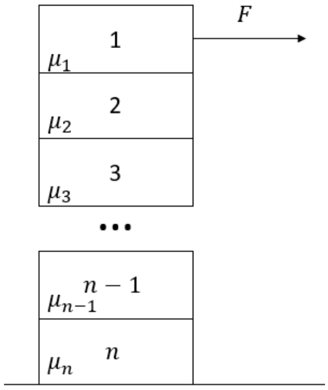
Решение заданий заключительного этапа
Республиканской юниорской олимпиады по физике, 2024
8 класс

Задача 1 [7 баллов]. Одинаковые n блоков массой m каждый поставили друг на друга в башню. Коэффициент трения блока k $(1 \leq k \leq n)$ с нижестоящей поверхностью равен μ_k (считайте, что $\mu_k \leq 1$). На самый верхний блок приложили силу F, при этом вся башня начала двигаться как одно, то есть относительного движения между блоками нет. Для такого движения:



1.1 Зная μ_n, найдите минимально возможные значения для всех μ_k в зависимости от k и заданных выше величин.
1.2 Найдите максимально возможное значение F, и при каком значении μ_n оно достигается.
1.3 Найдите максимально возможное значение μ_n.

Решение

Если башня двигается вся вместе, то её движение можно рассматривать как движение одного тела. Тогда для неё можно написать второй закон Ньютона (f_n – сила трения, действующая на нижний блок со стороны земли):

$$F - f_n = nma. \tag{1}$$

$$f_n = \mu_n nmg \tag{2}$$

Откуда следует $a = \frac{F-f_n}{nm}$. Рассмотрим блок k. Так как все блоки выше него не проскальзывают, их всех можно считать одним телом массой km. Тогда для этого тела можно записать второй закон Ньютона как

$$F - f_k = kma, \tag{3}$$

$$f_k \leq \mu_k kmg. \tag{4}$$

Отсюда

$$\mu_k \geq \frac{F - kma}{kmg} = \frac{F}{kmg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n.$$

Значит, минимальные значения μ_k будут

$$\mu_k = \frac{F}{kmg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n \tag{5}$$

Отсюда, учитывая, что коэффициент трения не превышает 1,

$$\frac{F}{kmg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n \leq 1 \ (\forall k) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F}{mg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n \leq 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow F \leq \frac{(1-\mu_n)n}{n-1} mg \tag{6}$$

Значит максимально возможное значение силы достигается при $\mu_n = 0$:

$$F = \frac{n}{n-1}mg \tag{7}$$

Из условия движения башни следует

$$\mu_n nmg \leq F \tag{8}$$

Тогда

$$\mu_n nmg \leq \frac{(1-\mu_n)n}{n-1}mg \rightarrow \mu_n \leq \frac{1}{n} \tag{9}$$

	Содержание	**Баллы**
1	Закон движения (1): $F - f_n = nma$	0.5
2	Сила трения (2): $f_n = \mu_n nmg$	0.5
3	Закон движения (3): $F - f_k = kma$	1.0
4	Сила трения (4) с учётом неравенства: $f_k \leq \mu_k kmg$	0.5
5	Получены минимальные значения μ_k (5): $\mu_k = \frac{F}{kmg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n$	1.25
6	Получено неравенство (6): $\frac{F}{mg} - \frac{F}{nmg} + \mu_n \leq 1$	1.25
7	F максимально при $\mu_n = 0$	0.5
8	Получено максимальное значение F (7): $F = \frac{n}{n-1}mg$	0.5
9	Найдено максимальное значение μ_n (9): $\mu_n \leq \frac{1}{n}$	1.0
	Всего	**7.0**

Задача 2 [7 баллов].

Школьник Галым решил поэкспериментировать с электроплитой. Подключив эту плиту к генератору, он установил напряжение 220 В и растопил некоторое количество льда в кастрюле за время 3 секунды. Затем, он решил установить напряжение на уровне 110 В и вскипятить это же количество воды в кастрюле геометрические размеры, которой в 2 раза больше. Как оказалось, вода нагрелась от 99℃ до температуры кипения за 2 секунды, и вся вода выпарилась за время 20 минут. Определите температуру среды, считая, что мощность теплообмена с окружающей средой на единицу площади пропорциональна разности температур. Теплоемкостью кастрюли можно пренебречь. Считайте, что коэффициент теплообмена с внешней средой для воды и льда одинаковый. Удельная теплота парообразования воды и удельная теплоемкость воды соответственно равны $r = 2{,}3$ МДж/кг и $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot^0$ С), удельная теплота плавления льда равна $\lambda = 330$ кДж/кг.

