Решение заданий заключительного этапа
Республиканской юниорской олимпиады по физике, 2024
7 класс

Задача 1 [7 баллов]. Суэцкий канал — бесшлюзовый судоходный канал в Египте, соединяющий Средиземное и Красное моря. Иногда на Суэцком канале возникает слабое течение, которое может быть направлено либо в одну, либо в другую сторону. По каналу курсирует судно, скорость которого относительно канала постоянна. В течение многих лет судну никогда не удавалось совершить рейс туда и обратно по Суэцкому каналу быстрее, чем за 20 часов, а самый неудачный рейс занял 28 часов. Как-то раз мотор на судне вышел из строя, но благодаря неожиданным обстоятельствам рейс туда и обратно все же состоялся.
1) Какое минимальное время для этого могло потребоваться у судна?
2) После ремонта судно увеличило скорость в четыре раза относительно воды. Какое время теперь может занять рейс туда и обратно?

Решение

1) Быстрый рейс туда и обратно по каналу было совершенно в обе стороны по течению канала.
Относительная скорость судна

$$v_1' = (v_c + v_m) \quad (1)$$

Путь, пройденный судном туда и обратно 2S. S – длина канала.

$$2S = v_1' t_1 \quad (2)$$

Подставляя (1) ур. в (2) получим

$$2S = (v_c + v_m)t_1 \quad (3)$$

Неудачный рейс по каналу туда и обратно был совершен против течения канала
Относительная скорость судна

$$v_2' = (v_c - v_m) \quad (4)$$

Путь, пройденный судном туда и обратно

$$2S = (v_c - v_m)t_2 \quad (5)$$

Когда мотор вышел из строя, судно двигалась туда и обратно по течению канала, со скоростью течения канала
Путь, пройденный судном туда и обратно

$$2S = v_m t_3 \quad (6)$$

Из (3) и (5) уравнение, выходит

$$(v_c + v_m)t_1 = (v_c - v_m)t_2 \tag{7}$$

Из (7) уравнение получаем

$$v_c = 6v_m \tag{8}$$

Приравняв (6) ур. с (3) или с (5) ур.

$$(v_c + v_m)t_1 = v_m t_3 \tag{9}$$

использовав (8) получим

$$7v_m t_1 = v_m t_3 \tag{10}$$

$$t_3 = 140\,ч \tag{11}$$

2) После ремонта судно увеличило скорость в четыре раза относительно воды. Быстрый рейс туда и обратно в этом случае

$$2S = (4v_c + v_m)\tau_1 \tag{12}$$

Приравняв (12) с (6) и использовав (8) получим

$$25\tau_1 = t_3 \tag{13}$$

$$\tau_1 = 5,6\,ч \tag{14}$$

Неудачный рейс туда и обратно по каналу

$$2S = (4v_c - v_m)\tau_2 \tag{15}$$

Приравняв (15) с (6) и использовав (8) получим

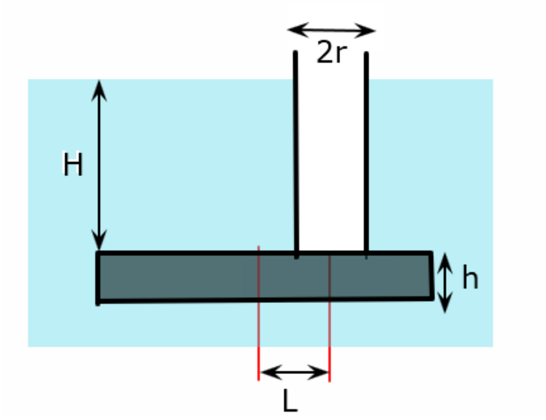
$$23\tau_2 = t_3 \tag{16}$$

$$\tau_2 \approx 6,1ч \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \tau_1 \le t \le \tau_2 \\ 5,6\ ч \le t \le 6,1ч \end{gathered} \tag{18}$$

