Физика ҚБО 1-тур (Решение и разбалловка)

1.1. На двух поверхностях пластины появляются связанные заряды с плотностями $\pm\sigma_{св}$, образуя подобие конденсатора $\frac{E}{\varepsilon} = E - \frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0}$	**[1 балла]** 1 балла
$\sigma_{св} = \varepsilon_0 E(1 - \frac{1}{\varepsilon})$	
1.2. $w = \frac{ED}{2}$	**[3 балла]** 1 балла
$D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$	0,5 балла 0,5 балла
$P = \Delta w$ $w = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^4}$	0,5 балла 0,5 балл
1.3. Заряд делится по полусферам так, чтобы его плотность вместе с плотностью связанного заряда на обоих полусферах была одинакова – поле внутри такой «комбинированной» сферы зарядов нулевое, поэтому она эквипотенциальна.	**[3 балла]**
$q = q_1 + q_2$ $q_1 + q_{св1} = q_2 + q_{св2}$ $q_{св1} = q_1(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1),\ q_{св2} = q_2(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1)$ $\frac{q_1}{\varepsilon_1} = \frac{q_2}{\varepsilon_2}$ $q_1 = q\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},\ q_2 = q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$	0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балл
$\frac{q + q_{св1} + q_{св2}}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R} = \varphi$	1 балл
1.4. $P_{воз} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}$ $P_{жид} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^4}$ $mg + F_{жид} = F_A + F_{воз}$ $F_{жид} = P_{жид}\pi R^2$ и $F_{воз} = P_{воз}\pi R^2$ $\rho\frac{4\pi R^3}{3}g + \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^4}\pi R^2 = \rho_0\frac{2\pi R^3}{3}g + \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\pi R^2$ $\rho = \frac{\rho_0}{2} + \frac{3q^2}{128\pi^2\varepsilon_0 R^5 g}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$	**[3 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 1 балла 0,5 балла 0,5 балл 0,5 балл

2.1: $v = \omega R$ (без проскальзывания) $v_x = v(1 - cos\omega t)$ $v_y = vsin\omega t$ $dx = v_x dt$ или $dy = v_y dt$ или $ds = vdt$ $x = \int_0^t R\omega(1 - cos\omega t)dt = R(\omega t - sin\omega t) = R(\varphi - sin\varphi)$ $y = \int_0^t R\omega sin\omega t dt = R(1 - cos\omega t) = R(1 - cos\varphi)$	**[3 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
2.2: $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$	**[1,5 балла]** 1,5 балла
2.3: $ds = vdt$ $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{sin\varphi}{1-cos\varphi}$ тангенс угла с осью x $$ds = \frac{dy}{sin\alpha}$$ или $$ds = \frac{dx}{cos\alpha}$$ $$ds = \frac{Rsin\varphi d\varphi\sqrt{1 + tg^2\alpha}}{tg\alpha} = \frac{Rin\varphi d\varphi}{\frac{sin\varphi}{1 - cos\varphi}}\sqrt{1 + \frac{sin^2\varphi}{(1 - cos\varphi)^2}}$$ $$ds = Rd\varphi\sqrt{2(1 - cos\varphi)}$$ $$T_0 = \frac{R}{\sqrt{g}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi\sqrt{1 - cos\varphi}}{\sqrt{R - y_0 - Rcos\varphi}}$$	**[2,5 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
2.4: $$y = 2R$$ $$2R = R(1 - cos\varphi_2)$$ $$\varphi_2 = \pi$$ $$y_0 = R(1 - cos\varphi_1)$$ $$2cos^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = 1 + cos\varphi_1$$ $$\varphi_1 = 2 \cdot \arccos\left(\sqrt{1 - \frac{y_0}{2R}}\right)$$	**[2 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
2.5: $$2sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1 - cos\varphi_1$$ $$T_0 = \frac{R}{\sqrt{g}}\int_{\varphi_1}^{\pi}\frac{d\varphi\sqrt{1 - cos\varphi}}{\sqrt{R - y_0 - Rcos\varphi}} = \frac{R}{\sqrt{g}}\int_{\varphi_1}^{\pi}\frac{d\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{R - y_0 - R(2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1)}}$$ $$T_0 = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{g2R}}\int_{\varphi_1}^{\pi}\frac{\sqrt{\frac{2R}{2R - y_0}}\sin\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - \frac{2R}{2R - y_0}cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{g}}\int_{u_1}^{u_2}\frac{-du}{\sqrt{1 - u^2}}$$ $$u^2 = \frac{2R}{2R - y_0}cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$ $$du = \sqrt{\frac{2R}{2R - y_0}}\sin\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2}$$ $$u_2 = 0$$	**[4 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла

