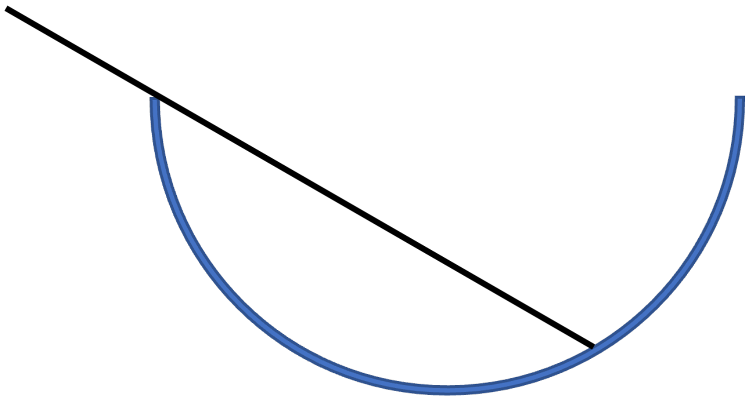
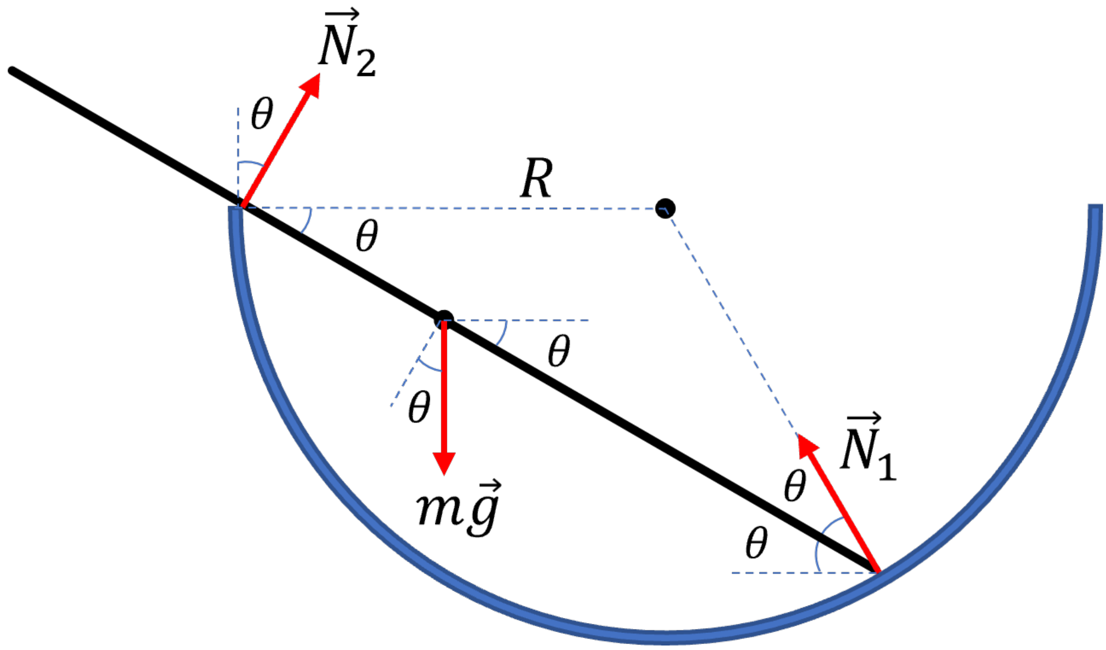
Қазақстан Білім Олимпиадасы Физика 1-тур [80 балл]
(шешуі және ұпайландыру/решение и разбалловка)

1-есеп. [10 балл] Ұзындығы 2R біркелкі таяқша радиусы R, қозғалмайтын, үйкеліссіз жарты шар тәрізді тостағанның ішіне орналастырылған. Тепе-теңдікте таяқша горизонтальмен θ бұрыш жасайды. Таяқша мен тостаған өте қатты, бірақ тостағанның шеті мен таяқшаның ұшы екеуі де сәл дөңгеленген, сондықтан олар жанасатын нүктелерде жақсы анықталған нормальді бағыт бар. θ-ны табыңыз.

Однородный стержень длиной 2R помещен внутрь неподвижной, лишенной трения полусферической чаши радиусом R. В равновесии стержень образует угол θ с горизонталью. Предположим, что стержень и чаша идеально жесткие, но край чаши и конец стержня слегка закруглены, так что в точках их соприкосновения имеется четко определенное нормальное направление. Найдите θ.



<u>Решение и разбалловка:</u>



Третий закон Ньютона, равновесие сил:

$$N_2 cos\theta + N_1 sin2\theta = mg \qquad (ф1.1)$$

$$N_2 sin\theta = N_1 cos2\theta \qquad (ф1.2)$$

Момент сил точки 1:

$$N_2 2Rcos\theta = mg\frac{2Rcos\theta}{2} \qquad (ф1.3)$$

Из ф1.3 мы находим:

$$N_2 = \frac{mg}{2} \qquad (ф1.4)$$

Из ф1.1, ф1.2 находим:

$$N_2 cos\theta + \frac{N_2 sin2\theta}{cos2\theta} sin\theta = mg$$

$$N_2 \frac{(cos2\theta cos\theta + sin2\theta sin\theta)}{cos2\theta} = mg$$

$$N_2 \frac{\cos(2\theta - \theta)}{cos2\theta} = mg$$

$$N_2 = \frac{mg}{cos\theta} cos2\theta \qquad (ф1.5)$$

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \qquad (ф1.6)$$

Из ф1.4, ф1.5, ф1.6 находим:

$$\frac{mg(cos^2\theta - sin^2\theta)}{cos\theta} = \frac{mg}{2}$$

$$2(2cos^2\theta - 1) = cos\theta$$

$$4cos^2\theta - cos\theta - 2 = 0 \qquad (ф1.7)$$

$$cos\theta = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \qquad (ф1.8)$$

$$\theta \approx 32{,}5° \qquad (ф1.9)$$

1-задача [10 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф1.1	$N_2 cos\theta + N_1 sin2\theta = mg$	1
ф1.2	$N_2 sin\theta = N_1 cos2\theta$	1
ф1.3	$N_2 2Rcos\theta = mg\frac{2Rcos\theta}{2}$ или такое уравнение	2
ф1.4	$N_2 = \frac{mg}{2}$ или N_1	1
ф1.5	$N_2 = \frac{mgcos2\theta}{cos\theta}$ или N_1	1
ф1.6	$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$	1
ф1.7	$4cos^2\theta - cos\theta - 2 = 0$	1
ф1.8	$cos\theta = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$	1
ф1.9	$\theta \approx 32{,}5°$	1

