Решение задач. 9 класс.

Задача 1 (9.5 баллов)

Часть А (5.5 балла)

Объект начнет проскальзывать в тот момент времени, когда сила, необходимая для поддержания его ускоренного движения, превысит максимальную силу трения

Угловая скорость вращения карусели изменяется со временем по закону

$\omega = \beta t$. (1) (0.5 балла)

Тангенциальное ускорение тела равно

$a_t = \beta R$, (2) (0.5 балла)

А нормальное ускорение

$a_n = \omega^2 R$. (3) (0.5 балла)

Полное ускорение тела определяется по теореме Пифагора

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. (4) (0.5 балла)

По второму закону Ньютона

$F = ma$. (5) (0.5 балла)

С другой стороны, эта сила не может превысить силу трения

$F_{тр} \le \mu_s N$, (6) (0.5 балла)

где сила реакции карусели равна

$N = mg$. (7) (0.5 балла)

Решая совместно уравнения (1)-(7), находим момент времени начала проскальзывания объекта относительно карусели

$t_0 = \dfrac{1}{\beta\sqrt{R}} \sqrt[4]{\mu_s^2 g^2 - \beta^2 R^2}$. (8) (0.5 балла)

Скорость объекта в этот момент времени совпадает со скоростью соответствующей точки карусели

$v = \omega R = \beta t_0 R = \sqrt{R\sqrt{\mu_s^2 g^2 - \beta^2 R^2}}$. (9) (0.5 балла)

Угловое положение тела момент начала проскальзывания равно

$\alpha' = \dfrac{1}{2}\beta t_0^2 = \dfrac{1}{2\beta R}\sqrt{\mu_s^2 g^2 - \beta^2 R^2}$. (10) (0.5 балла)

Для угла α надо добавить его начальное значение, равное $\pi/2$, откуда

$\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \alpha' = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2\beta R}\sqrt{\mu_s^2 g^2 - \beta^2 R^2} \approx 4{,}6\, рад \approx 2{,}6\times 10^{1\circ}$. (11) (0.5 балла)

Часть Б (1.5 балла)

Пусть теплоемкость воды равна C, а теплоемкость термометра – C_t. Тогда уравнение теплового баланса в первом случае запишется в виде

$C(\theta - t_1) = C_t(t_1 - t_0)$. (1) (0.5 балла)

Для повторного опыта уравнение теплового баланса имеет вид

$C(\theta - t_2) = 2C_t(t_2 - t_0)$. (2) (0.5 балла)

Решая совместно (1) и (2), получим

$\theta = \dfrac{t_2(t_1 + t_0) - 2t_0 t_1}{2t_2 - t_1 - t_0} = 77°C$. (3) (0.5 балла)

Часть В (2.5 балла)

Сила тока, протекающего через вольтметр V_2 равна

$i_2 = I_2 - I_1$, (1) (0.5 балла)

а значит его сопротивление вычисляется по формуле

$$R_V = \frac{V_2}{i_2} = \frac{V_2}{I_2 - I_1}. \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Сила тока, протекающего через вольтметр V_1 равна

$$i_1 = \frac{V_1}{R_V} = \frac{V_1}{V_2}(I_2 - I_1). \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Отсюда находим силу тока, протекающего через резистор

$$I_R = I_1 - i_1 = I_1 - \frac{V_1}{V_2}(I_2 - I_1). \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Значит, сопротивление резистора определяется формулой

$$R = \frac{V_1}{I_R} = \frac{V_1 V_2}{V_2 I_1 - V_1(I_2 - I_1)} = 323 Ом. \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Задача 2 (11.0 балла)

Закон сохранения энергии, как для шара, так и для мяча, записывается в виде

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} = mgh, \qquad (1) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_0 = \sqrt{2gh}. \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Обе скорости направлены вниз.

После первого столкновения скорость мяча для гольфа остается прежней

$$u_2 = \mathrm{v}_2 = \sqrt{2gh}. \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

и направленной вниз.

Закону сохранения энергии для шара имеет вид

$$\frac{Mv_1^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2}, \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$u_1 = \mathrm{v}_1 = \sqrt{2gh}, \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

но его скорость направлена вверх.

