Решение задач. 11 класс
Задача 1. Шар на столе (8 баллов)

1) Пусть скорость тела в нижней точке равна u, а скорость шара равна v. Так как трение между шаром и телом, а также между шаром и столом отсутствует, то шар вращаться не будет.

По закону сохранения импульса в проекции на горизонталь

$$mu = M\mathrm{v}, \qquad (1) \quad (1\ балл)$$

а по закону сохранения энергии

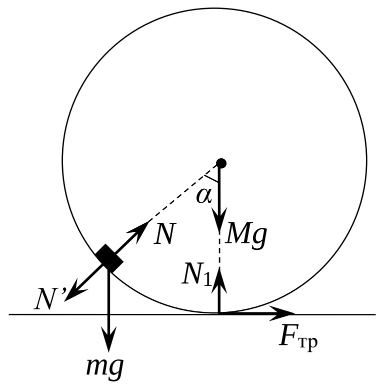
$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (2) \quad (1\ балл)$$

Решая совместно (1) и (2), находим

$$u = \sqrt{\frac{2MgR}{(M+m)}}, \qquad (3) \quad (0{,}5\ балла)$$

$$\mathrm{v} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{(M+m)}}, \qquad (4) \quad (0{,}5\ балла)$$

2) Рассмотрим силы, действующие на тело и шар, они изображены на рисунке. На тело действуют сила тяжести mg и реакция со стороны шара N. На шар действуют сила тяжести Mg, сила реакции стола N_1, сила трения $F_{тр}$ и сила давления со стороны тела $N' = -N$. Запишем уравнения движения в проекции на горизонтальное направление. Для тела имеем



$$ma_x = N\sin\alpha, \qquad (5) \quad (0{,}1\ балла)$$

где a_x - проекция ускорения тела на горизонтальное направление.

Для шара уравнение движения центра масс с ускорением w запишется так

$$Mw = N\sin\alpha - F_{тр}. \qquad (6) \quad (0{,}2\ балла)$$

Так как шар двигается по столу без проскальзывания, то его угловое ускорение равно

$$\varepsilon = w/R. \qquad (7) \quad (0{,}2\ балла)$$

Тогда уравнение вращательного движения шара вокруг центра масс имеет вид

$$I\varepsilon = F_{тр}R, \qquad (8) \quad (0{,}2\ балла)$$

где момент инерции полого шара равен

$$I = \frac{2}{3}MR^2. \qquad (9) \quad (0{,}2\ балла)$$

Решая совместно (6)-(9), находим

$$\frac{5}{3}Mw = N\sin\alpha. \qquad (10) \quad (0{,}5\ балла)$$

Из уравнений (5) и (10) заключаем, что

$$ma_x = \frac{5}{3}Mw. \qquad (11) \quad (0{,}5\ балла)$$

Так как начальные скорости тела и шара равны нулю, то из (11) получаем тоже самое соотношение для скоростей в нижней точке (для тех кто знает, интегрируем!)

$$mu = \frac{5}{3}M\mathrm{v}. \qquad (12) \quad (1\ балл)$$

Запишем закон сохранения энергии с учетом вращательного движения шара в виде

$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\mathrm{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (13) \quad (1\ балл)$$

а угловая скорость вращения шара равна

$$\omega = \mathrm{v}/R, \qquad (14) \qquad (0,1 балла)$$

так как он не проскальзывает.

Решая систему (11)-(14), окончательно получаем

$$u = \sqrt{\frac{10MgR}{(3m+5M)}}, \qquad (15) \qquad (0,5 балла)$$

$$\mathrm{v} = \frac{3m}{5M}\sqrt{\frac{10MgR}{(3m+5M)}}, \qquad (16) \qquad (0,5 балла)$$

Задача 2. Калориметр в нанотехнологии (8 баллов)

1) Каждый мостик имеет тепловое сопротивление

$$R_0 = \frac{L}{\kappa S}, \qquad (1) \qquad (0,5 балла)$$

а тепловое сопротивление между калориметром и оболочкой

$$R = \frac{R_0}{4} = \frac{L}{4\kappa S}. \qquad (2) \qquad (0,5 балла)$$

2) По условию, в мембране выделяется мощность

$$P = P_0 \cos \omega t. \qquad (3) \qquad (0,5 балла)$$

Эта мощность затрачивается на изменение температуры мембраны

$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dT}{dt}, \qquad (4) \qquad (0,5 балла)$$

и на отвод тепла через мостики

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_м = \frac{T - T_0}{R}. \qquad (5) \qquad (0,5 балла)$$