$$u_1 = 1$$ $$T_0 = \frac{2\sqrt{R}}{\sqrt{g}}(arcsin1 - arcsin0) = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$	0,5 балла 0,5 балла
2.6: $$T_1 = 4T_0$$	**[2 балла]** 2 балла
2.7: $$L = R\int_0^{2\pi} d\varphi\sqrt{2(1 - cos\varphi)}$$ $$L = 4R\int_0^{2\pi} d\frac{\varphi}{2}sin\frac{\varphi}{2} = 4R(-cos\pi + cos0) = 8R$$	**[2 балла]** 1 балла 1 балла
2.8: $$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\varphi}{1 - cos\varphi}$$ $$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = d\varphi\frac{cos\varphi - cos^2\varphi - sin^2\varphi}{(1 - cos\varphi)^2}$$ $$\varphi = \pi$$ $$dx = R(1 - cos\varphi)d\varphi$$ $$\frac{dy}{dx} = 0$$ $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4R}$$ $$\rho = 4R$$	**[3 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла

3.1*a*: $$D=\frac{v_0^2\sin\big(2(90°-\theta)\big)}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$ $$v_0=\sqrt{\frac{gD}{sin2\theta}}$$ θ может быть любым	**[1,5 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
3.1*b*: $$(\theta+\frac{\phi}{2})+(\theta-\frac{\phi}{2})=90°$$ $$\theta=45°$$ $$0°<\phi<90°$$ $$D=\frac{v_0^2\sin\big(2(45°-\phi/2)\big)}{g}=\frac{v_0^2\cos\phi}{g}$$ $$v_0=\sqrt{\frac{gD}{cos\phi}}$$	**[1,5 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
3.2: Из предыдущего пункта, мы знаем что $\theta=45°$, из этого следует: $$D=R\sqrt{2}$$ $$v_0\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)t_1=R\sqrt{2}$$ или $$v_0\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)t_2=R\sqrt{2}$$ $$v_0\,sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_1}{2}$$ или $$v_0\,sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_2}{2}$$ $$sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)$$ или $$sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)$$ $$R=\frac{gt_1t_2}{2\sqrt{2}}$$	**[2 балла]** 0,25 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,25 балла
3.3: Из предыдущего пункта, мы знаем что $\theta=45°$, из этого следует: $$\frac{dy}{dx}=-tg45°=-1$$ $$\frac{dy}{dx}=-2\cos\left(\frac{2x}{L}\right)$$ $$-2\cos\left(\frac{2x}{L}\right)=-1$$ $$\frac{2x}{L}=\pm\frac{\pi}{3}$$ $$x=\pm\frac{\pi L}{6}$$ **1-случай:** $x=\frac{\pi L}{6}$ $$\frac{2D}{L}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$ $$D=\frac{\pi L}{6}$$	**[5 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла

$$v_0\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)t_1=\frac{\pi L}{6}$$ или $$v_0\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)t_2=\frac{\pi L}{6}$$	0,25 балла
$$v_0\, sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_1}{2}$$ или $$v_0\, sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_2}{2}$$	0,25 балла
$$sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)$$ или $$sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)$$	0,25 балла
$$L=\frac{3gt_1t_2}{\pi}$$	0,5 балла
2-случай: $x=-\frac{\pi L}{6}$ $$\frac{2D}{L}=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$ $$D=\frac{5\pi L}{6}$$	0,5 балла
$$v_0\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)t_1=\frac{5\pi L}{6}$$ или $$v_0\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)t_2=\frac{5\pi L}{6}$$	0,25 балла
$$v_0\, sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_1}{2}$$ или $$v_0\, sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{gt_2}{2}$$	0,25 балла
$$sin\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)$$ или $$sin\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(45°+\frac{\phi}{2}\right)$$	0,25 балла
$$L=\frac{3gt_1t_2}{5\pi}$$	0,5 балла

