Решение задач. 11 класс
Задача 1 (10.0 балла)

Пусть тело имеет массу m и движется по окружности радиуса r_0 на высоте z_0. Обозначим через θ угол наклона, который составляет касательная плоскость в данной точке к горизонту. В процессе движения на тело действуют две силы: сила тяжести и реакции со стороны параболлоида. Уравнения движения в проекции на горизонтальную и вертикальную составляющие записывается в виде

$$N\sin\theta = \frac{m\mathrm{v}_h^2}{r}, \qquad (1) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

$$N\cos\theta - mg = 0, \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{v}_h^2}{gr_0}. \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

С другой стороны тангенс угла наклона легко определяется через производную

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dz}{dr} = 2kr_0. \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Приравнивая (3) и (4) и замечая, что $z_0 = kr_0^2$, получаем

$$\mathrm{v}_h = \sqrt{2gz_0}. \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Пусть радиус параболлоида в точке $z_{\max}$ равен r, а скорость тела равна v. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + mgz. \qquad (6) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Момент действующих сил относительно оси параболлоида равен нулю, а это означает сохранение момента импульса относительно этой же оси. Кроме этого, в верхней точке траектории направление скорости строго горизонтально (иначе высота продолжала бы расти), поэтому закон сохранения проекции момента импульса но ось параболлоида имеет вид

$$m\mathrm{v}_0 r_0 = m\mathrm{v}r. \qquad (7) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Принимая во внимание, что

$$z_0 = kr_0^2, \qquad (8) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

$$z = kr^2, \qquad (9) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

и решая совместно (6)-(8), получаем

$$z = \frac{\mathrm{v}_0^2}{2g}. \qquad (10) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Ускорение тела в произвольной точке равно

$$a = g\sin\theta, \qquad (11) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

а его проекция на горизонтальное направление равна

$$a_r = -a\cos\theta = -g\sin\theta\cos\theta. \qquad (12) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Выражение для тангенса угла наклона записывается аналогично (4)

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dz}{dr} = 2kr. \qquad (13) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

При малых углах θ имеем

$$\sin\theta \approx \mathrm{tg}\,\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1. \qquad (14) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Собирая (11)-(14) вместе, получаем

$$\frac{d^2r}{dt^2} + 2kgr = 0. \qquad (15) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Уравнение (15) представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{2kg}\,, \qquad (16) \quad (0.5 \text{ балла})$$

а значит период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2kg}}\,. \qquad (17) \quad (0.5 \text{ балла})$$

В случае больших отклонений период колебаний больше, чем определяемый формулой (17). Действительно, мы получили для ускорения формулу (12), а фактически воспользовались формулой

$$a_r = -g\,\operatorname{tg}\theta\,. \qquad (18) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Так как выполняется неравенство

$$\sin\theta\cos\theta < \operatorname{tg}\theta\,, \qquad (19) \quad (0.5 \text{ балла})$$

то фактическое ускорение оказывается меньше, а значит период колебаний больше (0.5 балла).

Задача 2 (7.0 балла)

С пузырьком происходят три процесса: 1) изотермическое расширение; 2) адиабатическое сжатие; изохорическое охлаждение. Так как последний процесс изохорический, то нам известны начальные параметры газа в пузырьке

$$P = P_0,\; V = \frac{4}{3}\pi r_{\min}^3,\; T = T_0, \qquad (1) \quad (0.5 \text{ балла})$$

тогда из уравнения состояния идеального газа определяем число молей газа в пузырьке

$$\nu = \frac{PV}{RT} = \frac{4\pi}{3}\frac{P_0 {r_{min}}^3}{RT_0} = 1.57 \times 10^{-14} \text{моль} \qquad (2) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Процесс 1. В процессе изотермического расширения давление уменьшается до величины

$$P_1 = P_0\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^3 = 195 \text{ Па} \qquad (3) \quad (0.5 \text{ балла})$$

а работа, совершаемая газом, равна

$$A_1 = 4\pi P_0 r_{\min}^3 \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right). \qquad (4) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Процесс 2. Для одноатомного газа показатель адиабаты равен

$$\gamma = 5/3, \qquad (5) \quad (0.5 \text{ балла})$$

а из уравнения адиабаты находим давление в пузырьке

$$P_2 = P_1\left(\frac{r_{\max}^3}{r_{\min}^3}\right)^{\gamma}, \qquad (6) \quad (0.5 \text{ балла})$$

откуда с учетом (3) получаем

$$P_2 = P_0\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{3(\gamma-1)} = 6.40 \times 10^6 \text{Па}. \qquad (7) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Аналогично находим температуру в конце адиабатического сжатия

$$T_2 = T_0\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{3(\gamma-1)} = 18{,}8\times 10^3\,K\,. \qquad (8) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Молярная теплоемкость идеального газа определяется выражением

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \qquad (9) \quad (0.5 \text{ балла})$$