2-есеп. [10 балл] Сызықтық массалық тығыздығы λ біркелкі тізбектің ұшына бекітілген нүктелік массасы m ретінде грепплинг ілмегін модельдеңіз. Бастапқыда тізбек жерге еркін оралған. Содан кейін масса жерден тікелей жоғары қарай, бастапқы v_0 жылдамдығымен ұшырылады. Тізбек икемді, сондықтан масса y биіктікте болғанда, тізбектің y ұзындығы тікелей оның астында салбырап тұрады, ал тізбектің қалған бөлігі жерде тыныштықта қалады. Массаның жеткен максималды биіктігін табыңыз. Оны тізбектің ұзындығынан аз деп есептеңіз.

Смоделируйте крюк-кошку как точечную массу m, прикрепленную к концу однородной цепи с линейной плотностью массы λ. Первоначально цепь свободно намотана на землю. Затем массу запускают прямо вверх с земли с начальной скоростью v_0. Цепь гибкая, так что когда масса находится на высоте y, длина цепи y свисает прямо под ней, в то время как остальная часть цепи остается в покое на земле. Найдите максимальную высоту, достигнутую массой, предполагая, что она меньше длины цепи.

Решение и разбалловка:

Если пренебрегать выделяющимся теплотой, то получаем:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{\lambda g h^2}{2} \qquad (\text{ф}2.1)$$

$$\frac{\lambda g h^2}{2} + mgh - \frac{mv_0^2}{2} = 0$$

$$h = \frac{-mg + \sqrt{m^2g^2 + \lambda g m v_0^2}}{\lambda g} \qquad (\text{ф}2.2)$$

Сила которая действует на цепь длиной y:

$$F = (m + \lambda y)g \qquad (\text{ф}2.3)$$

$$F = \frac{dp}{dt} \qquad (\text{ф}2.4)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad (\text{ф}2.5)$$

$$p = (m + \lambda y)\dot{y} \qquad (\text{ф}2.6)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dy}\dot{y} \qquad (\text{ф}2.7)$$

Из ф2.3-ф2.7 находим:

$$(m + \lambda y)g = \frac{dp}{dy}\frac{p}{(m + \lambda y)}$$

$$g\int_0^h (m + \lambda y)^2 dy = \int_0^{mv_0} p\,dp \qquad (\text{ф}2.8)$$

$$\frac{g}{\lambda}\int_m^{m+\lambda h} u^2 du = \int_0^{mv_0} p\,dp$$

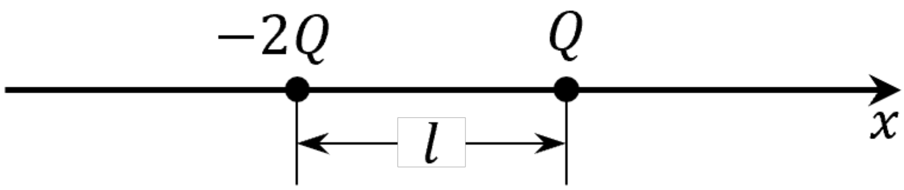
$$\frac{g}{3\lambda}[(m + hy)^3 - m^3] = \frac{m^2v_0^2}{2} \qquad (\text{ф}2.9)$$

$$h = \frac{m}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{3v_0^2\lambda}{2mg}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \qquad (ф2.10)$$

2-задача [10 балл] *Разбалловка делится на две альтернативные решения ф2.1, ф2.2 [3 балла] или ф2.3-ф2.10 [10 балл]*		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф2.1	$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{\lambda g h^2}{2}$	1,5
ф2.2	$h = \frac{-mg + \sqrt{m^2g^2 + \lambda g m v_0^2}}{\lambda g}$	1,5
ф2.3	$F = (m + \lambda y)g$	1,5
ф2.4	$F = \frac{dp}{dt}$	1
ф2.5	$v = \dot{y}$	1
ф2.6	$p = (m + \lambda y)\dot{y}$	1,5
ф2.7	$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\dot{y}$	1
ф2.8	$g\int_0^h (m + \lambda y)^2 dy = \int_0^{mv_0} pdp$	2
ф2.9	$\frac{g}{3\lambda}[(m + hy)^3 - m^3] = \frac{m^2v_0^2}{2}$	1
ф2.10	$h = \frac{m}{\lambda}\left[\left(1 + \frac{3v_0^2\lambda}{2mg}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$	1

3-есеп. [10 балл] Суретте көрсетілгендей, x осінің О басында Q (Q>0) нүктелік заряд, ал -l нүктесінде -2Q нүктелік заряд бекітілген. q сынақ заряды x осінің оң бөлігіндегі (x>0 үшін) бір нүктеге орналастырылған.
3.1 [5,2 балл] Сынақ зарядының x_p тепе-теңдік орнын табыңыз. Ол тұрақты ма?
3.2 [4,8 балл] x осіндегі жағдайға байланысты q сынақ зарядына әсер ететін F күшінің графигін шамамен тұрғызыңыз.

Как показано на рисунке, в начале координат О оси x закреплен точечный заряд Q (Q>0), а в точке -l точечный заряд -2Q. В некоторую точку на положительной части оси x (при x>0) помещают пробный заряд величиной q.
3.1 [5,2 балл] Найдите положение равновесия x_p пробного заряда. Устойчиво ли оно?
3.2 [4,8 балл] Постройте качественный график результирующей силы F, действующей на пробный заряд q в зависимости от положения на оси x.