4.1: Заряд индуцируется на диске: $$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}$$ Сила действующая со стороны заряда на диск равна: $$F = \sigma\pi R^2 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (h+z)^2}\right)$$ $$F \approx \frac{\sigma Q z R^2}{2\varepsilon_0 h^3} = \frac{Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h^5}$$ По третьему закону Ньютона эта сила равна силе действующая на заряд.	**[4 балла]** 1 балла 2 балла 1 балла
4.2: Положение равновесия: $$kx_0 = \frac{Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h_0^5}$$ Уравнение движения при малом отклонение от равновесия: $$-k(x+x_0) + \frac{Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 (h_0 - x)^5} = m\ddot{x}$$ $$-kx - kx_0 + \frac{Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h_0^5}\left(1 - \frac{x}{h_0}\right)^{-5} = m\ddot{x}$$ $$-kx - kx_0 + \frac{Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h_0^5} + \frac{5Q^2 z R^2 x}{8\pi\varepsilon_0 h_0^6} = m\ddot{x}$$ $$\ddot{x} = -\omega^2 x$$ $$-\left(k - \frac{5Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h_0^6}\right) x \approx m\ddot{x}$$ $$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - \frac{5Q^2 z R^2}{8\pi\varepsilon_0 h_0^6}}}$$	**[6 балла]** 1 балла 2 балла 1 балла 1 балла 1 балла

5.1: Частица будет двигаться по круговой траектории, радиус которой находится уравнением силы Лоренца и центробежной силы: $$\frac{mv_0^2}{r} = qv_0B$$ $$r = \frac{mv_0}{qB}$$ После прохождения половины окружности частица покинет область поля в точке с координатами: $$x = 2r, y = 0$$ и через время: $$t = \frac{\pi r}{v_0}.$$	**[2 балла]** 0,5 балла 0,5+0,5 балла 0,5 балла
5.2: Запишем уравнения для движения по вертикали и горизонтали, разложив силу Лоренца и силу трения по осям: $$ma_x = qBvcos(\alpha) - kvsin(\alpha)$$ $$ma_y = -kvcos(\alpha) - qBvsin(\alpha)$$ Частица будет двигаться по уменьшающейся спирали. Приведя эти уравнения к виду, который дан в условии, получим: $$A_1 = -\frac{k}{m}$$ $$B_1 = \frac{qB}{m}$$ $$A_2 = -\frac{qB}{m}$$ $$B_2 = -\frac{k}{m}$$	**[3 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла
5.3: Умножив предыдущие уравнения на небольшой промежуток времени Δt, с учетом: $$a_x\Delta t = \Delta v_x$$ $$a_y\Delta t = \Delta v_y$$ $$vcos(\alpha)\Delta t = \Delta y$$ $$vsin(\alpha)\Delta t = \Delta x$$ получим: $$m\Delta v_x = qB\Delta y - k\Delta x$$ $$m\Delta v_y = -k\Delta y - qB\Delta x$$	**[2 балла]** 0,25 балла 0,25 балла 0,25 балла 0,25 балла 0,5 балла 0,5 балла
5.4: Как нетрудно определить, когда частица остановится: $$\Delta v_x = 0$$ $$\Delta v_y = -v_0$$	**[1 балла]** 0,5 балла 0,5 балла
5.5: Решаем систему уравнений и находим перемещения частицы: $$\Delta x = \frac{qBmv_0}{k^2 + (qB)^2}$$ $$\Delta y = \frac{kmv_0}{k^2 + (qB)^2}$$ Полное перемещение равно $$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$ $$d = \frac{mv_0}{\sqrt{k^2 + (qB)^2}}$$	**[2 балла]** 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла 0,5 балла

