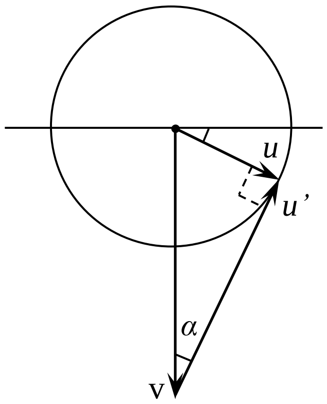
Решение задач. 10 класс.

Задача 1. Катастрофы (8 баллов)

Часть А. Цунами (3 балла)



Рассмотрим движение человека в системе отсчета, связанной с фронтом цунами. Пусть u' - скорость человека в этой системе отсчета. Тогда

$$\vec{u} = \vec{\mathrm{v}} + \vec{u}\,', \qquad (1) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

то есть три вектора образуют треугольник, показанный на рисунке.

Для того, чтобы избежать цунами угол α должен быть максимальным. Из рисунка легко понять, что он максимален, когда треугольник векторов прямоугольный. Значит

$$\sin\alpha = \frac{u}{\mathrm{v}}. \qquad (2) \qquad (1{,}0 \text{ балл})$$

С другой стороны из геометрии очевидно, что

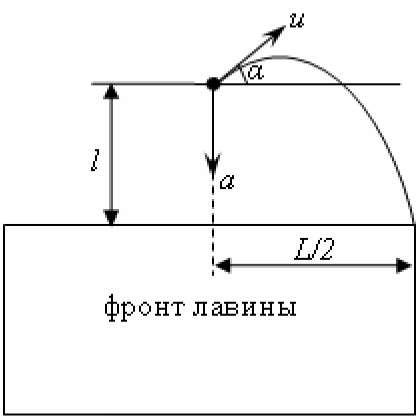
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2l}{L}. \qquad (3) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Из (2) и (3), находим

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{2l}{L}\right) = \frac{\pi}{4}, \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

$$u_{\min} = \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{2l}\right)^2}} = 17.7\text{км/ч} \approx 18\text{км/ч}. \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Часть В. Лавина (3 балла)



Снова рассмотрим движение человека в системе отсчета, связанной с лавиной. В этой системе отсчета лавина неподвижна, а человек движется с постоянным ускорением a, а значит его движение вполне аналогично движению тела, брошенного под углом к горизонту, в поле тяжести Земли.

Скорость человека будет минимальной, когда его траектория коснется края фронта лавины. Отсюда получаем

$$\frac{L}{2} = u\cos\alpha t, \qquad (1) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

$$-l = u\sin\alpha t - \frac{at^2}{2}, \qquad (2) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

где t - время движения.

Исключая t из уравнений (1) и (2), получим следующее квадратное уравнение

$$\frac{aL^2}{8u^2}\mathrm{tg}^2\alpha - \frac{L}{2}\mathrm{tg}\,\alpha + \left(\frac{aL^2}{8u^2} - l\right) = 0. \qquad (3) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Для того, чтобы это квадратное уравнение имело решение, надо чтобы его дискриминант был больше нуля, то есть

$$\frac{L^2}{4} - 4\frac{aL^2}{8u^2}\left(\frac{aL^2}{8u^2} - l\right) \ge 0. \qquad (4) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Из (5) можно убедиться, что минимальное значение скорости достигается при знаке равенства, откуда находим

$$u_{\min} = \sqrt{al\left(\sqrt{\left(\frac{L}{2l}\right)^2 + 1} - 1\right)} = 7{,}7\ \text{м/с}, \qquad (5) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

а значит соответствующее значение угла определяется из (4)

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{2l}{L}\left(\sqrt{\left(\frac{L}{2l}\right)^2+1}-1\right)\right)=0.89\,рад=51^\circ\,. \qquad (6) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

Часть С. Черная дыра (2 балла)

Из рисунка следует, что тангенс угла между направлением скорости и направлением на черную дыру равен

$$tg\beta=\frac{v_t}{v_r}=\frac{\beta(R/2)^2}{\alpha/(R/2)}=\frac{\beta R^3}{8\alpha}. \qquad (1) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

Радиальная скорость равна

$$v_r=\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{\alpha}{r}, \qquad (2) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

откуда

$$\Delta t=\frac{1}{\alpha}r\Delta r\,. \qquad (3) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

Здесь Δr и Δt - малые интервалы по радиусу и времени.