Содержание		Баллы
1	$v_1^{'} = (v_c + v_m)$	0.25
2	$2S = (v_c + v_m)t_1$	0.75
3	$v_2^{'} = (v_c - v_m)$	0.25
5	$2S = (v_c - v_m)t_2$	0.75
6	$2S = v_m t_3$	0.75
8	$v_c = 6v_m$	0.5
9	$7v_m t_1 = v_m t_3$	0.5
10	$t_3 = 140\,ч$	0.25
11	$2S = (4v_c + v_m)\tau_1$	0.75
12	$\tau_1 = 5,6\,ч$	0.5
13	$2S = (4v_c - v_m)\tau_2$	0.75
14	$\tau_2 \approx 6,1ч$	0.5
15	$\tau_1 \le t \le \tau_2$ $5,6\ ч \le t \le 6,1ч$	0.5
Всего		**7.0**

Задача 2 [8 баллов]. Тонкостенный полый открытый с обеих сторон цилиндр закрывают другим сплошным цилиндром радиуса R и высотой h и погружают в воду на глубину H, как показано на рисунке. Расстояние между осями двух цилиндров L. За счет давления воды оба цилиндра прижаты друг к другу. Плотность сплошного цилиндра ρ и плотность воды $\rho_в$.



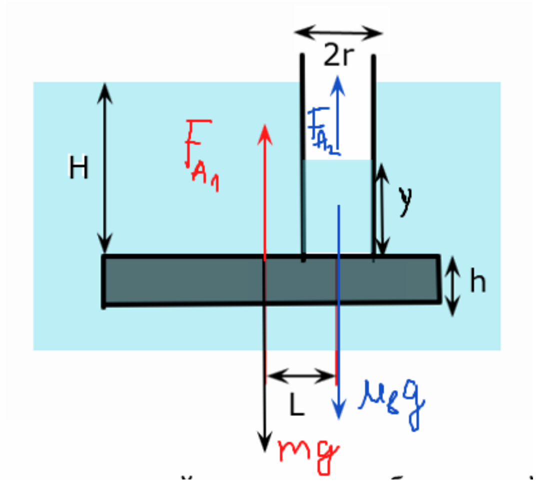
1) Определите уровень воды, необходимого налить в полый цилиндр, чтобы нижний цилиндр, плотность которого больше плотности воды $\rho > \rho_в$ отделился от нее.

2) Определите уровень воды, необходимого налить в полый цилиндр, чтобы нижний цилиндр, плотность которого меньше плотности воды $\rho < \rho_в$ всплыл.

Решение

1) При $\rho > \rho_в$ рассмотрим два случая отделения сплошного цилинда.

Первый случай - вращение сплошного цилиндра относительно правого края полого цилиндра. В этом случае нижний цилиндр начнет поварачивать, нарушится равновесие и нижний цилиндр упадет.



Моменты сил относительно правого края полого цилиндра

$$M_1 = F_{A1}(L + r) \quad (1)$$

$$M_2 = mg(L + r) \quad (2)$$

$$M_3 = F_{A2}r \quad (3)$$

$$M_4 = M_в gr \quad (4)$$

Выталкивающая сила Архимеда

$$F_{A1} = \rho_в g \pi R^2 h \quad (5)$$

$$F_{A2} = \rho_в g \pi r^2 H \tag{6}$$

Второе условие равновесия

$$M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0 \tag{7}$$

Подставляя (1), (2), (3) и (4) в (7) получим

$$F_{A1}(L+r) - mg(L+r) + F_{A2}r - M_в gr = 0 \tag{8}$$

Масса сплошного цилиндра

$$m = \rho \pi R^2 h \tag{9}$$

масса воды которе необходимо налить в полый цилиндр

$$M_в = \rho_в \pi r^2 y \tag{10}$$

Учитывая (5), (6), (9) и (10) уравнения (8) уравнение примет следующий вид

$$\rho_в g \pi R^2 h(L+r) - \rho \pi R^2 hg(L+r) + \rho_в g \pi r^2 Hr - \rho_в \pi r^2 ygr = 0 \tag{11}$$

$$y = H - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_в} - 1\right)(\frac{L}{r} + 1) \tag{12}$$