6. Оптическое измерение скорости

Интерференция

Рассмотрим оптическую разность хода в интерферометре. Луч из источника S расщепляется на два и разделяется линзой (которая не вносит вклада в разность хода из принципа таутохронизма), и каждый из получившихся лучей проходит геометрическую путь l, сходясь снова в точке P. Однако нижний луч, проходя по трубке с показателем преломления n, проходит оптическую путь nl, так что разность хода равна

$$\Delta = (n-1)l. \qquad (1)$$

Поскольку интерференционная картина в точке наблюдения периодически появлялась N раз, с этим связано N целых волн, которые укладываются в разность хода по мере увеличения n, так что

$$\Delta = N\lambda. \qquad (2)$$

Применим уравнение состояния идеального газа к воздуху:

$$P_0 = \frac{\rho}{\mu}RT. \qquad (3)$$

Совмещая (1)-(3), получаем

$$a = \frac{n-1}{\rho} = \frac{RT}{\mu P_0} \cdot \frac{N\lambda}{l} = 2{,}14 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3/\text{кг}. \qquad (4)$$

Аберрация в движущейся среде

При неподвижной среде фазовая скорость света легко находится по формуле

$$v_0 = \frac{c}{n} = 2{,}26 \cdot 10^8\ \text{м/с}. \qquad (5)$$

Теперь нужно учесть явление аберрации. Закон преломления в лабораторной системе применить не получится – нужно применить его в системе отсчёта, движущейся вместе с жидкостью. В этой системе скорость света в воде равна v_0 – если использовать трансформацию Лоренца и попарно разделить заданные в условии два уравнения, то можно получить формулу сложения скоростей, которая в нашей задаче примет вид

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + \frac{v_0 u}{c^2}}. \qquad (6)$$

В первом приближении эта формула примет вид

$$v = v_0\left(1 + \frac{u}{c}\left(n - \frac{1}{n}\right)\right). \qquad (7)$$

Итак, коэффициент A равен

$$A = n - \frac{1}{n} = 0{,}578. \qquad (8)$$

Измерение скорости течения жидкости

Теперь разность хода будет появляться вследствие того, что для движущейся жидкости показатель преломления в эффективном смысле будет отличаться от $n = 1{,}33$:

$$\Delta n = c\left|\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right|. \qquad (9)$$

Поэтому условие для интерференции будет

$$N\lambda = \Delta n \cdot l. \qquad (10)$$

Выражая (11) в (13) и подставляя результат в (14), получаем

$$N = A \cdot \frac{u}{c} \cdot \frac{nl}{\lambda} = \frac{u}{c} \cdot \frac{l}{\lambda}(n^2 - 1) = 0{,}1. \qquad (11)$$

№6	Содержание	Баллы	
6.1	Формула (1): $\varDelta = (n-1)l$	1,0	**3,5**
	Формула (2): $\varDelta = N\lambda$	0,5	
	Формула (3): $P_0 = \frac{\rho}{\mu}RT$	1,0	
	Формула (4): $a = \frac{RT}{\mu P_0} \cdot \frac{N\lambda}{l}$	0,7	
	Численный ответ (4): $a = 2{,}14 \cdot 10^{-4}$ м^3/кг	0,3	
	Неправильная размерность в численном ответе	*-0,1*	
6.2	Формула (5): $v_0 = \frac{c}{n}$	0,7	**1,0**
	Численный ответ (5): $v_0 = 2{,}26 \cdot 10^8$ м/с	0,3	
6.3	Формула (6): $v = \frac{v_0+u}{1+v_0 u/c^2}$	2,0	**3,0**
	Написано $v = v_0 + u$ или есть идея, что в СО воды фазовая скорость равна v_0, но нет формулы (6).	*0,5*	
	Формула (7) или (8): $v = v_0\left(1 + \frac{u}{c}\left(n - \frac{1}{n}\right)\right)$ или $A = n - \frac{1}{n}$	0,7	
	Численный ответ (8): $A = 0{,}578$	0,3	
6.4	Формула (9): $\Delta n = c\left\lvert\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right\rvert$	1,0	**2,5**
	Формула (10): $N\lambda = \varDelta n \cdot l$	0,5	
	Формула (11): $N = A \cdot \frac{u}{c} \cdot \frac{nl}{\lambda}$ или $N = \frac{u}{c} \cdot \frac{l}{\lambda}(n^2-1)$	0,7	
	Численный ответ (11): $N = 0{,}1$	0,3	
Итого		**10,0**	