Так как коэффициент пропорциональности в (3) пропорционален расстоянию, то для определения времени достаточно вычислить среднее значение и умножить на интервал изменения расстояния, откуда

$$t=\frac{1}{\alpha}\frac{\left(R+\frac{R}{2}\right)}{2}\left(R-\frac{R}{2}\right)=\frac{3R^2}{8\alpha}. \qquad (4) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

Задача 2. Шар на столе (8 баллов)

1) Пусть скорость тела в нижней точке равна u, а скорость шара равна v. Так как трение между шаром и телом, а также между шаром и столом отсутствует, то шар вращаться не будет.

По закону сохранения импульса в проекции на горизонталь

$$mu=M\mathrm{v}, \qquad (1) \qquad (1\text{ балл})$$

а по закону сохранения энергии

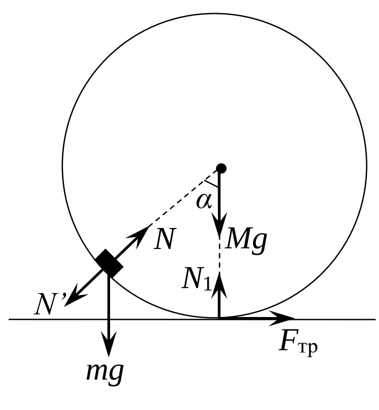
$$mgR=\frac{mu^2}{2}+\frac{M\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (2) \qquad (1\text{ балл})$$

Решая совместно (1) и (2), находим

$$u=\sqrt{\frac{2MgR}{(M+m)}}, \qquad (3) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

$$\mathrm{v}=\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{(M+m)}}, \qquad (4) \qquad (0{,}5\text{ балла})$$

2) Рассмотрим силы, действующие на тело и шар, они изображены на рисунке. На тело действуют сила тяжести mg и реакция со стороны шара N. На шар действуют сила тяжести Mg, сила реакции стола N_1, сила трения $F_{тр}$ и сила давления со стороны тела $N'=-N$. Запишем уравнения движения в проекции на горизонтальное направление. Для тела имеем



$$ma_x=N\sin\alpha\,, \qquad (5) \qquad (0{,}1\text{ балла})$$

где a_x - проекция ускорения тела на горизонтальное направление.

Для шара уравнение движения центра масс с ускорением w запишется так

$$Mw=N\sin\alpha-F_{тр}. \qquad (6) \qquad (0{,}2\text{ балла})$$

Так как шар двигается по столу без проскальзывания, то его угловое ускорение равно

$\varepsilon = w / R$. (7) (0,2 балла)

Тогда уравнение вращательного движения шара вокруг центра масс имеет вид

$I\varepsilon = F_{\text{тр}} R$, (8) (0,2 балла)

где момент инерции полого шара равен

$I = \frac{2}{3} MR^2$. (9) (0,2 балла)

Решая совместно (6)-(9), находим

$\frac{5}{3} Mw = N \sin\alpha$. (10) (0,5 балла)

Из уравнений (5) и (10) заключаем, что

$ma_x = \frac{5}{3} Mw$. (11) (0,5 балла)

Так как начальные скорости тела и шара равны нулю, то из (11) получаем тоже самое соотношение для скоростей в нижней точке (для тех кто знает, интегрируем!)

$mu = \frac{5}{3} M\text{v}$. (12) (1 балл)

Запишем закон сохранения энергии с учетом вращательного движения шара в виде

$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{M\text{v}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$, (13) (1 балл)

а угловая скорость вращения шара равна

$\omega = \text{v} / R$, (14) (0,1 балла)

так как он не проскальзывает.

Решая систему (11)-(14), окончательно получаем

$u = \sqrt{\frac{10MgR}{(3m + 5M)}}$, (15) (0,5 балла)

$\text{v} = \frac{3m}{5M} \sqrt{\frac{10MgR}{(3m + 5M)}}$, (16) (0,5 балла)

Задача 3. Пираты Карибского моря (6 баллов)

1) Давление на глубине H равно

$p_в = p_0 + \rho g H$, (1) (0,5 балла)

а значит сила давления воды на дно лодки

$F = p_в S = (p_0 + \rho g H) S = 2.0 \times 10^5$ Н. (2) (0,5 балла)

2) Так как температура известна, то для определения плотности достаточно знать давление воздуха внутри лодки. В начальном состоянии до опускания лодки в воду воздух имеет давление p_0 и занимает объем $V = Sh$. По уравнению состояния Клайперона-Клаузиуса

$p_0 Sh = \nu RT$, (3) (0,3 балла)

где ν - число молей.