Второй случай – отделение сплошного цилиндра без вращения.
Для этого должно выполняться первое условие равновесия

$$F_{A1} - mg + F_{A2} - M_в g = 0 \tag{13}$$

$$\rho_в g \pi R^2 h - \rho \pi R^2 hg + \rho_в g \pi r^2 H - \rho_в \pi r^2 yg = 0 \tag{14}$$

$$y = H - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_в} - 1\right)h \tag{15}$$

2) При $\rho < \rho_в$ будет вращение относительно левого края полого цилиндра

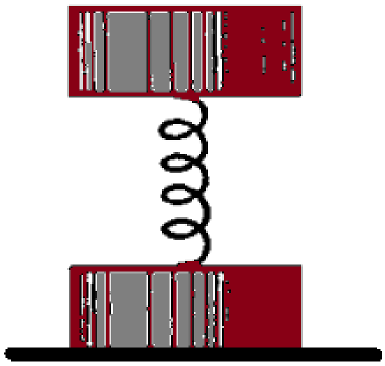
$$F_{A1}(L-r) - mg(L-r) + F_{A2}r - M_в gr = 0 \tag{16}$$

$$\rho_в g \pi R^2 h(L-r) - \rho \pi R^2 hg(L-r) + \rho_в g \pi r^2 Hr - \rho_в \pi r^2 ygr = 0 \tag{17}$$

$$y = H - \frac{R^2}{r^2}h\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right)(\frac{L}{r} + 1) \tag{18}$$

Содержание		Баллы
1	$M_1 = F_{A1}(L+r)$	0.25
2	$M_2 = mg(L+r)$	0.25
3	$M_3 = F_{A2}r$	0.25
4	$M_4 = M_в gr$	0,25
5	$F_{A1} = \rho_в g\pi R^2 h$	0,25
6	$F_{A2} = \rho_в g\pi r^2 H$	0.25
7	$m = \rho\pi R^2 h$	0.25
8	$M_в = \rho_в \pi r^2 y$	0.25
9	$F_{A1}(L+r) - mg(L+r) + F_{A2}r - M_в gr = 0$	1
10	$\rho_в g\pi R^2 h(L+r) - \rho\pi R^2 hg(L+r) + \rho_в g\pi r^2 Hr - \rho_в \pi r^2 ygr = 0$	0.5
11	$y = H - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_в} - 1\right)\left(\frac{L}{r} + 1\right)$	0.5
12	$F_{A1} - mg + F_{A2} - M_в g = 0$	1
13	$\rho_в g\pi R^2 h - \rho\pi R^2 hg + \rho_в g\pi r^2 H - \rho_в \pi r^2 yg = 0$	0.5
14	$y = H - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{\rho}{\rho_в} - 1\right)h$	0.5
15	$F_{A1}(L-r) - mg(L-r) + F_{A2}r - M_в gr = 0$	1
16	$\rho_в g\pi R^2 h(L-r) - \rho\pi R^2 hg(L-r) + \rho_в g\pi r^2 Hr - \rho_в \pi r^2 ygr = 0$	0.5
17	$y = H - \frac{R^2}{r^2}h\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right)\left(\frac{L}{r} + 1\right)$	0.5
Всего		**8.0**

Задача 3 [8 баллов]. Два груза одинаковой массы $m = 80$ г соединённые пружиной жёсткости $k = 200$ Н/м, стоят на столе (см.рис). При расчётах примите ускорение свободного падения равным $g = 10$ Н/кг. Пружина колеблется только вертикально.



Верхний груз поднимают на $x = 0{,}6$ см над положением равновесия и отпускают.

3.1 Каково максимальное сжатие пружины в процессе движения?

3.2 Каково сжатие (или удлинение) пружины, в момент, когда скорость верхнего груза максимальна?

3.3 Чему равна эта скорость?

3.4 Какую вертикальную скорость необходимо сообщить нижнему грузу в положении равновесия, чтобы в процессе движения поднять нижний груз?