а работа, совершаемая газом, равна изменению внутренней энергии газа, взятой с обратным знаком

$$A_2 = -\Delta U = -\nu C_V (T_2 - T_0)\,, \qquad (10) \quad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$A_2 = \frac{4\pi}{3}\frac{P_0 r_{\min}^3}{\gamma-1}\left[\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{3(\gamma-1)} - 1\right]. \qquad (11) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Процесс 3. В изохорическом процессе работа газом не совершается

$$A_3 = 0. \qquad (12) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Работа, совершаемая над пузырьком, равна сумме работ газа во всех трех процессах, взятой с обратным знаком

$$A = -(A_1 + A_2 + A_3), \qquad (13) \quad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$A = -4\pi P_0 {r_{\min}}^3 \left(\ln\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right) + \frac{1}{3(\gamma-1)}\left[\left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{3(\gamma-1)} - 1\right]\right) = 3.84 * 10^{-9}\text{Дж} \qquad (14)\ (0.5 \text{ балла})$$

Задача 3 (8.0 балла)

Так как нагрузка представляет собой чисто активное сопротивление, то потребляемая мощность связана с действующими значениями тока и напряжения соотношением

$$P = U_0 I, \qquad (1) \quad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$I = \frac{P}{U_0} = 2000A. \qquad (2) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Площадь поперечного сечения кабеля равна

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad (3) \quad (0.5 \text{ балла})$$

а его сопротивление вычисляется по формуле

$$R = \rho\frac{l}{S} = 4\rho\frac{l}{\pi d^2}. \qquad (4) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Следовательно, мощность тепла, выделяющегося в проводе, равна по закону Джоуля-Ленца

$$P_0 = I^2 R = \left(\frac{P_0}{U}\right)^2 R = 79.2 MBm. \qquad (5) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Величина индукции магнитного поля на некотором расстоянии от провода определяется законом о циркуляции магнитного поля, открытым Ампером

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \qquad (6) \quad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (7) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Согласно закону Фарадея э.д.с. индукции, наводимой в контуре кабелем, определяется выражением

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (8) \quad (0.5 \text{ балла})$$

где Φ − поток магнитного поля через сечение контура.

Величина потока находится простым интегрированием

$$\Phi = \int_{h-a}^{h} Bbdr. \qquad (9) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Подставляя (7) в (9), определяем, что

$$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(\frac{h}{h-a}\right). \qquad (10) \quad (0.5 \text{ балла})$$

Учитывая, что ток в кабеле меняется по закону $I = I_0 \sin \omega t$, получаем для э.д.с. индукции выражение

$$\varepsilon = -N \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \omega \ln\left(\frac{h}{h-a}\right) \cos \omega t . \qquad (11) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Таким образом, действующее значение э.д.с. и тока связаны соотношением

$$\varepsilon_{\partial} = N \mu_0 I_{\partial} b \nu \ln\left(\frac{h}{h-a}\right), \qquad (12) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$N = \frac{\varepsilon_{\partial}}{\mu_0 I_{\partial} b \nu \ln\left(\frac{h}{h-a}\right)} = 7737 . \qquad (13) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Индуктивность добавляет компоненту к полному электрическому току, которая колеблется в противофазе с напряжением. Эта компонента не участвует в передаче мощности, поэтому компонента мощности, колеблющаяся в фазе с напряжением, также остается без изменения. Это означает, что сила тока в подводящих кабелях возрастает, а значит и увеличивается теряемая в них мощность. (0.5 балла)

Сила тока в катушке должна компенсировать силу тока в конденсаторе, а так как напряжение на них одинаково, то это только возможно при выполнении условия

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \qquad (14) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда находим необходимое значение емкости конденсатора

$$C = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 L} = 28.1 мк\Phi . \qquad (15) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Задача 4 (5.0 балла)

Необходимо, чтобы на гранях куба выполнялись условия

$$\sin(k_x L) = 0 , \qquad (1) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда следует, что

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}, \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

где n_x − некоторое целое число. Аналогичные соотношения справедливы для k_y и k_z.

Таким образом, все квантовые состояния отстоят друг от друга на расстоянии π / L по всем трем направлениям осей координат, а значит на одно квантовое состояние приходится объем, равный

$$V_0 = \frac{\pi^3}{L^3} . \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Тогда полное число состояний в объеме s есть

$$N = \frac{s}{V_0} = \frac{sL^3}{\pi^3} . \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Так как энергия фотона дается выражением

$$E = \hbar\omega, \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

то для выполнения условия $E < k_B T$ требуется, чтобы

$$|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \le \frac{k_B T}{\hbar c}, \qquad (6) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

что соответствует шару радиуса $k_B T / \hbar c$ в пространстве состояний.

Рассмотрим сферический слой в пространстве состояний, заключенный между сферическими поверхностями с радиусами k и $k+dk$ соответственно. Объем этого слоя в пространстве состояний равен

$$ds = 4\pi k^2 dk\,, \qquad (7) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

а энергия каждого фотона в нем $E = \hbar\omega = \hbar ck$.

Число фотонов в слое согласно (4) равно

$$dN = \frac{s}{V_0} = \frac{L^3}{\pi^3} ds\,, \qquad (8) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

а значит их полная энергия

$$dE = dN\hbar ck = \frac{4}{\pi^2}\hbar c L^3 k^3 dk\,. \qquad (9) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Так как k может изменяться в пределах от нуля до $k_{\max} = k_B T / \hbar c$ (смотрите формулу (6)), то полная энергия определяется выражением

$$E = \int_0^{k_{\max}} dE = \frac{k_B^4}{\pi^2\hbar^3 c^3} T^4 L^3\,. \qquad (10) \qquad (0.5 \text{ балла})$$