Решение

$$\frac{U_1^2}{R}t_1 = \lambda m + \alpha\,(0-T)St_1 \qquad \text{[1 балл]} \tag{1}$$

$$\frac{U_2^2}{R}t_3 = rm + \alpha\,(100-T)4St_3 \qquad \text{[1 балл]} \tag{2}$$

Используя тот факт, что разность температур мала, теплообмен для последнего случая можно записать как показано в формуле (3).

$$\frac{U_2^2}{R}t_2 = cm\Delta T + \alpha(T_{\text{ср}} - T)4St_2 \quad [1 \text{ балл}] \quad (3)$$

$$T_{\text{ср}} = 99.5°\text{C} \quad [1 \text{ балл}] \quad (4)$$

Поделив уравнения (2) и (3) друг на друга, получаем равенство ниже.

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{rm+\alpha\,(100-T)4St_3}{cm\Delta T+\alpha(T_{\text{ср}}-T)4St_2} \quad [1 \text{ балл}] \quad (5)$$

$$(cm\Delta T + \alpha(T_{\text{ср}} - T)4St_2)t_3 = (rm + \alpha\,(100 - T)4St_3)t_2 \quad (6)$$

$$\alpha S = \frac{cm\Delta Tt_3 - rmt_2}{4(100-T_{\text{ср}})t_2t_3} \quad (7)$$

Поделив уравнения (1) и (2) друг на друга, получаем равенство ниже.

$$\frac{U_1^2t_1}{U_2^2t_3} = \frac{\lambda m+\alpha\,(0-T)St_1}{rm+\alpha\,(100-T)4St_3} \quad (8)$$

$$U_1^2t_1(r + 4(100 - T)t_3\frac{c\Delta Tt_3-rt_2}{4(100-T_{\text{ср}})t_2t_3}) = U_2^2t_3(\lambda + (0 - T)t_1\frac{c\Delta Tt_3-rt_2}{4(100-T_{\text{ср}})t_2t_3}) \quad (9)$$

$$\beta = \frac{c\Delta Tt_3-rt_2}{4(100-T_{\text{ср}})t_2t_3} = 91.67 \quad (10)$$

$$U_1^2t_1(r + 4(100 - T)t_3\beta) = U_2^2t_3(\lambda + (0 - T)t_1\beta) \quad (11)$$

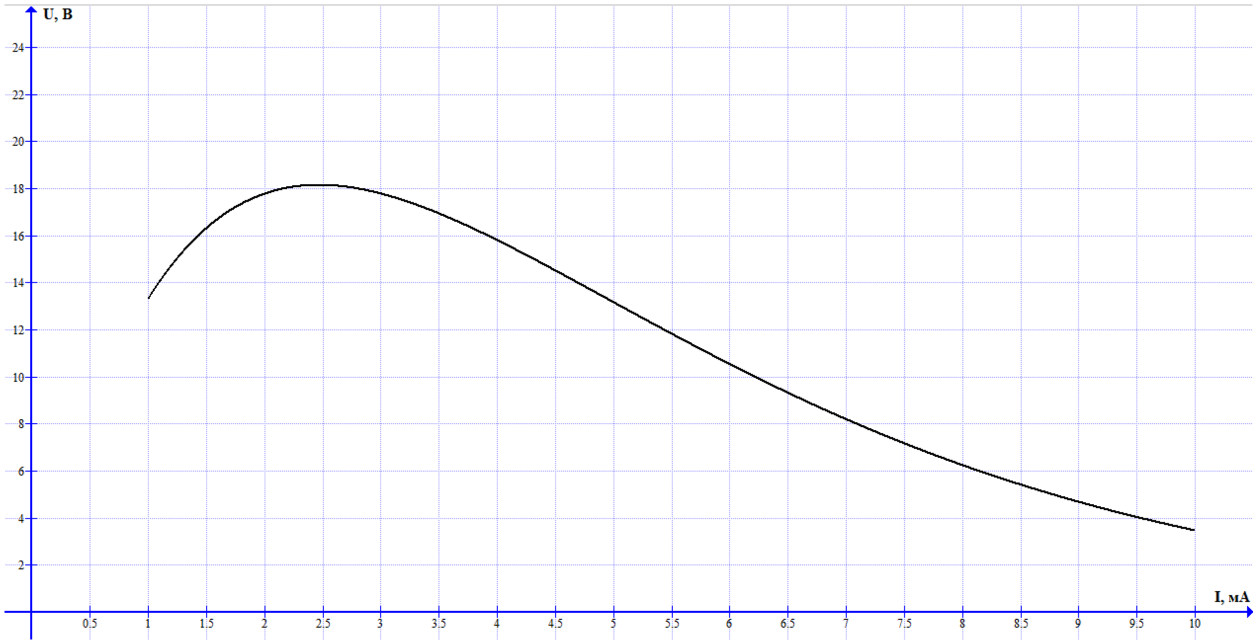
$$U_1^2t_1r + U_1^2t_14 * 100t_3\beta - U_1^2t_14Tt_3\beta = U_2^2t_3\lambda - U_2^2t_3Tt_1\beta \quad (12)$$

