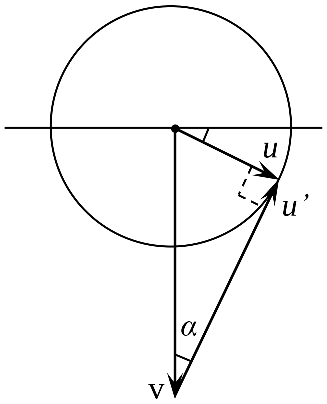
Решение задач. 9 класс.

Задача 1. Апокалипсис-1 (8 баллов)

Часть А. Цунами (3 балла)



Рассмотрим движение человека в системе отсчета, связанной с фронтом цунами. Пусть u' - скорость человека в этой системе отсчета. Тогда

$$\vec{u} = \vec{\mathrm{v}} + \vec{u}', \qquad (1) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

то есть три вектора образуют треугольник, показанный на рисунке.

Для того, чтобы избежать цунами угол α должен быть максимальным. Из рисунка легко понять, что он максимален, когда треугольник векторов прямоугольный. Значит

$$\sin\alpha = \frac{u}{\mathrm{v}}. \qquad (2) \qquad (1{,}0 \text{ балл})$$

С другой стороны из геометрии очевидно, что

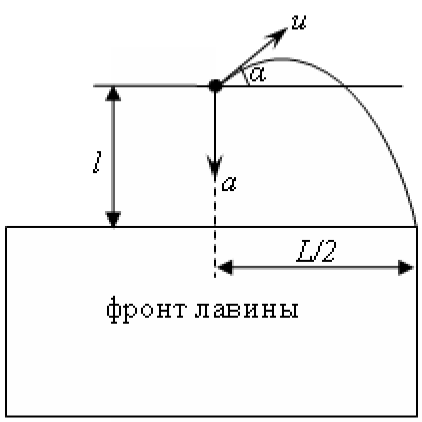
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2l}{L}. \qquad (3) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Из (2) и (3), находим

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{2l}{L}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

$$u_{\min} = \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{2l}\right)^2}} = 17.7 \text{км/ч} \approx 18 \text{км/ч}. \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Часть В. Лавина (3 балла)



Снова рассмотрим движение человека в системе отсчета, связанной с лавиной. В этой системе отсчета лавина неподвижна, а человек движется с постоянным ускорением a, а значит его движение вполне аналогично движению тела, брошенного под углом к горизонту, в поле тяжести Земли.

Скорость человека будет минимальной, когда его траектория коснется края фронта лавины. Отсюда получаем

$$\frac{L}{2} = u\cos\alpha t, \qquad (1) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

$$-l = u\sin\alpha t - \frac{at^2}{2}, \qquad (2) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

где t - время движения.

Исключая t из уравнений (1) и (2), получим следующее квадратное уравнение

$$\frac{aL^2}{8u^2}\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{L}{2}\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{aL^2}{8u^2} - l\right) = 0. \qquad (3) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Для того, чтобы это квадратное уравнение имело решение, надо чтобы его дискриминант был больше нуля, то есть

$$\frac{L^2}{4} - 4\frac{aL^2}{8u^2}\left(\frac{aL^2}{8u^2} - l\right) \ge 0. \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Из (5) можно убедиться, что минимальное значение скорости достигается при знаке равенства, откуда находим

$$u_{\min} = \sqrt{al\left(\sqrt{\left(\frac{L}{2l}\right)^2 + 1} - 1\right)} = 7{,}7 \text{ м/с}, \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

а значит соответствующее значение угла определяется из (4)

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{2l}{L}\left(\sqrt{\left(\frac{L}{2l}\right)^2+1}-1\right)\right) = 0.23\,рад = 13.3°. \qquad (6) \qquad (0,5 балла)$$

Часть С. Черная дыра (2 балла)

Из рисунка следует, что тангенс угла между направлением скорости и направлением на черную дыру равен

$$tg\beta = \frac{v_t}{v_r} = \frac{\beta(R/2)^2}{\alpha/(R/2)} = \frac{\beta R^3}{8\alpha}. \qquad (1) \qquad (0,5 балла)$$

Радиальная скорость равна

$$v_r = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\alpha}{r}, \qquad (2) \qquad (0,5 балла)$$

откуда

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} r\Delta r. \qquad (3) \qquad (0,5 балла)$$

Здесь Δr и Δt - малые интервалы по радиусу и времени.

Так как коэффициент пропорциональности в (3) пропорционален расстоянию, то для определения времени достаточно вычислить среднее значение и умножить на интервал изменения расстояния, откуда

$$t = \frac{1}{\alpha}\frac{\left(R+\frac{R}{2}\right)}{2}\left(R-\frac{R}{2}\right) = \frac{3R^2}{8\alpha}. \qquad (4) \qquad (0,5 балла)$$

Задача 2. Апокалипсис-2 (8 баллов)

1) Большая полуось орбиты астероида равна

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min}+r_{\max}) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)R. \qquad (1) \qquad (0,5 балла)$$

Полная энергия астероида в поле тяготения Солнца определяется большой полуосью

$$E = -G\frac{M_C m}{2a}, \qquad (2) \qquad (0,5 балла)$$

где M_C - масса Солнца, m - масса астероида.