7. Сгорание угля

Уравнение состояния воздуха в начальный момент выражается как

$$p_a S h_0 = \nu_a R T_0, \tag{1}$$

где ν_a – количество воздуха, которое можно разложить на кислород и смесь остальных газов ν' (в основном азот):

$$\nu_a = \frac{m_O}{\mu_a} + \nu'. \tag{2}$$

Участник может также записать $\nu' = m'/\mu_a$, где m' – масса остальных газов в воздухе. По условию задана массовая доля кислорода

$$m_O = \eta \cdot \mu_a \nu_a, \tag{3}$$

а реакция протекает таким образом, что количество углекислого газа в молях равно таковому у исходного кислорода, то есть в конце будет тоже

$$\nu_0 = \frac{m_O}{\mu_O} \tag{4}$$

моль углекислого газа. Таким образом, количество молей в смеси не изменилось, и по окончанию горения

$$p_a S(h_0 + \Delta h) = \nu_a R T. \tag{5}$$

По первому началу термодинамики, высвобожденная теплота

$$W = \nu_0 Q \tag{6}$$

газа уходит на работу по расширению поршня

$$A = p_a S \Delta h \tag{7}$$

и изменение внутренней энергии ΔU через соотношение

$$W = A + \Delta U. \tag{8}$$

Посчитаем изменение внутренней энергии. В начале она равнялась

$$U_i = \frac{5}{2} \nu_a R T_0, \tag{9}$$

а в конце складывается из внутренней энергии всех компонентов смеси:

$$U_f = 3\nu_0 R T + \frac{5}{2} \nu' R T. \tag{10}$$

Собирая вместе все вышенаписанные уравнения, получаем

$$T = T_0 \cdot \frac{1 + \dfrac{2Q\eta\mu_a}{7\mu_O R T_0}}{1 - \dfrac{5}{7}\eta + \dfrac{6}{7}\dfrac{\eta\mu_a}{\mu_O}} = 3074\ \text{К}. \tag{11}$$

$$\Delta h = h_0\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = \eta h_0 \cdot \frac{\frac{5}{7} + \frac{2\mu_a}{7\mu_O}\left(\frac{Q}{RT_0} - 3\right)}{1 - \frac{5}{7}\eta + \frac{6}{7}\frac{\eta\mu_a}{\mu_O}} = 1{,}85 \text{ м.} \qquad (12)$$

Пожалуй, потребуется очень высокий цилиндр, который также должен быть уж очень хорошим теплоизолятором!

В конце реакции средняя молярная масса содержимого цилиндра уже не будет μ_a – нужно рассчитать его по формуле среднего:

$$\mu_{av} = \frac{\nu_0 \cdot \mu_{CO_2} + m'}{\nu_a}. \qquad (13)$$

Молярная масса углекислого газа равна

$$\mu_{CO_2} = 12 + 2 \cdot 16 = 44 \text{ г/моль,} \qquad (14)$$

так что в результате получаем

$$\mu_{av} = \mu_a(1-\eta) + \frac{\eta\mu_a\mu_{CO_2}}{\mu_O} = 31{,}5 \text{ г/моль.} \qquad (15)$$

Углекислый газ тяжелее кислорода – довольно очевидно, что средняя молярная масса должна незначительно повыситься. Исходя из уравнения химической реакции, прореагировать с кислородом тоже должно ν_0 молей угля, так что

$$m = \mu_C\nu_0. \qquad (16)$$

Беря в учёт (1), (3) и (4), получаем

$$m = \frac{\eta\mu_C\mu_a p_a S h_0}{\mu_O R T_0} = 0{,}8 \text{ г.} \qquad (17)$$

