Решение задач. 10 класс.

Задача 1 (8.0 балла)

Известно, что момент инерции доски равен

$$I = \frac{1}{12} ML^2 . \qquad (1) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Так как угол θ мал, а центростремительным ускорением можно пренебречь, то сила реакции между доской и телом практически равна

$$N = mg , \qquad (2) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

а значит момент сил, действующих на доску равен

$$\tau = mgx . \qquad (3) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Таким образом, угловое ускорение доски равно

$$\alpha = -\frac{mg}{I} x . \qquad (4) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

С другой стороны, линейное ускорение тела вдоль доски легко находится и равно

$$a = g \sin\theta \approx g\theta . \qquad (5) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Изначально сказано, что система совершает гармонические колебания, поэтому можно предположить, что

$$x = \frac{L}{2} \cos\omega t , \qquad (6) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$\theta = \theta_0 \cos\omega t . \qquad (7) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Подставляя (6) и (7) в (4) и (5) соответственно, получим систему равнений

$$\frac{L}{2}\omega^2 = g\theta_0 , \qquad (8) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$\theta_0 \omega^2 = \frac{mgL}{2I} . \qquad (9) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Решая совместно (8) и (9), находим

$$\theta_0 = \sqrt{3\frac{m}{M}} , \qquad (10) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{L}\sqrt{\frac{3m}{M}} . \qquad (11) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Деля почленно (6) на (7) и используя (10), получим

$$k = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{M}{3m}} . \qquad (12) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

В уравнении движения для тела мы пренебрегли центростремительным ускорением, которое примерно равно

$$a_c = x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = x\theta_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t , \qquad (13) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

а полное ускорение

$$a = -\omega^2 x . \qquad (14) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Используя (13) и (14) совместно с (10), получаем

$$\frac{a_c}{a} = \theta_0^2 \sin^2 \omega t . \qquad (15) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Максимум в (15) достигается, когда синус равен плюс или минус единице и равен

$$\left(\frac{a_c}{a}\right)_{\max} = \frac{3m}{M} \ll 1 . \qquad (16) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Задача 2. (5.5 балла)

Графически, процесс выглядит следующим образом: изотерма – адиабата – изотерма – изохора.

Рассмотрим изотермический процесс А. для него справедливы следующие соотношения

$$V_1 = \frac{1}{4}V_0, \qquad (1) \qquad (0.5\ балла)$$

$$P_1V_1 = P_0V_0. \qquad (2) \qquad (0.5\ балла)$$

Работа, совершенная газом в изотермическом процессе равна

$$A = \nu RT \ln\frac{V_1}{V_0} = -6866\,Дж. \qquad (3) \qquad (0.5\ балла)$$

Рассмотрим адиабатический процесс Б.

Уравнение адиабаты

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}, \qquad (4) \qquad (0.5\ балла)$$

где показатель адиабаты для двухатомного идеального газа равен

$$\gamma = \frac{7}{5}. \qquad (5) \qquad (0.5\ балла)$$

Из уравнения состояния идеального газа находим начальный объем

$$V_0 = \frac{\nu RT_0}{p_0} = 0.0490\,м^3. \qquad (6) \qquad (0.5\ балла)$$

откуда

$$V_1 = \frac{1}{4}V_0 = 0.0123\,м^3. \qquad (7) \qquad (0.5\ балла)$$

Учитывая, что $T_1 = T_0$ и $V_2 = V$, а температура в конце процесса В совпадает с температурой в его начале, находим

$$T_2 = T_0\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 275K. \qquad (8) \qquad (0.5\ балла)$$

Минимальное давление достигается в конце второго адиабатического процесса. В этой точке температура равна

$$V_3 = V_0, \qquad (9) \qquad (0.5\ балла)$$

$$T_3 = T_2, \qquad (10) \qquad (0.5\ балла)$$

тогда из уравнения идеального газа получаем

$$p_{min} = \frac{\nu RT_2}{V_0} = 93.3 \times 10^3 Па \qquad (11) \qquad (0.5\ балла)$$

Задача 3. (9.5 балла)

Движение стержня вызывает появление э.д.с. индукции, величина которой определяется выражением

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = Bl\text{v}. \qquad (1) \qquad (0.5\ балла)$$

Для того, чтобы в замкнутой цепи протекал ток $I = 5A$, должно выполняться условие

$$\varepsilon = IR, \qquad (2) \qquad (0.5\ балла)$$

откуда находим минимальную скорость

$$v_{\min} = \frac{IR}{Bl} = 3.47\,м/с, \qquad (3) \qquad (0.5\ балла)$$

При движении стержня на него действует сила тяжести

$$F = mg, \qquad (4) \qquad (0.5\ балла)$$

которая компенсируется силой Ампера

$$F_A = BIl\,. \qquad (5) \qquad (0.5 балла)$$

Отсюда получаем минимальную массу стержня, равную

$$m_{\min} = \frac{BIl}{g} = 0.18 кг\,, \qquad (6) \qquad (0.5 балла)$$

Запишем уравнение движения в проекции на вертикальную ось, направленную вниз. Имеем

$$m\frac{dv}{dt} = mg - BIl\,, \qquad (7) \qquad (0.5 балла)$$

где сила тока определяется законом Ома

$$I = \frac{Bl\mathrm{v}}{R}\,, \qquad (8) \qquad (0.5 балла)$$

Подставляя (8) в (7). Получаем

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = g - \frac{B^2 l^2}{mR}\mathrm{v}\,. \qquad (9) \qquad (0.5 балла)$$

