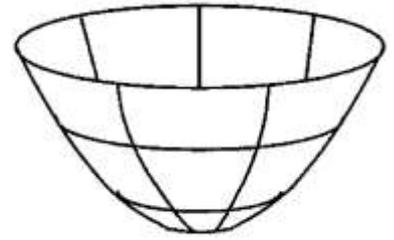
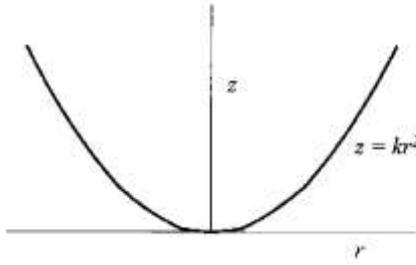


Задача 1 (10.0 балла)

Тело может двигаться по внутренней поверхности параболоида вращения, сечение которого имеет уравнение $z = kr^2$. Тело, находящееся на высоте z_0 от вершины, начинает двигаться вдоль поверхности с горизонтальной скоростью v_0 .



Ускорение свободного падения равно g , геометрические размеры тела очень малы.

- При определенном значении горизонтальной скорости v_0 , которое обозначим v_h , тело движется по горизонтальной окружности. Найдите v_h .
- Пусть теперь $v_0 > v_h$. На какую максимальную высоту z_{\max} поднимется тело?

Пусть теперь $v_0 = 0$.

- Считая z_0 малым, найдите период колебаний тела.
- Пусть z_0 произвольно. Будет ли период движения большим или меньшим по сравнению с вычисленным в пункте в)? Ответ обоснуйте.

Задача 2 (7.0 балла)

Рассмотрим явление звуковой люминесценции. Пусть в жидкости в состоянии равновесия находится пузырек с газом. Распространяющаяся в газе звуковая волна сжимает пузырек настолько, что температура газа становится достаточной для излучения света. На самом деле пузырек претерпевает целую серию сжатий и расширений, вызываемых изменением давления в звуковой волне.

В дальнейшем будем работать с простейшей моделью звуковой люминесценции. Предположим, что первоначальное давление газа внутри пузырька равно атмосферному $P_0 = 100 \text{ кПа}$. Когда давление в жидкости, окружающей пузырек, уменьшается, пузырек расширяется изотермически до радиуса $r_{\max} = 36.0 \text{ мкм}$. Когда давление звуковой волны нарастает, пузырек сжимается до радиуса $r_{\min} = 4.50 \text{ мкм}$ настолько быстро, что газ внутри пузырька не успевает обмениваться теплом с окружающей средой. Между сжатием и расширением пузырек изохорически (при постоянном объеме) остывает до начального давления и температуры окружающей среды. Пусть пузырек, содержащий одноатомный идеальный газ, находится в воде, имеющей температуру $T_0 = 293 \text{ К}$. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8.31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$.

- Сколько молей газа ν содержится внутри одного пузырька?
- Чему равно давление газа P_1 в пузырьке после расширения?
- Чему равно давление газа P_2 в пузырьке после его сжатия?
- Чему равна температура газа T_2 в пузырьке после сжатия?
- Чему равна работа A , совершаемая над пузырьком за время одного цикла сжатия и расширения?

Задача 3 (8.0 балла)

С помощью кабеля питания высоковольтной линии передается электрический ток синусоидальной формы частотой $\nu = 60 \text{ Гц}$. Нагрузка работает при действующем значении напряжения $U_0 = 500 \text{ кВ}$ и потребляет мощность $P = 1000 \text{ МВт}$. В данной задаче рассматривайте только электрический ток, текущий в одном из двух возможных направлений и полностью пренебрегайте емкостью и индуктивностью между кабелем и землей. Магнитная постоянная равна $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$.

Республиканская олимпиада. Теоретический тур, 11 класс. Талдыкорган, 2013

Предположим, что нагрузка представляет собой группу зданий, которые можно рассматривать как обычное сопротивление.

- а) Каково действующее значение электрического тока I в кабеле питания высоковольтной линии передач?
- б) Кабель, имеющий диаметр $d = 3\text{ см}$ и длину $l = 500\text{ км}$, изготовлен из алюминия с удельным сопротивлением $\rho = 2.8 \times 10^{-8}\text{ Ом}\cdot\text{м}$. Какая мощность P_0 теряется в кабеле питания высоковольтной линии передач?

Продвинутый фермер, живущий вблизи линии передач, подумал, что он сможет извлечь из кабеля электрическую энергию, используя явление электромагнитной индукции. Фермер изготовил прямоугольный контур длины a и ширины $b < a$, состоящий из N витков. Он поместил одну из длинных сторон контура на землю, поставив его вертикально под кабелем, так, что кабель находился на высоте h от земли. Пусть ток в кабеле меняется по закону $I = I_0 \sin \omega t$.

- в) Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии r от кабеля.
- г) Найдите аналитическое выражение для э.д.с. индукции, наводимой в контуре кабелем.
- д) Пусть $a = 5\text{ м}$, $b = 2\text{ м}$ и $h = 100\text{ м}$. Сколько витков N должен содержать контур для того, чтобы в нем индуцировалась действующее значение э.д.с., равное $\varepsilon_0 = 120\text{ В}$?

В качестве нагрузки к группе зданий подключается завод, на котором работает большое количество электродвигателей. Оказалось, что потребляемая мощность не изменилась, а сам завод можно рассматривать как катушку индуктивности $L = 0,25\text{ Гн}$, подключенную параллельно к группе зданий.

- е) Возросла ли мощность, теряемая в кабеле питания? Ответ обоснуйте.
- ж) Энергетическая компания, которой принадлежат сети, решила сделать ситуацию, какой она была до подключения завода. Для этого они параллельно заводу подключили конденсатор. Какова его емкость C ?

Задача 4 (5.0 балла)

В данной задаче рассматривается упрощенная модель электромагнитного излучения, запертого внутри куба со стороной L . Электрическое поле внутри куба имеет пространственную зависимость

$$E(x, y, z) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z),$$

при этом считается, что одна из вершин куба находится в начале координат, а стороны куба направлены вдоль осей x , y и z соответственно. Пусть \hbar – постоянная Планка, k_B – постоянная Больцмана, c – скорость света.

- а) Электрическое поле должно быть равно нулю на всех гранях куба. Каковы возможные значения k_x, k_y и k_z ?
- б) В этой модели каждому возможному набору значений (k_x, k_y, k_z) соответствует одно так называемое квантовое состояние. Все возможные квантовые состояния могут быть изображены точками в так называемом пространстве состояний, представляющем собой воображаемое пространство с введенными декартовыми координатами k_x, k_y и k_z . Сколько состояний N находится в некотором объеме s пространства состояний? s настолько велико, что дискретностью квантовых состояний можно пренебречь.
- в) Каждому квантовому состоянию может соответствовать фотон с частотой $\omega = c|k|$, где $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Пусть температура системы равна T . Известно, что ни один фотон не может иметь энергию, большую чем $k_B T$. Определите форму и размеры области в пространстве состояний, которая может быть занята фотонами.
- г) Пусть каждое возможное квантовое состояние занято одним фотоном. Найдите полную энергию всех фотонов в кубе. Считайте, что температура настолько высока, что внутри куба находится очень большое число квантовых состояний. *Подсказка:* надо разделить пространство состояний на сферические слои.