$$U_1^2t_1r + U_1^2t_1 * 4 * 100t_3\beta - U_2^2t_3\lambda = U_1^2t_14Tt_3\beta - U_2^2t_3Tt_1\beta \quad (13)$$

$$T = \frac{U_1^2t_1r+U_1^2t_1*4*100t_3\beta-U_2^2t_3\lambda}{U_1^2t_14t_3\beta-U_2^2t_3t_1\beta} = 32.25\ °\text{C} \quad (14)$$

Содержание	**Баллы**
Формула 1: $\frac{U_1^2}{R}t_1 = \lambda m + \alpha\,(0 - T)St_1$	1.0
Формула 2: $\frac{U_3^2}{R}t_3 = rm + \alpha\,(100 - T)4St_3$	1.0
Формула 3: $\frac{U_2^2}{R}t_2 = cm\Delta T + \alpha(T_{\text{ср}} - T)4St_2$	1.0
Формула 4: $T_{\text{ср}} = 99.5°\text{C}$	1.0
Формула 7: $\alpha S = \frac{cm\Delta Tt_3-rmt_2}{4(100-T_{\text{ср}})t_2t_3}$	1.0
Формула 14: $T = \frac{U_1^2t_1r+U_1^2t_1*4*100t_3\beta-U_2^2t_3\lambda}{U_1^2t_14t_3\beta-U_2^2t_3t_1\beta}$	1.0
Правильный числовой ответ: 32.25 °C	1.0
Всего	**7.0**

Задача 3 [8 баллов]. Нелинейный элемент электрической цепи (далее - НЭ) имеет в рабочем диапазоне токов $1-10$ мА нелинейную зависимость между приложенным к нему напряжением и проходящим через него током. Зависимость представлена на графике.

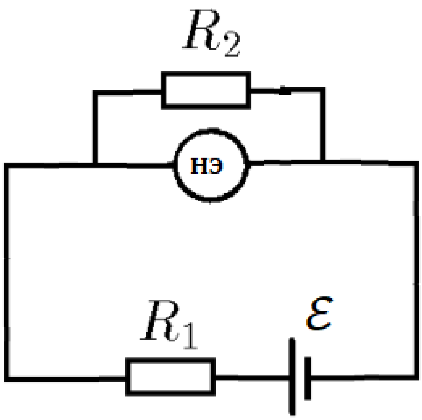


3.1 Какой ток течёт в цепи при последовательном включении НЭ с резистором $R = 2$ кОм к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В?

3.2 Какое минимальное сопротивление можно подключить последовательно с НЭ к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В для работы схемы в рабочем диапазоне?

3.3 Какую максимальную ЭДС может иметь источник тока, подключенный последовательно с резистором $R = 2$ кОм и НЭ для работы схемы в рабочем диапазоне?

3.4 Каково напряжение на НЭ и общий ток в цепи при подключении его по схеме (см.рис)? $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $\mathcal{E} = 45$ В.