<u>Решение и разбалловка:</u>

В точке равновесия силы действующие на пробный заряд равны:

$$\frac{k2Qq}{(l+x_p)^2} = \frac{kQq}{x_p^2} \qquad (ф3.1)$$

$$x_p = \frac{l}{\sqrt{2}-1} \approx 2{,}4l \qquad (ф3.2)$$

Сила, действующая на пробный заряд:

$$F = \frac{kQq}{x^2} - \frac{k2Qq}{(l+x)^2} \qquad (ф3.3)$$

Найдем производную функции от x:

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{2kQq}{x^3} + \frac{4kQq}{(l+x)^3} \qquad (ф3.4)$$

Найдем значение этой функции в $x_p \approx 2{,}4l$:

$$\frac{dF}{dx} \approx -0{,}04\frac{kQq}{l^3} < 0 \qquad (ф3.5)$$

Значит равновесие:

Устойчивое (ф3.6)

Чтобы график строит, мы должны найти ее экстремумы:

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{2kQq}{x_c^3} + \frac{4kQq}{(l+x_c)^3} = 0$$

$$x_c = \frac{l}{2^{1/3}-1} \approx 3{,}8l$$

Параметры графика:

$$x \to 0, F \to \infty \qquad (ф3.7)$$
$$0 < x < x_p, F > 0 \qquad (ф3.8)$$

$$x = x_p, F = 0 \qquad (ф3.9)$$
$$x > x_p, F < 0 \qquad (ф3.10)$$
$$x = x_c \approx 3{,}8l, F_{min} \qquad (ф3.11)$$
$$x \to \infty, F \to 0 \qquad (ф3.12)$$

мында график …..

3-задача [10 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф3.1	$\frac{k2Qq}{(l+x_p)^2} = \frac{kQq}{x_p^2}$	1
ф3.2	$x_p = \frac{l}{\sqrt{2}-1} \approx 2{,}4l$	1
ф3.3	$F = \frac{kQq}{x^2} - \frac{k2Qq}{(l+x)^2}$	0,5
ф3.4	$\frac{dF}{dx} = -\frac{2kQq}{x^3} + \frac{4kQq}{(l+x)^3}$	0,5
ф3.5	$\frac{dF}{dx} \approx -0{,}04\frac{kQq}{l^3} < 0$	1
ф3.6	Устойчивое	1,2
ф3.7	$x \to 0, F \to \infty$	0,8
ф3.8	$0 < x < x_p, F > 0$	0,8
ф3.9	$x = x_p, F = 0$	0,8
ф3.10	$x > x_p, F < 0$	0,8
ф3.11	$x = x_c \approx 3{,}8l, F_{min}$	0,8
ф3.12	$x \to \infty, F \to 0$	0,8

4-есеп. [20 балл]. Қара құрдымдар – жалпы салыстырмалық теориясы бойынша болжанған экзотикалық нысандар. Заряды нөл және импульс моменті нөл қара құрдым үшін (Шварцшильд қара құрдымы деп аталады) ішінен зат сыртқа шыға алмайтын r радиусының сфералық бетін анықтауға болады. Бұл бет оқиға көкжиегі деп аталады.

Ньютон механикасы шеңберінде оқиға горизонты екінші ғарыштық жылдамдық жарық жылдамдығына тең болатын бетке сәйкес келеді. Жарықтың вакуумдегі жылдамдығы с = $3\cdot10^8$ м/с, гравитациялық тұрақты G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2), Күннің массасы M = $2\cdot10^{30}$ кг.

4.1 [3 балл] Қара құрдым оқиғасы горизонтының радиусы үшін өрнекті алыңыз және оны массасы күннің массасына тең қара құрдым үшін есептеңіз.

Алдыңғы абзацта алынған өрнек жалпы салыстырмалылық теориясы болжаған нәтижемен дәл сәйкес келеді. Бекенштейн мен Хокинг теориясында қара құрдымның S энтропиясы оқиға горизонтының A ауданына пропорционал:

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

мұндағы $\hbar$ - азайтылған Планк тұрақтысы, k_B - Больцман тұрақтысы.

Массасы M екі қара құрдым массасы $M' < 2M$ бір қара құрдымға қосылсын.

4.2 [3 балл] Мұндай жүйенің энтропиясының өзгерісін табыңыз. Жауапта A мәні болмауы керек.

Қара құрдымның ішкі энергиясы U, оның энтропиясы S және температурасы T негізгі термодинамикалық байланыс dU = TdS байланысты. Салыстырмалылық теориясы шеңберінде қара құрдымның ішкі энергиясы $U = Mc^2$ тең.

4.3 [4 балл] Қара құрдымның T температурасы мен оның жылу сыйымдылығының C массаға M тәуелділік өрнектерін алыңыз.

4.4 [6 балл] Массалары M_{10} және $M_{20} > M_{10}$ екі қара құрдымды Карно жылу машинасы үшін қыздырғыш және салқындатқыш ретінде пайдаланып, мұндай жылу машинасы орындай алатын максималды жұмысын W табыңыз.

Хокинг теориясы сонымен қатар қара құрдымның электромагниттік сәулеленуін болжайды (Хокинг сәулесі деп аталады). Бұл сәулеленудің спектрі қара дененің сәулелену спектрімен сәйкес келеді. Стефан-Больцман тұрақтысы σ.

4.5 [2 балл] Хокинг сәулелену қуатының P қара құрдым массасына M тәуелділігін табыңыз.

Хокинг сәулеленуі қара құрдым энергиясының төмендеуіне әкеледі, яғни. оның массасы азаяды. Қара құрдымның бастапқы массасы M_0 болсын.

4.6 [2 балл] Бұл қара құрдым қай уақыттан кейін τ "буланады"?

Чёрные дыры — это экзотические объекты, предсказываемые общей теорией относительности. Для чёрной дыры с нулевым зарядом и моментом импульса (так называемой чёрной дыры Шварцшильда) можно определить сферическую поверхность радиуса r, материя изнутри которой не может попасть наружу. Эта поверхность называется горизонтом событий.

В рамках механики Ньютона горизонт событий соответствует поверхности, на которой вторая космическая скорость равна скорости света. Скоростью света в вакууме равна с = $3\cdot10^8$ м/с, гравитационная постоянная G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$с^2), масса Солнца — M = $2\cdot10^{30}$ кг.

4.1 [3 балл] Получите выражение для радиуса горизонта событий чёрной дыры и вычислите его для чёрной дыры солнечной массы.

Полученное в предыдущем пункте выражение в точности совпадает с результатом, который предсказывает общая теория относительности. В теории Бекенштейна и Хокинга энтропия чёрной дыры S пропорциональна площади A горизонта событий:

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

где $\hbar$ - редуцированная постоянная Планка, k_B - постоянная Больцмана.