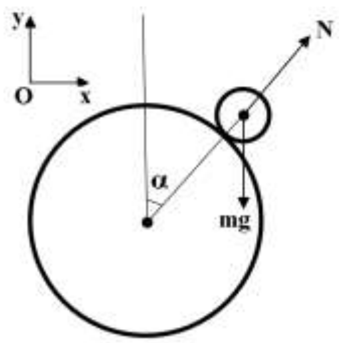
Рассмотрим второе столкновение. Закон сохранения импульса, записанный в проекциях на оси x и y соответственно, имеет вид

$$Mw_{1x} + mw_{2x} = 0, \qquad (6) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

$$Mu_1 - mu_2 = Mw_{1y} + mw_{2y}. \qquad (7) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Закон сохранения энергии запишется так

$$\frac{Mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} = \frac{M(w_{1x}^2 + w_{1y}^2)}{2} + \frac{m(w_{2x}^2 + w_{2y}^2)}{2}. \qquad (8) \qquad (0.5 \text{ балла})$$



Уравнений (6)-(8) недостаточно для решения задачи. Рассмотрим силы, действующие в момент столкновения на мяч для гольфа. Это сила реакции со стороны шара N, имеющая ударный характер и значительно превышающая по модулю силу тяжести mg. Значит, изменение импульса как шара для боулинга, так и мяча для гольфа направлено вдоль вектора N, откуда

$m(w_{2y}+u_2)=N\cos\alpha\,\Delta t$, (9) (0.5 балла)

$mw_{2x}=N\sin\alpha\,\Delta t$. (10) (0.5 балла)

Поделив уравнение (9) и (10), находим

$w_{2y}+u_2=w_{2x}\operatorname{ctg}\alpha$. (11) (1.0 балла)

Решая совместно (6)-(8), (11), окончательно получаем

$w_{1x}=-2\sqrt{2gh}\dfrac{m}{m+M}\sin 2\alpha$, (12) (0.5 балла)

$w_{1y}=\sqrt{2gh}\left[1-\dfrac{2m}{M+m}(1+\cos 2\alpha)\right]$, (13) (0.5 балла)

$w_{2x}=2\sqrt{2gh}\dfrac{M}{m+M}\sin 2\alpha$. (14) (0.5 балла)

$w_{2y}=\sqrt{2gh}\left[1+2\dfrac{M\cos 2\alpha-m}{M+m}\right]$. (15) (0.5 балла)

Отсюда находим скорости после второго столкновения

$w_1=\sqrt{w_{1x}^2+w_{1y}^2}=\sqrt{2gh\left(1-\dfrac{8m(M-m)}{(M+m)^2}\cos^2\alpha\right)}$, (16) (0.5 балла)

$w_2=\sqrt{w_{2x}^2+w_{2y}^2}=\sqrt{2gh\left(1+\dfrac{8M(M-m)}{(M+m)^2}\cos^2\alpha\right)}$, (17) (0.5 балла)

Дальность полета мяча для гольфа находится по формуле

$l=2\dfrac{w_{2y}}{g}w_{2x}=8h\dfrac{M(M+2M\cos 2\alpha-m)}{(M+m)^2}\sin 2\alpha$. (18) (0.5 балла)

При $M=m$ из (18) получаем

$l=2h\sin 4\alpha$. (19) (0.5 балла)

Таким образом, максимальное значение l, равное

$l_{\max}=2h$ (20) (0.5 балла)

достигается при угле

$\alpha=\dfrac{\pi}{8}=22.5°$. (21) (0.5 балла)

Задача 3 (5.5 балла)

Пусть h_0 – начальный уровень воды в стакане, $h_н$ – уровень нижнего торца цилиндра, $h_в$ – уровень воды в стакане. Все уровни отсчитываются от дна стакана.

