beyond curriculum

Решения задач

Beyond Olympiad по физике #3

9 октября 2022

Предисловие

Перед тем, как вы начнёте читать и разбирать решения, мы предлагаем прочитать правила, по которым мы оцениваем работы

- Перенос ошибки работает только в рамках разных пунктов. Если вы в решении ошиблись, то все баллы, связанные с ошибкой, считаются за ошибку, но в следующем пункте баллы уже не снимаются.

- Неправильное численное значение, полученное исключительно из-за переноса ошибки, но являющееся правильным в рамках вашей работы, считается правильным.

- Частичные баллы не проставляем, если не оговорено иначе в марк-схеме.

- Если вы не написали формулу, но из решения очевидно, что вы её использовали, балл будет проставлен.

- Если балл прописан одновременно за буквенную запись ответа и его численное значение, то даётся половина балла, если участник неправильно посчитал численно из верного уравнения.

Составители Олимпиады:

Младшая лига

- Поимка мяча — Ернұр Қайроллаев;

- Разбавленный кофе — Ерсултан Пітебай;

- Капля воды — Ерсултан Пітебай;

- Чёрный Ящик — Ернұр Қайроллаев.

Старшая лига

- Равновесие — Алишер Еркебаев;

- Светодиод — Алишер Еркебаев;

- Цилиндр с трением — Алишер Еркебаев;

- Область освещения — Алишер Еркебаев.

Младшая лига

1 Поимка мяча

Если мяч падает с произвольной высоты h, то его начальная энергия $E_\Pi = mgh$, и после падения он теряет долю энергии η, а значит:

$$(1-\eta)\,mgh = mgh'$$
$$h' = (1-\eta)\,h$$

Аналогично находим высоту после второго падения $h'' = (1-\eta)\,h' = (1-\eta)^2\,h$, соответственно, отношение высоты после n-ного падения к высоте после падения $n-1$, по счёту, получаем:

$$h_n = h_{n-1}\,(1-\eta) = h_0\,(1-\eta)^n$$

В конце падения, согласно закону сохранения энергии, скорость мяча равна:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_n = mgh_0\,(1-\eta)^n$$

Так как конечная скорость уменьшается с каждым новым повторением, нам нужно найти повторение, после которого скорость будет меньше $v_{\text{cr}} \implies v \le v_{\text{cr}}$. И тогда получаем:

$$(1-\eta)^n \le \frac{v_{\text{cr}}^2}{2gh_0}$$

Используя математическую подсказку ($a = b^n \Rightarrow n = \frac{\ln b}{\ln a}$), находим что $a = 1-\eta$, $b = \frac{2gh_0}{v_{\text{cr}}^2}$, и тогда для конечного броска:

$$n = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\ln \frac{u^2}{2gh_0}}{\ln(1-\eta)} = 1.79$$

Так как n нецелое:

$$n_{fin} = \lceil x \rceil = 2 \quad \text{(округление вверх).}$$

Альтернативный метод:

Подставляя численные значения, находим: $1-\eta = 0.6$, $\dfrac{v_{cr}^2}{2gh_0} = 0.4$. *Приходим к уравнению:*

$$0.6^n \le 0.4$$

Методом подбора находим $n = 2$.

Мяч находится в свободном падении, следовательно (время от отскока до отскока $t_n = 2t_{\text{падения}}$):

$$h_n = h_0(1-\eta)^n = \frac{gt^2_{\text{падения}}}{2} \Longrightarrow t_n = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{1-\eta}^n,$$

Найдём время до первого падения:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \approx 3.16 \text{ с}$$

Как уже было показано в начале решения, высота, на которую поднимется мячик во второй раз: $h_2 = h_0(1-\eta) = 30$м. Так как $t_{\text{падения}} = t_{\text{подъема}}$, находим:

$$t_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \approx 4.90 \text{ с}$$

И после второго отскока мячика:

$$h_3 = h_0(1-\eta)^2 = 18 \text{ м}$$
$$t_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2h_3}{g}} \approx 3.79 \text{ с}$$

Тогда время от момента броска, до момента, когда Мирас ловит мячик:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 11.85 \text{ с}$$