Пусть две чёрные дыры массой M сливаются в одну чёрную дыру массой $M' < 2M$.

4.2 [3 балл] Найдите изменение энтропии такой системы. В ответ не должна входить величина A.

Внутренняя энергия чёрной дыры U, её энтропия S и температура T связаны фундаментальным термодинамическим соотношением dU = TdS. В рамках теории относительности энергия внутренняя энергия чёрной дыры равна $U = Mc^2$.

4.3 [4 балл] Получите выражения для зависимости температуры T чёрной дыры и её теплоёмкости C от массы M.
4.4 [6 балл] Используя две чёрные дыры массами M_{10} и $M_{20} > M_{10}$ в качестве нагревателя и холодильника тепловой машины Карно, найдите максимальную работу W, которую может совершить такая тепловая машина.

Теория Хокинга также предсказывает электромагнитное излучение чёрных дыр (т.н. излучение Хокинга). Спектр этого излучения совпадает со спектром излучения чёрного тела. Постоянная Стефана—Больцмана известна и равна σ.
4.5 [2 балл] Найдите зависимость мощности P излучения Хокинга от массы чёрной дыры M.

Излучение Хокинга приводит к уменьшению энергии чёрной дыры, т.е. к уменьшению её массы. Пусть начальная масса чёрной дыры равна M_0.
4.6 [2 балл] Через какое время τ эта чёрная дыра «испарится»?

Решение и разбалловка:

4.1
Вторая космическая скорость:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad (ф4.1)$$

Радиус горизонта событий:

$$r = \frac{2GM}{c^2} \qquad (ф4.2)$$

$$r \approx 3 \text{ км} \qquad (ф4.3)$$

4.2
Площадь горизонта событий:

$$A = 4\pi r^2 \qquad (ф4.4)$$

Энтропия:

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar} = \frac{k_B c^3 4\pi r^2}{4G\hbar} = \frac{k_B c^3 4\pi}{4G\hbar}\frac{4G^2M^2}{c^4}$$

$$S = \frac{4k_B\pi GM^2}{\hbar c} \qquad (ф4.5)$$

Изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{4k_B\pi G}{\hbar c}[M'^2 - 2M^2] \qquad (ф4.6)$$

4.3

$$dS = \frac{8k_B\pi GM}{\hbar c}dM \qquad (ф4.7)$$

$$dU = dMc^2 \qquad (ф4.8)$$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8k_B\pi GM} \qquad (ф4.9)$$

$$dU = CdT \qquad (ф4.10)$$

$$dT = -\frac{\hbar c^3}{8k_B\pi GM^2}dM \qquad (ф4.11)$$

$$C = -\frac{8k_B\pi GM^2}{\hbar c} \qquad (ф4.12)$$

4.4

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{T_2}{T_1} \qquad (ф4.13)$$

$$dQ_1 = -dM_1 c^2 \qquad (ф4.14)$$

$$dQ_2 = dM_2 c^2 \qquad (ф4.15)$$

$$T \sim \frac{1}{M}$$

$$\frac{dM_2}{dM_1} = -\frac{M_1}{M_2} \qquad (ф4.16)$$

$$\int M_1 dM_1 = -\int M_2 dM_2$$

$$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2 \qquad (ф4.17)$$

$$M_1 = 0 \qquad (ф4.18)$$

$$M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2} \qquad (ф4.19)$$

Максимальная работа:

$$W = U_0 - U_f \qquad (ф4.20)$$

$$W = \left(M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}\right) c^2 \qquad (ф4.21)$$

4.5

$$P = \sigma T^4 A \qquad (ф4.22)$$

$$P = \sigma \left(\frac{\hbar c^3}{8 k_B \pi G M}\right)^4 4\pi \frac{4G^2 M^2}{c^4}$$

$$P = \frac{\sigma c^2 \hbar^4}{256 \pi^3 G^2 k_B^4 M^2} \qquad (ф4.23)$$

4.6

$$P = -\frac{dMc^2}{dt} \qquad (ф4.24)$$

$$\frac{\sigma c^2 \hbar^4}{256 \pi^3 G^2 k_B^4 M^2} = -\frac{dMc^2}{dt}$$

$$\frac{\sigma \hbar^4}{256 \pi^3 G^2 k_B^4} \int_0^\tau dt = -\int_{M_0}^0 M^2 dM$$

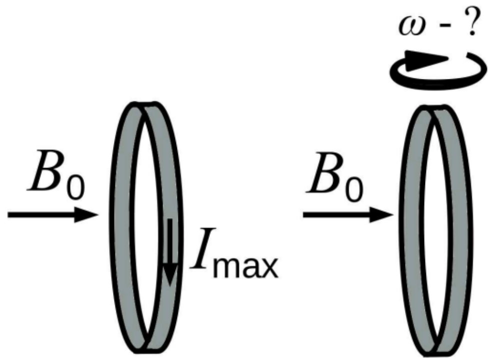
$$\frac{\sigma \hbar^4 \tau}{256 \pi^3 G^2 k_B^4} = \frac{M_0^3}{3}$$

$$\tau = \frac{256 \pi^3 G^2 k_B^4 M_0^3}{3 \sigma \hbar^4} \qquad (ф4.25)$$

4-задача [20 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф4.1	$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$	1
ф4.2	$r = \frac{2GM}{c^2}$	1
ф4.3	$r \approx 3$ км	1
ф4.4	$A = 4\pi r^2$	1
ф4.5	$S = \frac{4k_B\pi GM^2}{\hbar c}$	1
ф4.6	$\Delta S = \frac{4k_B\pi G}{\hbar c}[M'^2 - 2M^2]$	1
ф4.7	$dS = \frac{8k_B\pi GM}{\hbar c}dM$	0,5
ф4.8	$dU = dMc^2$	1
ф4.9	$T = \frac{\hbar c^3}{8k_B\pi GM}$	0,5
ф4.10	$dU = CdT$	1
ф4.11	$dT = -\frac{\hbar c^3}{8k_B\pi GM^2}dM$	0,5
ф4.12	$C = -\frac{8k_B\pi GM^2}{\hbar c}$	0,5
ф4.13	$\frac{dQ_2}{dQ_1} = \frac{T_2}{T_1}$	1
ф4.14	$dQ_1 = -dM_1c^2$	0,5
ф4.15	$dQ_2 = dM_2c^2$	0,5
ф4.16	$\frac{dM_2}{dM_1} = -\frac{M_1}{M_2}$	0,5
ф4.17	$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2$	1
ф4.18	$M_1 = 0$	0,5
ф4.19	$M_2 = \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}$	0,5
ф4.20	$W = U_0 - U_f$	1
ф4.21	$W = \left(M_{10} + M_{20} - \sqrt{M_{10}^2 + M_{20}^2}\right)c^2$	0,5
ф4.22	$P = \sigma T^4 A$	1
ф4.23	$P = \frac{\sigma c^2\hbar^4}{256\pi^3G^2k_B^4M^2}$	1
ф4.24	$P = -\frac{dMc^2}{dt}$	1
ф4.25	$\tau = \frac{256\pi^3G^2k_B^4M_0^3}{3\sigma\hbar^4}$	1