Объем воды, вытесненный цилиндром из области ниже h_0 образовал водяной слой высотой $h_в-h_0$ с внешним сечением S_1 и внутренним сечением S_2. Из несжимаемости воды следует, что

$(h_0-h_н)S_2=(h_в-h_н)(S_1-S_2)$. (1) (0.5 балла)

Высоты h_0, $h_н$, и $h_в$ связаны со значениями объемов, отсчитываемыми по шкале мерного стакана, соотношениями

$V_н=S_1h_н$, (2) (0.5 балла)

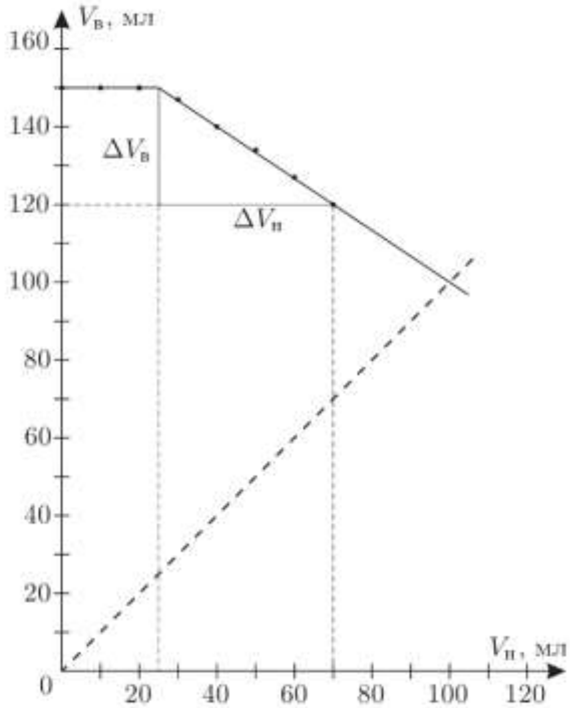
$V_0=S_1h_0$, (3) (0.5 балла)

$V_в=S_1h_в$. (4) (0.5 балла)

Подставляя (2)-(4) в (1), получаем

$$V_в = \frac{S_1}{S_1 - S_2}V_0 - \frac{S_2}{S_1 - S_2}V_н, \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

По данным таблицы можно построить график зависимости $V_в(V_н)$ в виде



Из графика видно, что при $V_в = 150 мл$ уровень воды перестает изменяться. При этом уровне цилиндр полностью погрузился в воду. Этот момент наступает при $V_н = 25 мл$, то есть высоте цилиндра соответствует

$L = 150 - 25 = 125$ единиц шкалы стакана. (6) (0.5 балла)

Из условия задачи следует, что в начальном состоянии при свободном плавании цилиндра высота его погруженной в воду части соответствует

$L_0 = V_{0в} - V_{0н} = 120 - 70 = 50$ единиц шкалы стакана. (7) (0.5 балла)

Отсюда находим плотность дерева

$$\rho_{Д} = \rho_0 \frac{L_0}{L} = 400 кг/м^2. \qquad (8) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Из (4) следует, что угловой коэффициент наклона зависимости $V_в(V_н)$ равен

$$\frac{\Delta V_в}{\Delta V_н} = -\frac{S_2}{S_1 - S_2} = -\frac{1}{S_1/S_2 - 1} = -\frac{2}{3}. \qquad (9) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Численное значение взято из графика. Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2} = 2.5 \qquad \text{или} \qquad \frac{D}{d} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 1.58. \qquad (10) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Объем воды в стакане найдем из графика. Уровень V_0 установится в тот момент, когда стержень будет полностью вытащен из воды. Из (5) видно, что при $V_н = V_0$, $V_в$ тоже становится равным V_0. Пунктирный график $V_и = V_н$ пересекает график зависимости в точке

$V_0 = 100 мл$. (11) (0.5 балла)

Задача 4 (4.0 балла)

Количество выделяемой в лампе энергии за счет джоулева тепла равно излучаемой энергии. Так как условия излучения остались неизменными, то излучаемая энергия просто пропорциональна площади поверхности

$P \propto aL$. (1) (0.5 балла)

Если удельное сопротивление нити накаливания равно ρ, то ее полное сопротивление есть

$$R = \rho \frac{L}{\pi a^2}, \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

а значит выделяемая мощность равна

$$P = \frac{V^2}{R}, \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

то есть

$$P \sim \frac{a^2}{L}. \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Из (1) и (4) заключаем, что

$$a \sim P^{2/3}, \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

$$L \sim P^{1/3}. \qquad (6) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Таким образом, радиус и длина нити новой лампы накаливания должны быть

$$a_n = n^{2/3} a. \qquad (7) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

$$L_n = n^{1/3} L. \qquad (8) \qquad (0.5 \text{ балла})$$