Решение

3.1 Изначальное сжатие $\frac{mg}{k} = 0{,}4$ см

$x - \frac{mg}{k}$ – растяжение пружины

$x - \frac{mg}{k} + x'$ - путь , пройденный грузом

x' - сжатие

$$\frac{k\left(x - \frac{mg}{k}\right)^2}{2} + mg\left(x - \frac{mg}{k} + x'\right) = \frac{kx'^2}{2}$$

$$\frac{k\left(x' - x + \frac{mg}{k}\right)\left(x' + x - \frac{mg}{k}\right)}{2} = mg\left(x - \frac{mg}{k} + x'\right)$$

$$x' = x + \frac{mg}{k} = 1 \text{ см}$$

Альтернативное решение:

Так как груз в положении равновесия, суммарная сила, действующая на него равна нулю. При смещении на Δx суммарная сила, действующая на него kΔx и эффективная потенциальная энергия $\frac{k\Delta x^2}{2}$ равна в верхнем и нижнем крайних положениях. Поэтом груз отклонится при возвращении вниз на x от положения равновесия, а сжатие пружины станет равно

$$x' = x + \frac{mg}{k}$$

3.2 Суммарная сила направлена вниз и разгоняет груз, в некоторый момент равна нулю, затем меняет знак и тормозит груз. Скорость максимальна в равновесном положении, где суммарная сила равна нулю, при сжатии $\frac{mg}{k}$

3.3. $\frac{k\left(x-\frac{mg}{k}\right)^2}{2}+mgx=\frac{k(\frac{mg}{k})^2}{2}+\frac{mv^2}{2}$ **(1.5 балла)**

$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}=0{,}3\text{ м/с}$ **(1 балл)**

Альтернативное решение:

Если пользоваться эффективной потенциальной энергией

$\frac{kx^2}{2}=\frac{mv^2}{2}$

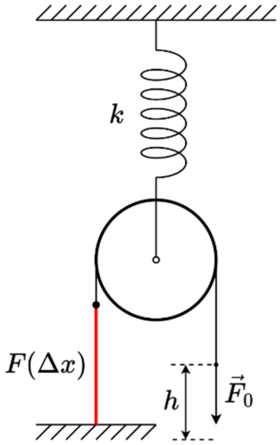
$$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}=0{,}3\text{ м/с}$$

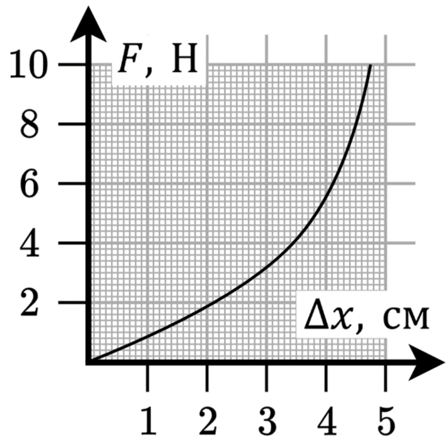
3.4. Чтобы груз не поднялся необходима мгновенная остановка скорости. Но скорость, сообщённая грузу, не может уменьшиться мгновенно под действием результирующей силы. Поэтому любая сообщённая грузу скорость вызывает его поднятие. **(1 балл)**

Содержание	Баллы
$\frac{mg}{k}=0{,}4\text{ см}$	0.5
$x-\frac{mg}{k}$	0.5
$x-\frac{mg}{k}+x'$	0.5
$\frac{k\left(x-\frac{mg}{k}\right)^2}{2}+mg\left(x-\frac{mg}{k}+x'\right)=\frac{kx'^2}{2}$	1.5
$\frac{k\left(x'-x+\frac{mg}{k}\right)\left(x'+x-\frac{mg}{k}\right)}{2}=mg\left(x-\frac{mg}{k}+x'\right)$	0.5
$x'=x+\frac{mg}{k}=1\text{ см}$	0.5
Скорость максимальна в равновесном положении, где суммарная сила равна нулю, при сжатии $\frac{mg}{k}$	1.0
$\frac{k\left(x-\frac{mg}{k}\right)^2}{2}+mgx=\frac{k(\frac{mg}{k})^2}{2}+\frac{mv^2}{2}$	1.0
$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}=0{,}3\text{ м/с}$	1.0
Любая скорость	1.0
Всего	**8.0**

Задача 4 [7 баллов]. В системе, показанном на рисунке слева, резиновый жгут последовательно соединён с нерастяжимой верёвкой, перекинутой через блок, который вертикально подвешен на пружине жёсткости $k=800$ Н/м. За свободный конец верёвки начинают тянуть вниз, медленно увеличивая прикладываемую силу с нуля до F_0. В начальный момент приложения силы резиновый жгут не провисал, но и не был растянут, то есть его начальное удлинение $\Delta x=0$. График зависимости натяжения F резинового жгута от его удлинения Δx показан справа.