5-есеп. [10 балл]. Композиттік материалдың жұқа, қатты парағынан тар жолақ кесілген. Бұл жолақтың электр кедергісі r және ұзындығы L. Жолақтан сақина жасалды. Бірінші тәжірибеде сақина осі өріс бойымен бағытталғандай етіп индукциясы B біртекті магнит өрісіне орналастырылды. Сақинадан максималды ток $I_{\max}$ өткенде ол үзіледі. Екінші тәжірибеде сақинадан ток өткізбей, оны сол магнит өрісінде өріс бағытына перпендикуляр осьтің айналасында айналдыра бастады. Сақина қайтадан үзілуі үшін оны қандай бұрыштық жылдамдықпен айналдыру керек? Сақинаның массасы өте аз, сыртқа бағытталған қандай да бір қозғалмайтын күш әсерінен сақина үзіледі және ол басқа деформацияларға төзімді деп есептеледі. Сақинаның өзіндік индукциясы еленбейді.

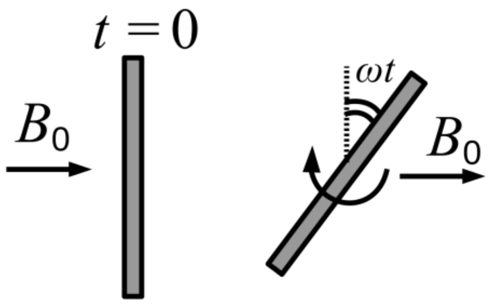
Из тонкого жёсткого листа композитного материала была вырезана узкая полоска. У этой полоски электрическое сопротивление составляет r, а длина — L. Из полоски изготовили кольцо. В первом эксперименте кольцо поместили в однородное магнитное поле с индукцией B, так что ось кольца была ориентирована вдоль поля. При пропускании через кольцо максимального тока $I_{\max}$ оно разорвалось. Во втором эксперименте ток через кольцо не пропускали, но начали вращать его в том же магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. С какой угловой скоростью следует раскрутить кольцо, чтобы оно снова разорвалось? Предполагается, что масса кольца пренебрежимо мала, кольцо разрывается от некоторого фиксированного усилия, направленного наружу, и оно устойчиво к другим деформациям. Также игнорируется самоиндукция кольца.



<u>Решение и разбалловка:</u>

На кусочек действует сила Ампера, которая разрывает полоску:

$$dF_{max} = dlB_0I_{max} \qquad (\text{ф}5.1)$$



Во втором опыте, в момент времени t, магнитный поток через кольцо:

$$\Phi = B_0\pi a^2 cos\omega t \qquad (\text{ф}5.2)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (\text{ф}5.3)$$

$$\mathcal{E} = Ir \qquad (\text{ф}5.4)$$

$$I = B_0\omega\pi a^2 sin\omega t/r \qquad (\text{ф}5.5)$$

На кусочек действует сила Ампера:

$$dF = BIdl = B_0cos\omega tB_0\omega\pi a^2 sin\omega tdl/r$$

$$dF = B_0^2\omega\pi a^2 \sin(2\omega t)dl/(2r) \qquad (ф5.6)$$

На кусочек действует сила Ампера, которая разрывает полоску:

$$dF_{max} = B_0^2\omega\pi a^2 dl/(2r) \qquad (ф5.7)$$
$$L = 2\pi a \qquad (ф5.8)$$

$$dlB_0I_{max} = B_0^2\omega\pi(L/2\pi)^2 dl/(2r)$$

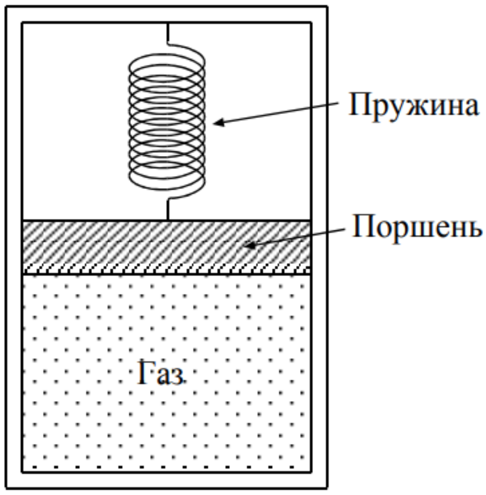
$$\omega = \frac{8\pi r I_{max}}{BL^2} \qquad (ф5.9)$$

5-задача [10 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф5.1	$dF_{max} = dlB_0I_{max}$	1
ф5.2	$\Phi = B_0\pi a^2 cos\omega t$	1
ф5.3	$\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$	2
ф5.4	$\mathcal{E} = Ir$	1
ф5.5	$I = \dfrac{B_0\omega\pi a^2 sin\omega t}{r}$	1
ф5.6	$dF = \dfrac{B_0^2\omega\pi a^2 \sin(2\omega t)dl}{2r}$	1
ф5.7	$dF_{max} = \dfrac{B_0^2\omega\pi a^2 dl}{2r}$	1
ф5.8	$L = 2\pi a$	1
ф5.9	$\omega = \dfrac{8\pi r I_{max}}{BL^2}$	1

6-есеп. [10 балл] Поршень астындағы тік цилиндрлік ыдыста n = 2 моль азот бар (сурет), оны идеал газ деп санауға болады. Поршень массасы m = 10 кг, поршень қимасының ауданы S = 500 см^2, g = 10 м/с^2. Поршень көлденең және тік бағытта үйкеліссіз қозғалуға қабілетті. Поршеньдің үстінде газ жоқ. Оның ұштарында поршеньге және ыдыстың жоғарғы қабырғасына тік салмақсыз серіппе бекітілген. Ыдыстың, поршеньдің және серіппенің жылу сыйымдылықтарын, сондай-ақ поршень астынан кез келген газдың ағып кетуін елемеуге болады. Бастапқы сәтте серіппе созылмайды, ал жүйе тепе-теңдікте болады. Газ температурасы T_0 = 300 К. Бұл күйдегі қысым мен көлемді сәйкесінше P_0 және V_0 деп белгілейміз.