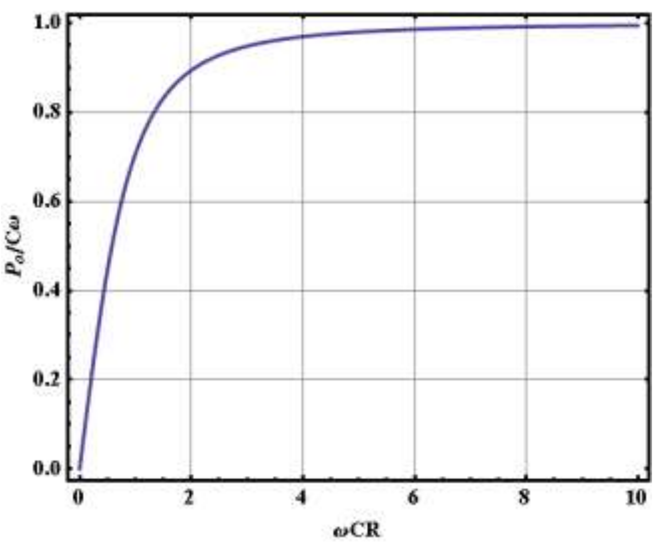
То есть, получаем уравнение теплового баланса

$$P_0 \cos \omega t = C\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_0}{R}. \qquad (6) \qquad (0,5 балла)$$

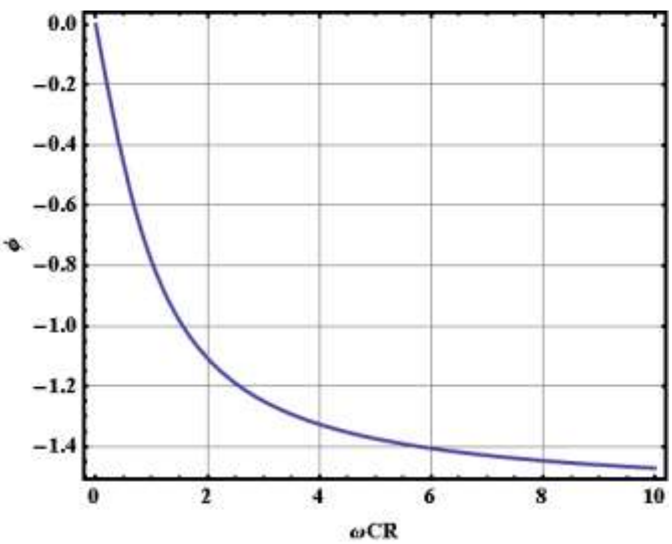
Подставляя в уравнение (6) $T(t) = T_0 + \Delta T \sin(\omega t + \phi)$, находим

$$\Delta T = \frac{P_0 R}{\sqrt{1 + (C\omega R)^2}}, \qquad (7) \qquad (0,5 балла)$$

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(-C\omega R\right). \qquad (8) \qquad (0,5 балла)$$



Амплитуда (0,5 балла)



Разность фаз (0,5 балла)

3) Амплитуда изменения температуры дается выражением (7). По условию эта амплитуда должна изменяться на как можно большую величину при маленьком изменении теплоемкости C, вызванном титановыми дисками. Очевидно, что для этого величина

$$\frac{d\Delta T}{dC} = -\frac{CP_0R^3\omega^2}{(1+C^2\omega^2R^2)^{3/2}} \qquad (9) \qquad \text{(0,5 балла)}$$

должна быть максимальной.

Значит, искомая частота найдется из условия

$$\frac{d}{dC}\left(\frac{d\Delta T}{dC}\right) = \frac{d^2\Delta T}{dC^2} = \frac{P_0R^3\omega^2(2C^2\omega^2R^2-1)}{(1+C^2\omega^2R^2)^{5/2}} = 0\,, \qquad (10) \qquad \text{(1 балл)}$$

откуда получается искомая частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}CR}\,. \qquad (11) \qquad \text{(0,5 балла)}$$

4) Температуру нельзя считать линейно меняющейся, если количество теплоты, содержащейся в мостиках

$$Q_1 = c\rho SL\Delta T \qquad (12) \qquad \text{(0,2 балла)}$$

станет сравнимым с количеством отводимого тепла за период времени

$$Q_2 = \frac{\Delta T}{R}\frac{1}{\omega_c}\,, \qquad (13) \qquad \text{(0,2 балла)}$$

то есть

$$Q_1 \sim Q_2\,. \qquad (14) \qquad \text{(0,3 балла)}$$

Отсюда немедленно получаем

$$\omega_c \sim \frac{1}{Rc\rho SL} = \frac{4\kappa}{c\rho L^2}\,. \qquad (15) \qquad \text{(0,3 балла)}$$

Задача 3. Выпрямление переменного тока (8 баллов)

1) Рассмотрим функционирование схемы с начального момента времени. После того, как напряжение источника достигнет значения 1В, диод откроется. При этом ток через резистор будет расти и одновременно конденсатор начнет заряжаться. Как только напряжение на резисторе достигнет значения

$$U_R = IR = 100\text{В} \qquad (1) \qquad \text{(0,5 балла)}$$

дальнейший рост напряжения должен прекратиться, иначе ток превысит заданное значение.