4.1 Найдите, на какую высоту h опустился свободный конец верёвки, если $F_0 = 8$ Н.
4.2 Оцените, какую работу A совершили по опусканию верёвки. Известно, что упругая потенциальная энергия жгута при его удлинении на Δx численно равна площади под графиком от 0 до Δx.





Решение

Поскольку сила натяжения верёвки равна F_0 и она последовательно связана с резиновым жгутом, сила натяжения резинового жгута

$$F = F_0. \qquad (1) \quad (0.5 \text{ баллов})$$

Отсюда по графику мы видим, что удлинение верёвки равно

$$\Delta x = 4.5 \text{ см}. \qquad (2) \quad (1.0 \text{ балл})$$

Однако вместе с растяжением жгута, блок также опускается вниз. Пусть z – величина удлинения пружины и, соответственно, смещение блока вниз. Пружина стремится уравновесить как жгут с левой стороны, так и натяжение свободного конца с правой стороны, поэтому

$$F_{\text{пружины}} = F + F_0, \qquad (3) \quad (0.75 \text{ баллов})$$

где упругая сила пружины определяется законом Гука

$$F_{\text{пружины}} = kz. \qquad (4) \quad (0.25 \text{ баллов})$$

На самом деле, здесь нужно учесть также вес блока и удлинение пружины вследствие этого, но поскольку имеет значение дополнительное удлинение пружины только из-за действия внешней силы F_0, это можно опустить из расчётов. Величина смещения свободного конца верёвки является суммой удлинений жгута и пружины,

$$h = \Delta x + 2z. \qquad (5) \quad (1.0 \text{ балл})$$

Собирая всё это, получаем

$$h = \Delta x + \frac{4F_0}{k} = 8.5 \text{ см}. \qquad (6) \quad (0.5 \text{ баллов})$$

Работа, совершённая внешней силой, уходит на увеличение потенциальной энергии жгута и пружины. Энергия пружины равна

$$E_1 = \frac{kz^2}{2}. \qquad (7) \quad (0.75\ \text{баллов})$$

Численный расчёт даёт

$$E_1 = \frac{2F_0^2}{k} = 0.16\ \text{Дж} \qquad (8) \quad (0.25\ \text{баллов})$$

Потенциальная энергия жгута, как было сказано в условии, численно равна площади под графиком Подсчёт вручную даёт ответ

$$E_2 \approx 600\ \text{кл.} \approx 0.12\ \text{Дж} \qquad (9) \quad (1.0\ \text{балл})$$

Поскольку расчёт приблизительный, принимаются ответы от 0.10 до 0.14 джоулей. Итак,

$$E = E_1 + E_2 = 0.28\ \text{Дж} \qquad (10) \quad (1.0\ \text{балл})$$

Содержание	**Баллы**
Идея (1) о равенстве натяжения жгута и внешней силы	0.5
Вычисление (2) по графику: $\Delta x = 4.5$ см.	1.0
Формула (3): $F_{\text{пружины}} = F + F_0 = 2F_0$.	0.75
Формула (4): $F_{\text{пружины}} = kz$.	0.25
Формула (5): $h = \Delta x + 2z$.	1.0
Численное значение (6): $h = 8.5$ см.	0.5
Формула (7): $E_1 = \frac{kz^2}{2}$	0.75
Расчёт (8): $E_1 = \frac{2F_0^2}{k}$ или $E_1 = 0.16$ Дж	0.25
Расчёт (9) по графику: $E_2 \approx 600$ кл. $\in (0.10; 0.14)$ Дж	1.0
Формула (10): $E = E_1 + E_2$	0.5
Численное значение (10): $E = 0.28$ Дж	0.5
Итого	**7.0**