6.1 [4 балл] Поршень тепе-теңдік күйінен аздап ығысқанда пайда болатын поршеньдің шағын тербелістерінің f жиілігін табыңыз.

6.2 [6 балл] Содан кейін поршень төмен түсіріліп, газ көлемін екі есе азайтады және бұл қалыпта бастапқы жылдамдықсыз босатылады. Поршеньдің абсолютті жылдамдығы $\sqrt{\frac{4gV_0}{5S}}$ тең болған кездегі газ көлемінің мәнін(мәндерін) табыңыз. Серіппенің қатаңдығын $k = MgS/V_0$ деп қарастырамыз. Газдағы барлық процестерді адиабаталық деп қарастырамыз. Универсалды газ тұрақтысы R = 8,31 Дж/(моль·К). Екі атомды газ (азот) үшін адиабаталық көрсеткіш γ = 7/5.



В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится n = 2 моля азота (рис.), который можно считать идеальным газом. Масса поршня m = 10 кг, площадь сечения поршня S = 500 см^2, g = 10 м/с^2. Поршень горизонтален и способен двигаться без трения в вертикальном направлении. Газ над поршнем отсутствует. Вертикальная невесомая пружина прикреплена концами к поршню и верхней стенке сосуда. Теплоёмкостями сосуда, поршня и пружины, а также какими-либо утечками газа из-под поршня можно пренебречь. В начальный момент пружина нерастянута, и система находится в равновесии. Температура газа при этом равна T_0 = 300 К. Давление и объём в этом состоянии обозначим P_0 и V_0 соответственно.

6.1 [4 балл] Найдите частоту f малых колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении поршня из положения равновесия.

6.2 [6 балл] Затем поршень опускают вниз, уменьшая объём газа вдвое, и в этом положении отпускают без начальной скорости. Найдите величину (величины) объёма газа в момент, когда скорость поршня по модулю равна $\sqrt{\frac{4gV_0}{5S}}$. Считайте жёсткость пружины равной $k = MgS/V_0$. Все процессы в газе считайте адиабатическими. Универсальная газовая постоянная равна R = 8,31 Дж/(моль·К). Для двухатомного газа (азот) показатель адиабаты равен γ = 7/5.

<u>Решение и разбалловка:</u>

6.1

Уравнение движения поршня:

$$m\ddot{x} = -kx - PS + mg \qquad (ф6.1)$$

$$PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma} \qquad (ф6.2)$$

$$PV^{\gamma} = P(V_0 - Sx)^{\gamma} = PV_0^{\gamma}\left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right)^{\gamma}$$

При $z << 1$:

$$(1 + z)^n \approx 1 + nz$$

Используя предыдущую формулу и ф6.2 мы получаем:

$$P \approx P_0\left(1+\frac{\gamma S x}{V_0}\right) \qquad (\text{ф}6.3)$$

При равновесии:

$$P_0 S = mg \qquad (\text{ф}6.4)$$

$$m\ddot{x} = -\frac{mgS}{V_0}x - P_0\left(1+\frac{\gamma S x}{V_0}\right)S + mg$$

$$m\ddot{x} = -\frac{mgS}{V_0}(1+\gamma)x \qquad (\text{ф}6.5)$$

$$V_0 = \frac{nRT_0 S}{mg} \qquad (\text{ф}6.6)$$

$$\ddot{x} = -(1+\gamma)\frac{mg^2}{nRT_0}x$$

$$f = \frac{g}{2\pi}\sqrt{\frac{(1+\gamma)m}{nRT_0}} \qquad (\text{ф}6.7)$$

$$f \approx 0{,}11\ \text{Гц} \qquad (\text{ф}6.8)$$

6.2

Работа совершаемая газом:

$$dA_{\text{газ}} = PdV \qquad (\text{ф}6.9)$$

$$A_{\text{газ}} = \int_{\frac{V_0}{2}}^{V} PdV = \int_{\frac{V_0}{2}}^{V} \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}dV$$

$$A_{\text{газ}} = \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V^{1-\gamma} - \left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\gamma}\right) \qquad (\text{ф}6.10)$$

$$A_{\text{газ}} = \frac{P_0 V_0}{1-\gamma}\left(\varepsilon^{1-\gamma} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\gamma}\right) = \frac{5mgV_0}{2S}\left(-\varepsilon^{-0{,}4} + 2^{0{,}4}\right)$$

где $\varepsilon = V/V_0$.

Изменение потенциальной энергии поршня:

$$\Delta E_{\text{п}1} = mg\Delta h \qquad (\text{ф}6.11)$$

$$\Delta E_{\text{п}1} = \frac{mgV_0}{S}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) \qquad (\text{ф}6.12)$$

Изменение потенциальной энергии пружины:

$$\Delta E_{\text{п}2} = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} \qquad (\text{ф}6.13)$$

$$\Delta E_{п2} = \frac{1}{2}\left(\frac{mgS}{V_0}\right)\left(\frac{V_0 - V}{S}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{mgS}{V_0}\right)\left(\frac{V_0 - V_0/2}{S}\right)^2$$

$$\Delta E_{п2} = \frac{mgV_0}{2S}\left((1-\varepsilon)^2 - \frac{1}{4}\right) \qquad (ф6.14)$$