Значит амплитуда напряжения источника равна

$$U_0 = U_R + 1\text{В} = 101\,\text{В}. \qquad (2) \qquad \text{(0,7 балла)}$$

После этого диод закроется, так как конденсатор должен медленно разряжаться через сопротивление. При этом изменение напряжения на конденсаторе не должно успеть сильно уменьшиться, иначе изменится ток через резистор. Схематически график представлен на рисунке (масштаб изменения напряжения сильно увеличен).

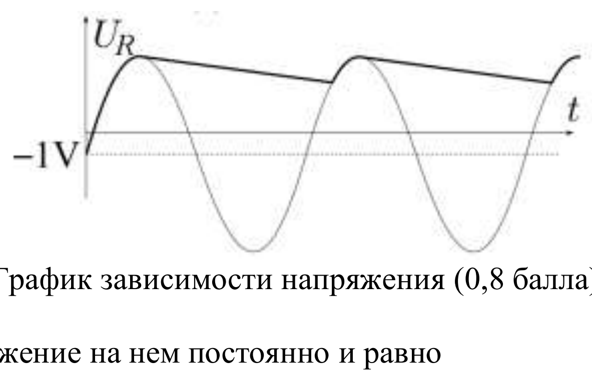


График зависимости напряжения (0,8 балла)

2) Когда диод открыт напряжение на нем постоянно и равно

$$U_д = 1\text{В}, \qquad (3) \qquad \text{(1 балл)}$$

а сила тока в среднем равна

$$I_д = I\,. \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Тогда средняя мощность, выделяемая на диоде за период, равна

$$P = U_д I_д = 1{,}0\times10^{-2}\,\text{Вт}. \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

3) Изменение напряжения на конденсаторе во время разрядки связано с изменением заряда на нем соотношением

$$\Delta U = \frac{\Delta q}{C}\,. \qquad (6) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Конденсатор разряжается практически постоянным током I в течении почти полного периода, так что изменение заряда на нем равно

$$\Delta q = IT = \frac{I}{\nu}\,. \qquad (7) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Изменение напряжение на конденсаторе определяет изменение силы тока на резисторе

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{I}{\nu CIR} = \frac{1}{\nu CR} \le 1\times10^{-4}\,, \qquad (8) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

откуда находим

$$C \ge \frac{10^4}{\nu R} = 2{,}0\times10^{-2}\,\text{Ф}. \qquad (9) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

4) Так как напряжение на диоде постоянно, то выделившееся на нем количество теплоты равно

$$Q = U_д q\,, \qquad (10) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

где q - заряд, протекший через диод в течении первого периода.

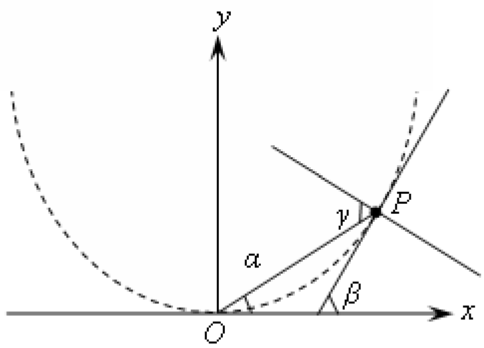
Заряд q частично накапливается на конденсаторе, а частично проходит через резистор

$$q \approx CIR + \int_0^{T/4} \frac{U_0 - U_д}{R}\sin\omega t\,dt = CIR + \frac{U_0 - U_д}{\omega R}\,, \qquad (11) \qquad (1 \text{ балл})$$

а значит средняя мощность, выделяемая на диоде за первый период равна

$$P = \frac{Q}{T} = \left(CIR\nu + \frac{U_0 - U_д}{2\pi R}\right)U_д \approx CIR\nu U_д = 100\,\text{Вт}. \qquad (12) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Задача 4. Невидимка (6 баллов)



Рассмотрим произвольную точку P на кривой и проведем к ней касательную. Известно, что касательная составит с осью x угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = 4ax^3\,. \qquad (1) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Луч, выйдя из точки расположения дефекта O, составит с той же осью угол, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = ax^3\,. \qquad (2) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Луч подойдет к точке P под некоторым углом γ, который геометрически определяется соотношением

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha)\,. \qquad (3) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Дефект не будет видимым, если выполнится условие полного внутреннего отражения

$$\sin\gamma \ge \frac{1}{n}\,. \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

С учетом (3) неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} \ge \frac{1}{n}\,. \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Подставляя (1) и (2), находим

$$f(x) = \frac{1+4a^2x^6}{\sqrt{1+a^2x^6}\sqrt{1+16a^2x^6}} \geq \frac{1}{n}. \qquad (6) \qquad (0,5 \text{ балла})$$

Функция $f(x)$ имеет минимум в точке

$$x_{\min} = \frac{1}{\sqrt[2]{2a}}, \qquad (7) \qquad (1 \text{ балл})$$

равный

$$f(x_{\min}) = \frac{4}{5}. \qquad (8) \qquad (1 \text{ балл})$$

Значит из (5) заключаем, что минимальный коэффициент преломления равен

$$n_{\min} = \frac{5}{4}. \qquad (9) \qquad (1 \text{ балл})$$