Пусть скорость v - искомая скорость. Она найдется из закона сохранения энергии

$$E = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - G\frac{M_C m}{R}. \qquad (3) \qquad (0,25 балла)$$

Так как орбитальная скорость Земли определяется выражением

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_C}{R}}, \qquad (4) \qquad (0,25 балла)$$

то решая совместно (1)-(4), получим

$$v = v_0\sqrt{2[1-(\alpha+\beta)^{-1}]} = 34.5 \text{ км/с}. \qquad (5) \qquad (0,5 балла)$$

2) Найдем скорость астероида, например, в перигелии v_p. Полная энергия в перигелии равна

$$E = \frac{mv_p^2}{2} - G\frac{M_C m}{\beta R}. \qquad (6) \qquad (0,5 балла)$$

Решая совместно (2), (4) и (6), находим

$$v_p = v_0\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}}. \qquad (7) \qquad (0,5 балла)$$

Закон площадей или второй закон Кеплера (или равенство моментов, для тех кто знает) записывается в виде

$$v_t R = v_p \beta R\,, \qquad (8) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

где v_t - искомая тангенциальная скорость.

Отсюда

$$v_t = v_p \beta = v_0 \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = 30.2 \text{ км/с}. \qquad (9) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

Радиальная компонента находится по теореме Пифагора

$$v_r = \sqrt{v^2 - v_t^2} = v_0 \sqrt{\frac{2(\alpha-1)(1-\beta)}{(\alpha+\beta)}} = 16.7 \text{ км/с}. \qquad (10) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

3) Искомые компоненты получаются вычитанием орбитальной скорости Земли, которая направлена тангенциально. Таким образом,

$$u_r = v_r = 16.7 \text{ км/с}, \qquad (11) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

$$u_t = v_t - v_0 = 0.2 \text{ км/с}. \qquad (12) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

4) Когда астероид приближается к Земле с большого расстояния, он имеет кинетическую энергию

$$E_0 = \frac{m(u_r^2 + u_t^2)}{2}\,, \qquad (13) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

а его потенциальная энергия в поле тяготения Земли равна 0.

Полная энергия астероида на высоте h от Земли будет равна

$$E = \frac{mw^2}{2} - G\frac{M_E m}{(R_E + h)}\,, \qquad (14) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

где M_E и R_E - масса и радиус Земли соответственно.

По закону сохранения

$$E = E_0. \qquad (15) \qquad (0,25 \text{ балла})$$

Принимая во внимание то, что

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2}. \qquad (16) \qquad (0,25 \text{ балла})$$

Отсюда находим скорость астероида при входе в атмосферу Земли

$$w = \sqrt{u_t^2 + u_r^2 + 2g\frac{R_E^2}{R_E + h}} = 20.0 \text{ км/с}. \qquad (17) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

Задача 3. Адские стержни (7 баллов)

1) По известному закону теплового расширения тел длина стержней определяется выражениями

$$l_1 = l_0\left[1 + \alpha(T_1 - T_0)\right], \qquad (1) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

$$l_2 = l_0\left[1 + \alpha(T_2 - T_0)\right], \qquad (2) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

2) Теплоемкость меняется с температурой по линейному закону, значит количество теплоты можно найти как среднее значение теплоемкости умноженное на изменение температуры. Значит, уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$\beta\frac{(T_1 + T)}{2}(T - T_1) = \beta\frac{(T_2 + T)}{2}(T_2 - T)\,, \qquad (3) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

откуда

$$T = \sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2}}\,. \qquad (4) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

3) Окончательная длина стержней равна

$$l = l_0\left[1 + \alpha(T - T_0)\right], \qquad (5) \qquad (0,25 \text{ балла})$$

тогда разница длин стержней после и до соединения равна

$$\Delta l = 2l - l_1 - l_2\,, \qquad (6) \qquad (0,25 \text{ балла})$$

откуда

$$\Delta l = l_0\alpha\left[\sqrt{2(T_1^2+T_2^2)}-T_1-T_2\right]. \qquad (7) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

Отсюда заключаем, что

$$\Delta l > 0, \qquad (8) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

так как из $\sqrt{2(T_1^2+T_2^2)}-T_1-T_2>0$ следует верное равенство $(T_1-T_2)^2>0$.