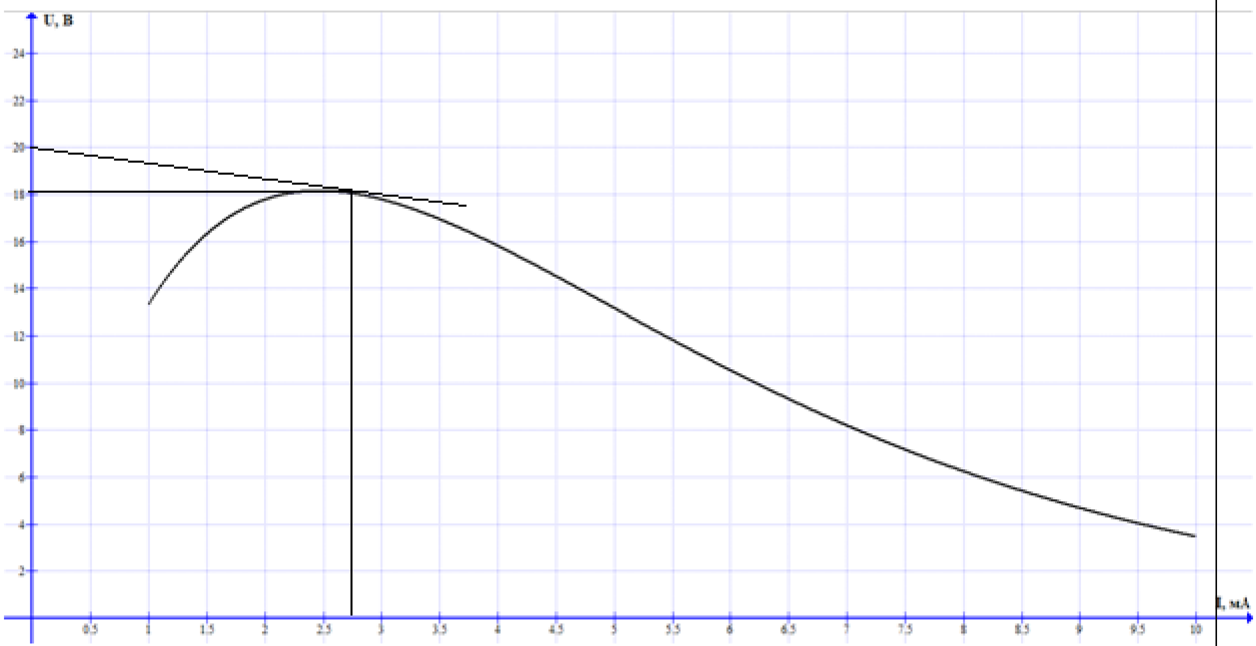
Решение

*Решение задачи через построение нового графика (- 20% отведенного балла), а также решение перебором вариантов (- 50% отведенного балла) считаются менее точными и эти решения будут оценены ниже чем метод пересечения графиков.

3.1 Уравнение $\mathcal{E} - IR = U_{\text{НЭ}}$ решается графически **(0.5 балла)***

$I \approx 1{,}6$ мА **(0.5 балла)***

3.2 Сопротивление - угловой наклон графика, при котором уравнение ещё имеет решение **(1 балл)***



$R \approx 720$ Ом **(1 балл)***

3.3 График с угловым наклоном 2 кОм который ещё имеет решение **(1 балл)***

Приводит к значению $\mathcal{E} \approx 23{,}4$ В **(1 балл)***

3.4

$I_1 = I_2 + I_{НЭ}$ **(0.5 балла)**

$U_2 = U_{НЭ}$ **(0.5 балла)**

$I_2 = \frac{U_{НЭ}}{R_2}$ **(0.5 балла)**

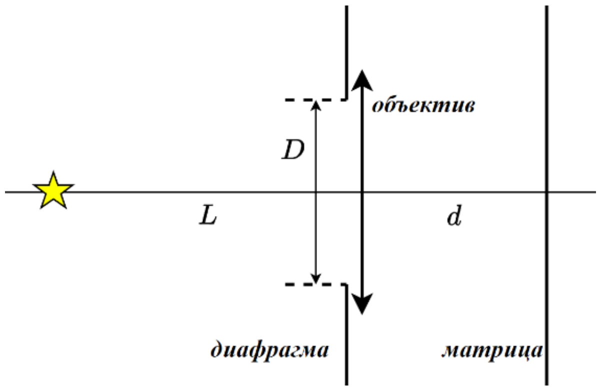
$\frac{\mathcal{E} - U_{НЭ}}{R_1} = \frac{U_{НЭ}}{R_2} + I_{НЭ}$ **(0.5 балла)**

$$U_{НЭ} = \frac{\mathcal{E} - I_{НЭ}R_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = 15 - \frac{2}{3} I_{НЭ}$$

Уравнение решается графически

$I \approx 1.05$ мА **(1 балл)***

Задача 4 [8 баллов]. Объектив фотокамеры состоит из системы собирающих линз, формирующих изображение на фотоматрице. Рассмотрим простейшую модель фотокамеры, объективом которой служит одна собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ мм, которая формирует изображение предмета на матрице (непрозрачном экране) на некотором эффективном расстоянии d от линзы. Ширина линзы регулируется непрозрачной диафрагмой; в данной задаче эта ширина равна $D = 20$ мм.



