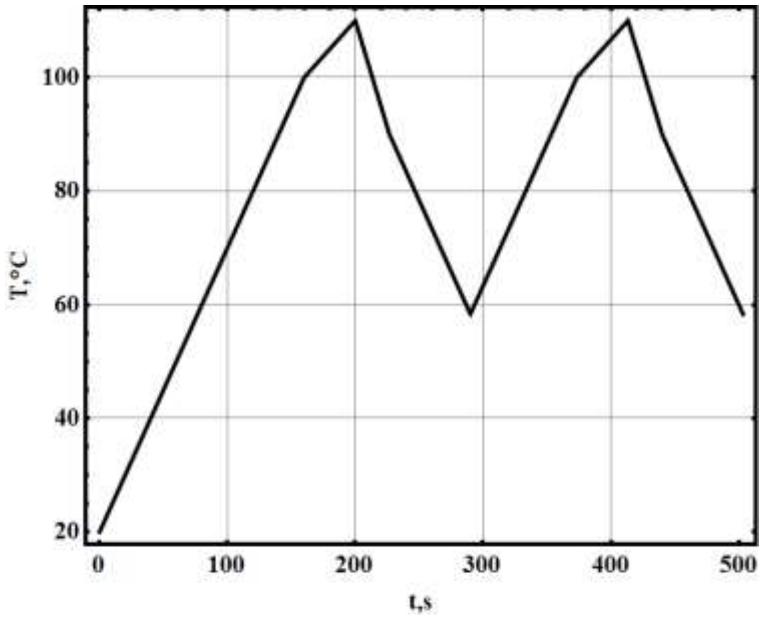
Д) Количество выделяемого в резисторе тепла за период колебаний в точности равно количеству тепла, отводимого вентилятором. Последнее легко находится

$$Q = P_Q \tau = 360\,\text{Дж}\,. \qquad (14)$$

Е) Полная зависимость температуры от времени имеет вид

$$T(t) = \begin{cases} T_0 + \dfrac{U^2}{CR_1}t, & 0 < t < t_1 \\ T_1 + \dfrac{U^2}{CR_2}(t - t_1), & t_1 < t < t_2 \\ T_{cr} - \left(P_Q - \dfrac{U^2}{CR_2}\right)(t - t_2), & t_2 < t < t_2 + \Delta t_1 \\ T_2 - \left(P_Q - \dfrac{U^2}{CR_1}\right)(t - t_2 - \Delta t_1), & t_2 + \Delta t_1 < t < t_2 + \tau \end{cases}. \qquad (15)$$

После этого ход зависимости полностью повторяется и график имеет следующий вид



T,°C
100
80
60
40
20
0
100
200
300
400
500
t,s