4) Рассмотрим маленький участок стержня, имеющего длину Δx_0 при температуре T_0. Пусть координата этого участка равна x_0, тогда его длина после нагрева равна

$$\Delta x = \Delta x_0\left[1+\alpha(T(x_0)-T_0)\right]. \qquad (9) \qquad (1{,}0\ \text{балл})$$

В квадратных скобках стоит линейная функция, а значит длину можно найти как среднее то значений температур на концах, разбив стержень на две части

$$l=\frac{2}{10}l_0\frac{\left[1+\alpha(T_0-T_0)\right]+\left[1+\alpha(3T_0-T_0)\right]}{2}+$$

$$+\frac{8}{10}l_0\frac{\left[1+\alpha(3T_0-T_0)\right]+\left[1+\alpha(2T_0-T_0)\right]}{2}=l_0\left[1+\frac{7}{5}\alpha T_0\right]. \qquad (10) \qquad (1{,}0\ \text{балл})$$

5) Теплоемкость линейно зависит от температуры, поэтому уравнение теплового баланса в данном случае имеет вид

$$\frac{2}{10}2T_0\left(\frac{\alpha T_0+3\alpha T_0}{2}\right)-\frac{2}{10}\alpha T\frac{T}{2}=\frac{8}{10}\alpha T\frac{T}{2}-\frac{8}{10}T_0\left(\frac{2\alpha T_0+3\alpha T_0}{2}\right), \qquad (11) \qquad (1{,}0\ \text{балл})$$

где опять проведено мысленное разбитие стержня на две части.

Из (11) находим

$$T=2\sqrt{\frac{7}{5}}T_0. \qquad (12) \qquad (1{,}0\ \text{балл})$$

Задача 4. Адский мостик (7 баллов)

Так как ток через амперметр равен нулю, это приводит к следующим выводам. Напряжения на элементе X_1 и сопротивлении R_2 равны. Аналогично, Напряжения на элементе X_2 и сопротивлении R_1 равны. То есть

$$U_{X_1}=U_{R_2}, \qquad (1) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

$$U_{X_2}=U_{R_1}. \qquad (2) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

С другой стороны, равны токи через элемент X_1 и сопротивление R_1, а также через элемент X_2 и сопротивление R_2

$$I_{X_1}=I_{R_1}=I, \qquad (3) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

$$I_{X_2}=I_{R_2}=I'. \qquad (4) \qquad (0{,}25\ \text{балла})$$

1) Пусть в качестве X_1 подключено сопротивление R, а в качестве X_2 - сопротивление R_X. По закону Ома с учетом (1)-(4), получаем

$$U_{X_1}=IR=I'R_2, \qquad (5) \qquad (0{,}5\ \text{балла})$$

$$U_{X_2}=I'R_X=IR_1. \qquad (6) \qquad (0{,}5\ \text{балла})$$

Перемножая уравнения (5) и (6), получим

$$RR_X=R_1R_2, \qquad (7) \qquad (0{,}5\ \text{балла})$$

откуда

$$R_X=\frac{R_1R_2}{R}=\frac{1}{10}\,.\text{Ом} \qquad (8) \qquad (0{,}5\ \text{балла})$$

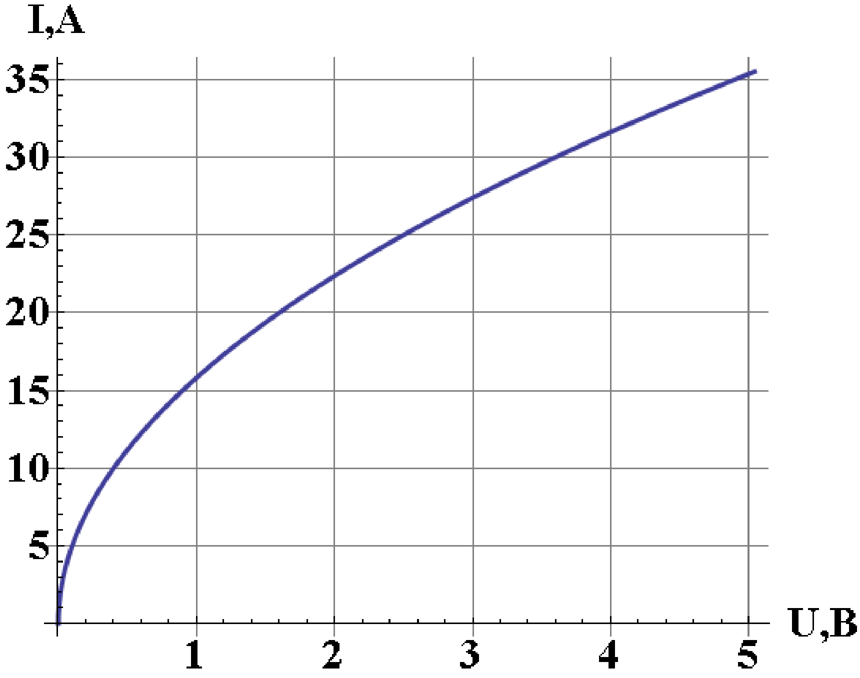
2) Пусть на элементе X_1 падение напряжения равно $U_{X_1} = U$, тогда сила тока в нем $I(U)$ дается вольтамперной характеристикой. Из (2) следует, что падение напряжения на элементе X_2 равно

$$U_{X_2} = I(U)R_1, \qquad (9) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

а сила тока в нем

$$I_{X_2} = I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{U}{R}. \qquad (10) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Формулы (9) и (10) позволяют построить вольтамперную характеристику элемента X_2 по вольтамперной характеристике элемента X_1. Результат представлен на рисунке ниже:



Вольтамперная характеристика элемента X_2 (3 балла)