Фотокамера фиксирует изображение точечного источника света. Оказалось, при фотографировании предмета, находящегося на расстоянии $L_0 = 30$ см от объектива, формируется резкое изображение на матрице.

4.1 Выведите формулу для эффективного расстояния d и найдите его числовое значение.

Если расстояние источника $L \neq L_0$, тогда лучи от источника на матрице не будут сходиться в одной точке. Вместо этого появится освещённая область определённых размеров. Чтобы изображение ещё считалось резким, нужно, чтобы диаметр освещённой области на экране не превышал определённого значения a. Пусть в этой задаче $a = 2$ мм. В таком случае фотографируемый предмет может находиться в некотором диапазоне от $L_{\min}$ до $L_{\max}$ – так называемые ближняя и дальняя границы резкости.

4.2 Определите числовые значения ближней и дальней границ резкости.

Теперь ведётся съёмка источника света, находящегося на дне стакана, заполненного водой до высоты $h = 12$ см. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Объектив фотоаппарата находится на расстоянии L от дна стакана.

4.3 Насколько меняются границы резкости из-за съёмки подводного объекта? Иначе говоря, определите новые значения расстояний $L'_{\min}$ и $L'_{\max}$ от источника до объектива. Для лучей, что идут под малыми углами к главной оптической оси системы, $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ для малых углов α в радианной мере.

Решение

Когда предмет находится на L_0, изображение попадает прямо на экран, значит

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{d}, \quad \Rightarrow \quad d = \frac{FL_0}{L_0 - F} = 60 \text{ мм}. \qquad (1) \quad [1.5]$$

Во второй части задачи следует рассмотреть подобие треугольников, получаемых лучами, прошедшими через линзу. Получаются следующие соотношения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L_{\min,\max}} + \frac{1}{d_{1,2}}, \qquad (2) \quad [0.5]$$

$$\frac{D/2}{d_{1,2}} = \frac{a/2}{\pm(d_{1,2} - d)}. \qquad (3) \quad [1.0]$$

Совмещая уравнения (2) и (3), получаем

$$L_{\min,\max} = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{d} \pm \frac{a}{Dd}} = \frac{L_0}{1 \pm \frac{a}{D}\frac{L_0 - F}{F}}. \qquad (4) \quad [0.5]$$

Получаются следующие значения для ближней и дальней границ резкости соответственно:

$$L_{\min} = \frac{L_0}{1 + \frac{a}{D}\frac{L_0 - F}{F}} = 20 \text{ см}, \qquad (5) \quad [0.75]$$

$$L_{\max} = \frac{L_0}{1 - \frac{a}{D}\frac{L_0 - F}{F}} = 60 \text{ см}. \qquad (6) \quad [0.75]$$

Для третьей части нужно рассмотреть поведение параксиальных лучей на выходе из поверхности воды. Из последних двух рисунков в конце решения видно, что выходящие из поверхности воды лучи образуют мнимое изображение, находящееся на глубине

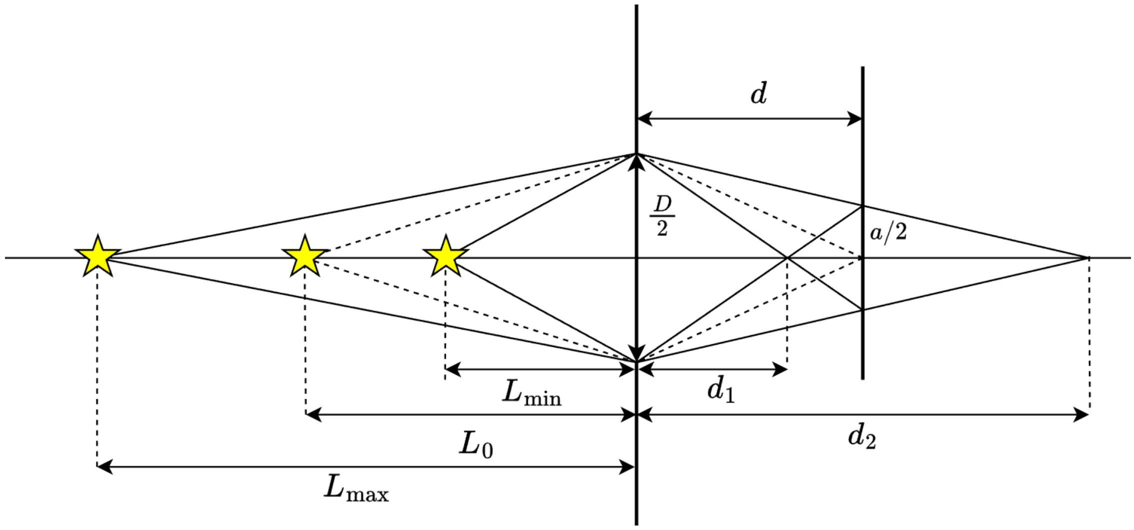
$$H = \frac{h}{n} \qquad (7) \quad [1.5]$$