Решением уравнения (9) с начальным условием $\mathrm{v}(0) = 0$ является функция

$$\mathrm{v}(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR}t\right)\right]. \qquad (10) \qquad (0.5 балла)$$

Напряженность электрического поля на поверхности предохранителя равна

$$E = \frac{V}{L} = \frac{IR_f}{L}\,, \qquad (11) \qquad (0.5 балла)$$

где сопротивление предохранителя определяется выражением

$$R_f = \rho_f \frac{L}{\pi r^2}\,. \qquad (12) \qquad (0.5 балла)$$

Отсюда

$$E = \frac{V}{L} = \frac{I\rho_f}{\pi r^2}\,. \qquad (13) \qquad (0.5 балла)$$

Величина индукции магнитного поля на поверхности провода определяется теоремой о циркуляции, которая дает

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,. \qquad (14) \qquad (0.5 балла)$$

У поверхности предохранителя магнитное и электрические поля перпендикулярны друг другу, Вектор Пойнтинга направлен внутрь проводника и равен

$$S = \frac{\rho_f I^2}{2\pi^2 r^3}\,, \qquad (15) \qquad (1.0 балла)$$

По закону сохранения энергии мощность электромагнитной энергии (15) рассеивается в виде теплового излучения, мощность которого определяется законом Стефана-Больцмана, то есть

$$\sigma T^4 = \frac{\rho_f I^2}{2\pi^2 r^3}\,, \qquad (16) \qquad (0.5 балла)$$

откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{\rho_f I^2}{2\pi^2 \sigma T^4}} = 0.35 мм\,. \qquad (17) \qquad (1.0 балла)$$

Задача 4. (7.0 балла)

Спустя очень большое время установится равновесное распределение зарядов. Так как в проводнике имеется огромное количество свободных зарядов, то электрическое поле внутри него должно быть равно нулю

$$E_0 = 0\,. \qquad (1) \qquad (0.5 балла)$$

Известно, что в установившемся режиме индуцированные заряды будут располагаться на поверхностях. Заряды, расположенные на сферических поверхностях, не дают вклада в напряженность поля внутри, поэтому

$$E_{in} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}. \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Пусть на внутренней поверхности индуцируется заряд q'. Найдем его величину. Применим теорему Гаусса для пробной поверхности, проведенной внутри проводящего слоя. Тогда

$$\oint \vec{E}_0 d\vec{S} = \frac{q_0 + q'}{\varepsilon_0} = 0. \qquad (3) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

так как согласно (1) $E_0 = 0$. Отсюда

$$q' = -q_0. \qquad (4) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

На внешней поверхности будет индуцирован заряд q'', который находится из закона сохранения заряда при условии, что изначально сферический слой не заряжен, то есть

$$q' + q'' = 0, \qquad (5) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

откуда

$$q'' = q_0. \qquad (6) \qquad (0.25 \text{ балла})$$

Таким образом, электрической поле данной системы во внешнем пространстве эквивалентно полю точечного заряда q_0, поэтому напряженность поля вблизи внешней поверхности равна

$$E_{out} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 b^2}. \qquad (7) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Возьмём поверхность внутри оболочки

$$\varepsilon_0 E_0 4\pi r^2 = q_0 - q''$$

Так как $E_0 = 0$, а $q'' = q_0$, а значит

$$\sigma_{out} = \frac{q_0}{4\pi b^2} \qquad (8) \qquad (0.25 \text{ балла})$$

Пусть на внутренней поверхности индуцируется заряд $q(t)$, тогда напряженность электрического поля внутри сферического поля на расстоянии r от центра равна

$$E = \frac{q - q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (9) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

что вызывает появление плотности электрического тока

$$j = \frac{1}{\rho} E. \qquad (10) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Тогда величина электрического тока, протекающего внутри сферического слоя, равна

$$I = j 4\pi r^2 = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho\varepsilon_0}(q_0 - q(t)). \qquad (11) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

С другой стороны, сила тока ответственна за зарядку поверхностей, поэтому

$$I = \frac{dq(t)}{dt}. \qquad (12) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

Приравнивая (10) и (11), получаем уравнение

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{\rho\varepsilon_0}(q_0 - q(t)), \qquad (13) \qquad (0.5 \text{ балла})$$

решением которого является функция

$$q(t) = q_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\rho\varepsilon_0}\right)\right]. \qquad (14) \qquad (1.0 \text{ балла})$$