Пусть при опускании лодки вверх дном вода зайдет внутрь лодки, так что воздух занимает некоторую высоту x, меньшую h. Тогда давление воздуха внутри лодки равно

$p = p_0 + \rho_0 g (H + x)$ (4) (0,2 балла)

и занимает объем

$V = Sx$. (5) (0,1 балла)

По уравнению состояния Клайперона-Клаузиуса

$(p_0 + \rho_0 g (H + x)) Sx = \nu RT$, (6) (0,3 балла)

Решая совместно (3) и (6), находим

$$x=\frac{H}{2}\left[\sqrt{\left(1+\frac{p_0}{\rho_0 gH}\right)^2+4\frac{p_0 h}{\rho_0 gH^2}}-1-\frac{p_0}{\rho_0 gH}\right], \qquad (7) \qquad (0{,}3 \text{ балла})$$

$$p=\frac{p_0}{2}\left[1+\frac{\rho_0 gH}{p_0}+\sqrt{\left(1+\frac{\rho_0 gH}{p_0}\right)^2+4\frac{\rho_0 gh}{p_0}}\right]. \qquad (8) \qquad (0{,}3 \text{ балла})$$

Отсюда находим плотность воздуха под лодкой

$$\rho_{air}=\frac{\mu p_0}{2RT}\left[1+\frac{\rho_0 gH}{p_0}+\sqrt{\left(1+\frac{\rho_0 gH}{p_0}\right)^2+4\frac{\rho_0 gh}{p_0}}\right]=2.4\,\text{кг/м}^3. \qquad (9) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

3) Рассмотрим баланс сил, действующих на пиратов и лодку. Пусть суммарная масса пиратов равна M и они тянут лодку вниз с некоторой силой F. Эта сила не может превысить веса пиратов

$$F_m=Mg \qquad (10) \qquad (0{,}2 \text{ балла})$$

за вычетом силы Архимеда

$$F_A=\rho_0 gV=Mg\frac{\rho_0}{\rho}, \qquad (11) \qquad (0{,}3 \text{ балла})$$

так как иначе пираты бы всплыли вместе с лодкой.

Таким образом

$$F=F_m-F_A=Mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right). \qquad (12) \qquad (0{,}2 \text{ балла})$$

Аналогично, на лодку действуют сила тяжести и сила Архимеда

$$F_{m1}=mg\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_\partial}\right), \qquad (13) \qquad (0{,}3 \text{ балла})$$

сила, вызванная разностью давлений на дно лодки снизу и сверху

$$F_0=(p-p_в)S \qquad (14) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

и, по третьему закону Ньютона, все та же сила F.

Окончательно

$$F_0=F_{m1}+F. \qquad (15) \qquad (0{,}5 \text{ балла})$$

Решая совместно составленные уравнения, получим

$$M=\frac{p_0 S}{g\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)}\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1+\frac{\rho_0 gH}{p_0}\right)^2+4\frac{\rho_0 gh}{p_0}}-1-\frac{\rho_0 gH}{p_0}\right]-1\right)-$$

$$-m\frac{\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_\partial}\right)}{\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)}=5.2\times10^2\,\text{кг}. \qquad (16) \qquad (1 \text{ балл})$$

Таким образом можно заключить, что ситуация в фильме не могла произойти в реальности, так как пиратов вытолкнула бы на поверхность сила Архимеда. Это и понятно, на практике мы знаем, что достаточно самого небольшого баллона с воздухом, чтобы спокойно плавать, без всякого риска утонуть.

Задача 4. Электрическая дилемма (8 баллов)

1) Полное сопротивление цепи равно

$$R_0=R_1+\frac{RR_2}{R+R_2}, \qquad (1) \qquad (0{,}1 \text{ балла})$$

а значит полный ток в цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0}. \qquad (2) \qquad (0,1 \text{ балла})$$

Сопротивления R и R_2 соединены параллельно, а значит

$$IR = I_2 R_2, \qquad (3) \qquad (0,1 \text{ балла})$$

$$I_0 = I + I_2, \qquad (4) \qquad (0,1 \text{ балла})$$

где I - ток через сопротивление R, I_2 - ток через сопротивление R_2.

Решая совместно (1)-(4), получим

$$I = \frac{U_0 R_2}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2}. \qquad (5) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

Подставляя минимальное и максимальное значения напряжения источника, получаем

$$I_{\min} = 0.25\,\text{А}, \qquad (6) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

$$I_{\max} = 3\,\text{А}. \qquad (7) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

2) Пусть I - ток через элемент X, а U - падение напряжения на нем. Тогда с одной стороны графическая связь между ними задается вольтамперной характеристикой

$$I = I(U). \qquad (8) \qquad (0,1 \text{ балла})$$

С другой стороны полный ток в цепи равен

$$I_0 = I + I_2 = I + \frac{U}{R_2}, \qquad (9) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

а значит напряжение источника

$$U_0 = U + I_0 R_1 = U + \left(I + \frac{U}{R_2}\right) R_1. \qquad (10) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

Уравнение (9) удобно переписать в виде

$$I = \frac{U_0}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (11) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

Уравнения (8) и (11) должны соблюдаться одновременно, а значит они представляют собой систему уравнений, которую удобно решать графически. Для этого на графике вольтамперной характеристики строим прямую (11), а точки пересечения являются корнями.