<table>
<tr><th>№</th><th>Содержание</th><th colspan="2">Баллы</th></tr>
<tr><td rowspan="12">7.1</td><td>Формула (1): $p_a S h_0 = \nu_a R T_0$</td><td>0,5</td><td rowspan="12">6,5</td></tr>
<tr><td>Формула (2): $\nu_a = \frac{m_O}{\mu_a} + \nu'$</td><td>0,7</td></tr>
<tr><td>Формула (3): $m_O = \eta \cdot \mu_a \nu_a$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Формула (4): $\nu_0 = \frac{m_O}{\mu_O}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Формула (5): $p_a S(h_0 + \Delta h) = \nu_a R T$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Формула (6): $W = \nu_0 Q$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Формула (7): $A = p_a S \Delta h$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Формула (8): $W = A + \Delta U$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Формула (9): $U_i = \frac{5}{2}\nu_a R T_0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Формула (10): $U_f = 3\nu_0 R T + \frac{5}{2}\nu' R T$</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>Формула (11): $T = T_0 \cdot \frac{1 + \frac{2Q\eta\mu_a}{7\mu_O R T_0}}{1 - \frac{5}{7}\eta + \frac{6\eta\mu_a}{7\mu_O}}$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Численное значение (11): $T = 3074$ К</td><td>0,2</td></tr>
</table>

	Формула (12): $\Delta h = \eta h_0 \cdot \frac{\frac{5}{7}+\frac{2\mu_a}{7\mu_O}\left(\frac{Q}{RT_0}-3\right)}{1-\frac{5}{7}\eta+\frac{6\eta\mu_a}{7\,\mu_O}}$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.	0,5	
	Численное значение (12): $\Delta h = 1{,}85$ м	0,2	
7.2	Формула (13): $\mu_{av} = \frac{\nu_0 \cdot \mu_{CO_2} + m'}{\nu_a}$	1,0	**2,0**
	Формула (14): $\mu_{CO_2} = 12 + 2 \cdot 16 = 44$ г/моль	0,3	
	Формула (15): $\mu_{av} = \mu_a(1-\eta) + \frac{\eta\mu_a\mu_{CO_2}}{\mu_O}$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.	0,4	
	Численный ответ (15): $\mu_{av} = 31{,}5$ г/моль	0,3	
7.3	Формула (16): $m = \mu_C \nu_0$	0,5	**1,5**
	Формула (17): $m = \frac{\eta\mu_C\mu_a p_a S h_0}{\mu_O R T_0}$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.	0,7	
	Численный ответ (17): $m = 0{,}8$ г.	0,3	
Итого		**10,0**	

8. Магнитный щит

Электрон, движущийся по окружности, испытывает силу Лоренца

$$F = eB_0 v_0. \tag{1}$$

Эта сила создаёт центростремительное ускорение

$$F = \frac{m v_0^2}{R_0}, \tag{2}$$

и поэтому получаем ответ

$$R_0 = \frac{m v_0}{e B_0}. \tag{3}$$

При переменном магнитном поле появляется вихревое электрическое поле, циркуляция которого, с одной стороны, равна

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r, \tag{4}$$

а эта циркуляция порождается изменением потока $\Phi = B\pi r^2$, то есть (знак минус несущественен)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt}. \tag{5}$$

Это электрическое поле тангенциально воздействует на движение электрона, ускоряя его при увеличении напряжённости магнитного поля, так что

$$m \frac{dv}{dt} = eE. \tag{6}$$

Объединяя (3)-(6), получаем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{2B} \frac{dB}{dt}$$