Кинетическая энергия поршня:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} \qquad (ф6.15)$$

$$E_к = \frac{2mgV_0}{5S} \qquad (ф6.16)$$

$$A_{газ} = \Delta E_{п1} + \Delta E_{п2} + E_к \qquad (ф6.17)$$

$$\frac{5mgV_0}{2S}(-\varepsilon^{-0,4} + 2^{0,4}) = \frac{mgV_0}{S}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) + \frac{mgV_0}{2S}\left((1-\varepsilon)^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{2mgV_0}{5S}$$

$$2,5(-\varepsilon^{-0,4} + 2^{0,4}) = \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) + 0,5\left(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5}$$

$$2,5(-\varepsilon^{-0,4} + 2^{0,4}) = 0,5\varepsilon^2 - \frac{1}{8} + \frac{2}{5}$$

$$2,5\varepsilon^{-0,4} + 0,5\varepsilon^2 = 2,5 \cdot 2^{0,4} - \frac{11}{40} \qquad (ф6.18)$$

Ответы:

$$\varepsilon_1 = 0,86 \text{ и } \varepsilon_2 = 1,14$$

$$V_1 = 2,14 \text{ м}^3 \qquad (ф6.19)$$

$$V_2 = 2,84 \text{ м}^3 \qquad (ф6.20)$$

6-задача [10 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф6.1	$m\ddot{x} = -kx - PS + mg$	0,5
ф6.2	$PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma}$	0,5
ф6.3	$P \approx P_0\left(1 + \frac{\gamma Sx}{V_0}\right)$	0,5
ф6.4	$P_0S = mg$	0,5
ф6.5	$m\ddot{x} = -\frac{mgS}{V_0}(1+\gamma)x$	0,5
ф6.6	$V_0 = \frac{nRT_0S}{mg}$	0,5
ф6.7	$f = \frac{g}{2\pi}\sqrt{\frac{(1+\gamma)m}{nRT_0}}$	0,5
ф6.8	$f \approx 0{,}11$ Гц	0,5
ф6.9	$dA_{\text{газ}} = PdV$	0,5
ф6.10	$A_{\text{газ}} = \frac{P_0V_0^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V^{1-\gamma} - \left(\frac{V_0}{2}\right)^{1-\gamma}\right)$	0,5
ф6.11	$\Delta E_{\text{п}1} = mg\Delta h$	0,5
ф6.12	$\Delta E_{\text{п}1} = \frac{mgV_0}{S}\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$	0,5
ф6.13	$\Delta E_{\text{п}2} = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}$	0,5
ф6.14	$\Delta E_{\text{п}2} = \frac{mgV_0}{2S}\left((1-\varepsilon)^2 - \frac{1}{4}\right)$	0,5
ф6.15	$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$	0,5
ф6.16	$E_{\text{к}} = \frac{2mgV_0}{5S}$	0,5
ф6.17	$A_{\text{газ}} = \Delta E_{\text{п}1} + \Delta E_{\text{п}2} + E_{\text{к}}$	0,5
ф6.18	$2{,}5\varepsilon^{-0{,}4} + 0{,}5\varepsilon^2 = 2{,}5 \cdot 2^{0{,}4} - \frac{11}{40}$	0,5
ф6.19	$V_1 = 2{,}14$ м^3	0,5
ф6.20	$V_2 = 2{,}84$ м^3	0,5

7-есеп. [10 балл] Сутегі атомының классикалық үлгісінде электрон ядроны айналмалы орбита бойымен қозғалады, ал электронға әсер ететін центрге тартқыш күш ядроның электр өрісінен туындайды. Алайда, электромагнетизмнің классикалық теориясы электрон жеделдету салдарынан қуаты тең электромагниттік толқындар шығаруы керек деп болжайды.

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$$

мұндағы a – электронның үдеуі, c – вакуумдегі жарық жылдамдығы, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2), $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, сутегі атомындағы байланыс энергиясы $E_{\text{H}} = 13{,}6$ эВ, электронның тыныштық массасы $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7.1 [4 балл] Релятивистік әсерлерді елемей, классикалық теориядағы сутегі атомының өмір сүру уақытын τ табыңыз.

Үдеу кезінде нүктелік бөлшек шығаратын электромагниттік толқынның бір маңызды қолданылуы бар. Қазіргі заманғы ғылыми зерттеулерде кеңінен қолданылатын синхротрондық сәулелену магнит өрісіндегі жарық жылдамдығына жақын жылдамдықпен қозғалатын электрондардың сәулеленуі, соның арқасында олар үдеуді сезінеді. Синхротронның негізгі элементі - электрондары бар сақина, оның сәулесі ауытқу магниттері арқылы ұшқанда үлкен тиімділікпен синхротрондық сәулеленуді жасайды.

Оның келесі белгілі параметрлерін қарастырайық: сақинадағы электрон энергиясы $E = 3{,}50$ ГэВ, электронды сәуленің қозғалысы нәтижесінде пайда болатын ток $I = 200$ мА, сақина периметрі $L = 600$ м, ауытқу магниттерімен жабдықталған секциялар саны, $n = 50$, магниттік осы бөлімдердегі өріс индукциясы $B = 1{,}07$ Тл. Электронның жылдамдығы жарық жылдамдығына өте жақын, Ньютонның екінші заңы әлі де дұрыс, бірақ Лармор формуласы келесідей болатынын ескеріңіз.

$$P = \gamma^4 \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$$

мұндағы $\gamma = E/m_e c^2$, мұндағы E – электронның толық энергиясы, ал $m_e c^2$ оның тыныштық энергиясы.

7.2 [4 балл] Ауыстыру магниттерімен жабдықталған секциялардың әрқайсысында P_0 сәулелену қуатын табыңыз.

Электрондардың жылдамдығы жарық жылдамдығына жақын болғандықтан, олардың синхротрондық сәулеленуі электронның орбитасына тангенциалды бағытталған тар конуста ғана айтарлықтай қарқындылыққа ие болады және бұрышының жартысы $\beta = 1/\gamma$. Бұл электрон энергиясы неғұрлым жоғары болса, сәуле соғұрлым нақты бағытталғанын көрсетеді.

7.3 [2 балл] Сәулеленудің таралу бағыты бойынша белгілі бір нүктеде стационарлық бақылаушы қабылдаған жеке электронның жарық импульсінің ΔT ұзақтығын табыңыз.