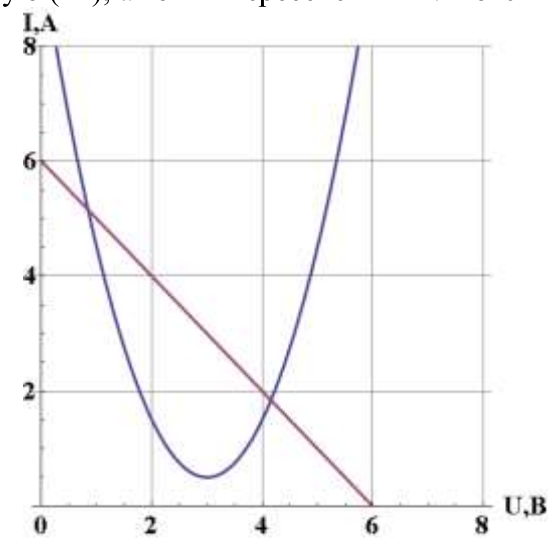


График для определения корней уравнения (0,6 балла)

В данном случае имеются два корня

$$I_1 \approx 5.2\,\text{А}, \qquad (12) \qquad (0,2 \text{ балла})$$

$I_2 \approx 4.2$ А. (13) (0,2 балла)

Первый из корней не является устойчивым, так как малейшее увеличение напряжения приводит к его дальнейшему росту и в конце концов устанавливается ток

$I \approx 1.8$ А. (14) (0,3 балла)

3) Аналогичные рассуждения, как в пункте 2, приводят к графику

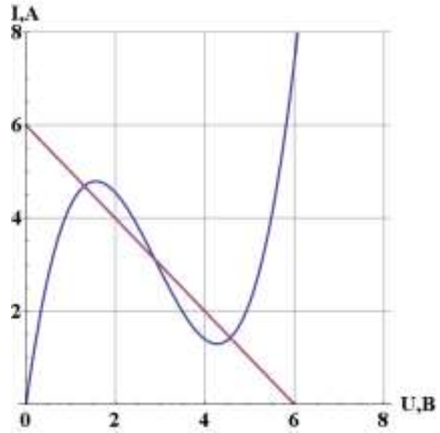


График для определения корней уравнения (0,8 балла)

из которого получаются три возможных корня

$I_1 \approx 4.7$ А, (15) (0,3 балла)

$I_2 \approx 3.1$ А. (16) (0,3 балла)

$I_3 \approx 1.4$ А. (17) (0,3 балла)

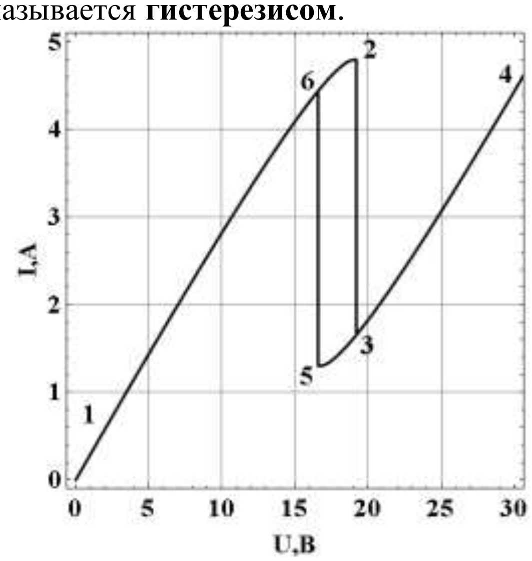
Устойчивыми являются только два корня, значит ток может быть равен

$I \approx 4.7$ А или $I \approx 1.4$ А. (18) (0,3 балла)

4) Необходимо повторить процесс построения, описанный в предыдущем пункте, несколько раз.

При постепенном увеличении напряжения источника сила тока сначала возрастает, проходя путь $1 \to 2$. Как было указано в пункте 3, ветвь с отрицательным наклоном на вольтамперной характеристике является неустойчивой. Поэтому при напряжении источника ≈ 19.1 В происходит скачок с одной устойчивой ветви характеристики на другую по пути $2 \to 3$. После этого происходит плавный рост тока вдоль пути $3 \to 4$.

При уменьшении напряжения наблюдается обратный процесс, сила тока проходит путь $4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 1$. Обратный $5 \to 6$ скачок происходит при напряжении порядка ≈ 16.6 В. Подобное явление в физике называется **гистерезисом**.



Петля гистерезиса на зависимости тока от напряжения (3 балла)