и интегрированием выводим адиабатический инвариант

$$\frac{v^2}{B} = \text{const}.$$

Поэтому искомый коэффициент равен

$$\alpha = -1/2. \tag{7}$$

Теперь применим данный результат на движение электрона в магнитосфере. Его скорость складывается из скорости по окружности v_φ и вдоль оси Земли v_z – вклад в инвариант вносит только первая компонента. Таким образом,

$$v_\varphi = v_0 \sin \alpha\,. \tag{8}$$

и поскольку магнитное поле не совершает работы по изменению кинетической энергии электрона, его полная скорость всегда равна v_0. Итак, получаем новый инвариант

$$\frac{\sin^2\alpha}{B_z(z)} = \frac{\sin^2\alpha_0}{B_z(z_0)}, \tag{9}$$

так что зависимость угла α от z, с учётом вида функции B_z, выходит

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-3/2}. \tag{10}$$

Эта зависимость справедлива при $z \geq R_0$, так что α_0 может принимать значения от $90°$ до предельного угла α_1, где последнее определяется тем фактом, что в критическом случае электрон наклонится на угол $\alpha = \pi/2$ и будет вращаться у поверхности Земли. Поэтому

$$\alpha_1 = \arcsin\left(1 \cdot \left(\frac{R_0}{z_0}\right)^{3/2}\right) = 11.1°, \tag{11}$$

и диапазон допустимых значений равен

$$11.1° < \alpha < 90°. \tag{12}$$

При заданном из условия угла $\alpha = 12°$ конечная высота равняется

$$h_1 = z_0 \sin^{2/3}\alpha_0 - R_0 = 0.053R_0 = 338 \text{ км}. \tag{13}$$

В самом начале радиус спирали электрона равен

$$r_0 = \frac{mv_\varphi(z_0)}{eB_z(z_0)}. \tag{14}$$

Подставляя, получаем численно

$$r_0 = \frac{mv_0 \sin\alpha_0\, z_0^3}{eB_0R_0^3} = 18 \text{ мм}. \tag{15}$$

В произвольный момент времени, используя (14) для общего случая и используя инвариант (9), получаем

$$r(z) = r_0 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/2}. \tag{16}$$

№	Содержание	Баллы	
8.1	Формула (1): $F = eB_0v_0$	0.5	**1.5**
	Формула (2): $F = \frac{mv_0^2}{R_0}$	0.5	
	Формула (3): $R_0 = \frac{mv_0}{eB_0}$	0.5	
8.2	Формула (4): $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 2\pi r$	0.6	**2.0**
	Формула (5): $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2$	0.6	
	Формула (6): $m\frac{dv}{dt} = eE$	0.3	
	Формула (7): $\frac{v^2}{B} = \text{const}$ или $\alpha = -1/2$	0.5	

8.3	Формула (8): $v_\varphi = v_0 \sin\alpha$	0.5	**3.5**
	Формула (9): $\frac{\sin^2\alpha}{B_z(z)} = \frac{\sin^2\alpha_0}{B_z(z_0)}$	1.0	
	Формула (10): $\sin\alpha = \sin\alpha_0 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-3/2}$	0.7	
	Формула (11): $\alpha_1 = \arcsin\left(\left(\frac{R_0}{z_0}\right)^{3/2}\right)$	0.5	
	Численный ответ (11): $\alpha_1 = 11{,}1°$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.	0.3	
	Формула (12): $11.1° < \alpha < 90°$ или просто $11{,}1° < \alpha$	0.5	
8.4	Формула (13): $h_1 = z_0 \sin^{2/3}\alpha_0 - R_0$	0.8	**1.5**
	Забыл $h_1 = z_1 - R_0$ и получил ответ на R_0 больший. Переносится на численный ответ тоже.	-0.2	
	Численный ответ (13): $h_1 = 0{,}053R_0 = 338$ км	0.7	
8.5	Формула (14): $r_0 = \frac{mv_\varphi(z_0)}{eB_z(z_0)}$.	0.3	**1.5**
	Формула (15): $r_0 = \frac{mv_0 \sin\alpha_0 z_0^3}{eB_0R_0^3}$. Если формулы нет, но есть его верное численное значение, ставится полный балл.	0.5	
	Численный ответ (15): $r_0 = 18$ мм	0.2	
	Формула (16): $r(z) = r_0 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/2}$	0.5	
Итого		**10.0**	