В классической модели атома водорода электрон движется вокруг ядра по круговой орбите, и действующая на электрон центростремительная сила возникает из-за электрического поля ядра. Однако, классическая теория электромагнетизма предсказывает, что электрон вследствие ускорения должен излучать электромагнитные волны, мощность которых равна

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$$

где a – ускорение электрона, c – скорость света в вакууме, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2), $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, энергия связи в атоме водорода $E_{\text{H}} = 13{,}6$ эВ, масса покоя электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7.1 [4 балл] Пренебрегая релятивистскими эффектами, найдите время жизни атома водорода τ в классической теории.

Электромагнитная волна, испущенная точечной частицей при ускорении, имеет одно очень важное применение. Синхротронное излучение, широко применяемое в современных научных исследованиях, есть не что иное как излучение электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света, в магнитном поле, из-за которого они и испытывают ускорение. Основным элементом синхротрона является кольцо, в котором содержатся электроны, луч из которых с большой эффективностью создаёт синхротронное излучение при пролёте через отклоняющие магниты.

Считайте известными следующие его параметры: энергия электрона в кольце E = 3.50 ГэВ, ток, создаваемый движением электронного луча I = 200 мА, периметр кольца L = 600 м, количество участков, снабжённых отклоняющими магнитами, $n = 50$, индукция магнитного поля в этих участках B = 1.07 Тл. Учтите, что, когда скорость электрона не мала по сравнению со скоростью света, второй закон Ньютона всё так же выполняется, однако формула Лармора будет иметь вид

$$P = \gamma^4 \frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$$

где $\gamma = E/m_e c^2$, где E – полная энергия электрона, а $m_e c^2$ – его энергия покоя.

7.2 [4 балл] Найдите мощность излучения P_0 на каждом из участков, снабжённых отклоняющими магнитами.

Так как скорость электронов близка к скорости света, их синхротронное излучение имеет заметную интенсивность лишь в узком конусе, который направлен по касательной к орбите электрона, и половина угла раствора $\beta = 1/\gamma$. Отсюда видно, что чем выше будет энергия электронов, тем более точно направленным будет излучение.

7.3 [2 балл] Найдите длительность ΔT светового импульса отдельного электрона, воспринимаемого неподвижным наблюдателем в некоторой точке вдоль направления распространения излучения.

<u>Решение и разбалловка:</u>

7.1

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = -E_{\text{H}} \qquad (ф7.1)$$
$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (ф7.2)$$
$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (ф7.3)$$

$$\frac{e^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right)$$
$$\frac{e^2 v^4}{6\pi c^3 \varepsilon_0 r^2} = \frac{dr}{dt}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$\frac{e^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0 r^2}\frac{e^4}{16 m^2 \pi^2 \varepsilon_0^2 r^2} = \frac{dr}{dt}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{e^4}{12 c^3 m^2 \pi^2 \varepsilon_0^2} dt = r^2 dr \qquad (ф7.4)$$

$$\frac{e^4}{12 c^3 m^2 \pi^2 \varepsilon_0^2}\int_0^\tau dt = \int_0^{r_0} r^2 dr$$
$$\frac{e^4}{12 c^3 m^2 \pi^2 \varepsilon_0^2}\tau = \frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_{\text{H}}}\right)^3$$

$$\tau = \frac{e^2 c^3 m^2}{128\pi\varepsilon_0 E_H^3} \qquad (ф7.5)$$

$$\tau \approx 1{,}56 \cdot 10^{-11}\ c \qquad (ф7.6)$$

7.2

$$m_e c^2 \approx 0{,}512\ \text{МэВ}$$
$$E \gg m_e c^2$$

$$\frac{m_e v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}r} = eBv \qquad (ф7.7)$$

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (ф7.8)$$

$$p = \frac{E}{c} \qquad (ф7.9)$$

$$r = \frac{E}{ecB}$$

$$I = \frac{Nev}{2\pi r} \qquad (ф7.10)$$

$$P_0 = \frac{NP}{n} \qquad (ф7.11)$$

$$v \approx c$$

$$P_0 = \gamma^4 \frac{e^2(\frac{v^2}{r})^2 N}{6n\pi c^3 \varepsilon_0} \approx \gamma^4 \frac{e^2}{6n\pi c^3 \varepsilon_0} (\frac{c^2 ecB}{E})^2 \frac{2\pi IE}{e^2 c^2 B}$$

$$P_0 \approx \gamma^4 \frac{e^2 cBI}{3n\varepsilon_0 E} \qquad (ф7.12)$$

$$P_0 \approx 4{,}83 \text{ кВт} \qquad (ф7.13)$$

7.3

$$\frac{2R\beta}{v} - \frac{2R\beta}{c} = \Delta T \qquad (ф7.14)$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$v = c\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right) \qquad (ф7.15)$$

$$\Delta T \approx \frac{L}{2\pi c\gamma^3} \qquad (ф7.16)$$

$$\Delta T \approx 10^{-18}\ c \qquad (ф7.17)$$

7-задача [10 балл]		
Номер формулы	**Формула или значение**	**Балл**
ф7.1	$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} = E_{\text{Н}}$	0,5
ф7.2	$P = \frac{dE}{dt}$	0,5
ф7.3	$a = \frac{v^2}{r}$	1
ф7.4	$\frac{e^4}{12c^3 m^2 \pi^2 \varepsilon_0^2} dt = r^2 dr$	1
ф7.5	$\tau = \frac{e^2 c^3 m^2}{128\pi\varepsilon_0 E_H^3}$	0,5
ф7.6	$\tau \approx 1{,}56 \cdot 10^{-11}\ c$	0,5
ф7.7	$\frac{m_e v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, r} = eBv$	1
ф7.8	$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$	0,5
ф7.9	$p = \frac{E}{c}$	0,5
ф7.10	$I = \frac{Nev}{2\pi r}$	0,5
ф7.11	$P_0 = \frac{NP}{n}$	0,5
ф7.12	$P_0 \approx \gamma^4 \frac{e^2 cBI}{3n\varepsilon_0 E}$	0,5
ф7.13	$P_0 \approx 4{,}83$ кВт	0,5
ф7.14	$\frac{2R\beta}{v} - \frac{2R\beta}{c} = \Delta T$	0,5
ф7.15	$\frac{1}{v} = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2\gamma^2}\right)$	0,5
ф7.16	$\Delta T \approx \frac{L}{2\pi c\gamma^3}$	0,5
ф7.17	$\Delta T \approx 10^{-18}\ c$	0,5