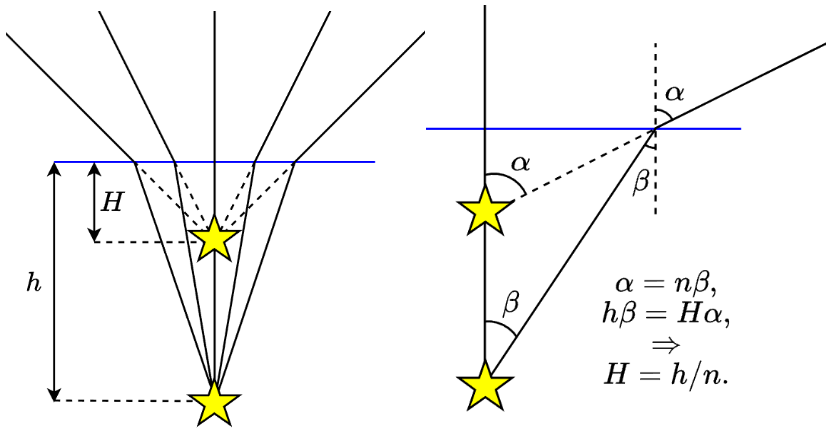
от поверхности воды. Это значит, что фотоаппарат должен фокусироваться на мнимое изображение, которое находится ближе к объективу на величину

$$\Delta L = h - H = h\frac{n-1}{n} = 3 \text{ см}, \qquad (8) \quad [0.5]$$

чем сам источник. Значит, новые значения ближней и дальней границ резкости на ΔL больше их старых значений:

$$L'_{\min} = L_{\min} + \Delta L = 23 \text{ см},$$
$$L'_{\max} = L_{\max} + \Delta L = 63 \text{ см}. \qquad (9) \quad [0.5 \times 2]$$





Задача 4. Фотокамера (8 баллов)		
Формула	**Балл**	**Комментарий**
Формула (1): $\frac{1}{F} = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{d}$	1.0	
Численное значение (1): $d = 60$ мм	0.5	
Формула (2): $\frac{1}{F} = \frac{1}{L_{\min,\max}} + \frac{1}{d_{1,2}}$	0.5	Если верно взяты соотношения для одного из случаев, то данные формулы полностью засчитываются.
Формула (3): $\frac{D/2}{d_{1,2}} = \frac{a/2}{\pm(d_{1,2}-d)}$	1.0	
Формула (4): $L_{\min,\max} = \frac{L_0}{1 \pm \frac{a}{D}\frac{L_0 - F}{F}}$	0.5	
Формула (5): $L_{\min} = 20$ см	0.75	Баллы даются только за численные значения
Формула (6): $L_{\max} = 60$ см	0.75	
Формула (7): $H = \frac{h}{n}$	1.5	Полный балл ставится при наличии уравнения в любом случае. Если есть верная идея (рисунок, текст, уравнения), но нет формулы (7), то ставится +0.5.
Формула (8): $\Delta L = h - H = 3$ см	0.5	Формула: +0.3, численное значение: +0.2.
Формулы (9): $L'_{\min} = L_{\min} + \Delta L = 23$ см, $L'_{\max} = L_{\max} + \Delta L = 63$ см.	1.0	За каждое из двух по +0.5. Если очевидно указано, что границы резкости увеличиваются на 3 см, то ставится +1.0 даже без формул (5)-(6).