Поимка мяча (7 баллов)	
Балл	Содержание
1.0	Закон сохранения энергии, или другой способ найти зависимость высоты от номера падения
1.0	формула для h
1.0	$(1-\eta)^n \leq \dfrac{v^2_{\text{cr}}}{2gh_0}$
1.5	$n = 2$
0.5	Формула для t_1
0.5	Формула для t_2
0.5	Формула для t_3
0.5	Ответ
0.5	Численное значение

2 Разбавленный кофе

После того, как Рауан отпил кофе из кружки в ней осталось $V_1 = V_0 - x$ кофе с температурой t_0.
Тогда после того, как в кружку долили y воды с температурой t, соотношение между конечной температурой t_f кофе в чашке, x, y можно найти из уравнения теплового баланса:

$$C\left(V_0 - x\right)\left(t_0 - t_f\right) = Cy\left(t_f - t\right) \to x = V_0 - y\frac{t_f - t}{t_0 - t_f}$$

Известно, что $t_f \geq t_{min}$ и $x \geq y$ (объем кружки ограничен).
Учитывая, что в конце Рауан выпьет все кофе после разбавления, получим что выпитый объем равен:

$$V = V_0 - x + y + x = V_0 + y$$

Это означает, что мы должны найти такие t_f и x, чтобы y был максимален. Подставляя x из уравнения для теплового баланса в неравенство для x, y:

$$V_0 - y\frac{t_f - t}{t_0 - t_f} \geq y \Longrightarrow y \leq V_0\frac{t_0 - t_f}{t_0 - t}$$

Отсюда $y_{max} = V_0\dfrac{t_0 - t_{min}}{t_0 - t}$
Ответ:

$$V_{max} = V_0\left(1 + \frac{t_0 - t_{min}}{t_0 - t}\right) = 415 \text{ мл}$$

Разбавленный кофе (6 баллов)	
Балл	Содержание
2	Уравнение теплового баланса (по **1** баллу за теплоту остывания остатка кофе и теплоту нагревания добавленной воды)
1	Формула для x
0.25	$x > y$
0.25	$t_f \geq t_{min}$
1.5	Формула для y_{max}
0.5	Формула для V_{max}
0.5	Численный ответ

3 Капля воды

Запишем формулу тонкой линзы для обоих изображений:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}$$
$$\frac{1}{F} + \frac{1}{F'} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}$$

Учитывая, что изображения резкие, $f_1 = f_2 = f$.
Кроме того, так как на рисунках приведены фотографии во всю длину, то размер изображения для обоих случаев одинаковый. Тогда получим

$$\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2} \Longrightarrow d_1 = \frac{L_1}{L_2} \cdot d_2,$$

где отношение длин объектов можно найти по фотографии, используя линейку, потому что отношение длин при увеличении/уменьшении фотографии не меняется: $L_1 = 15.3$ см, $L_2 = 5.5$ мм
Вместе с этим $d_1 - d_2 = \Delta$
В таком случае, отнимая уравнения для формулы линзы в обоих случаях, получим:

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} = \frac{\Delta}{d_1 d_2} = \frac{(L_1 - L_2)^2}{\Delta L_1 L_2}$$

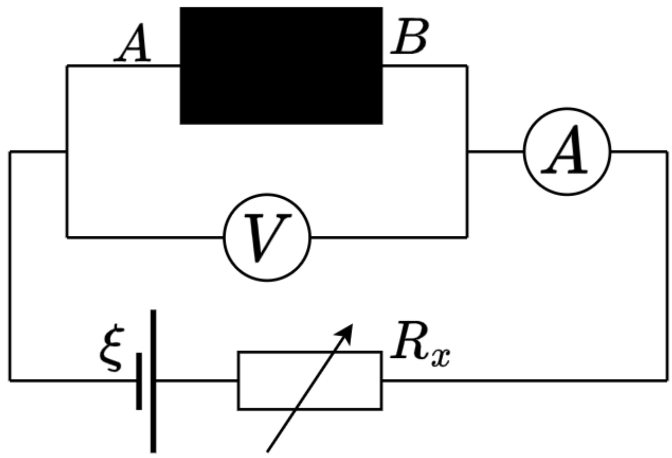
В нашем случае каплю можно рассматривать как плоско-выпуклую линзу, что значит

$$\frac{1}{F'} = \frac{n-1}{R} = \frac{(L_1 - L_2)^2}{\Delta L_1 L_2} \Longrightarrow R = \frac{(n-1)\Delta L_1 L_2}{(L_1 - L_2)^2} = 2.3 \text{ мм}$$

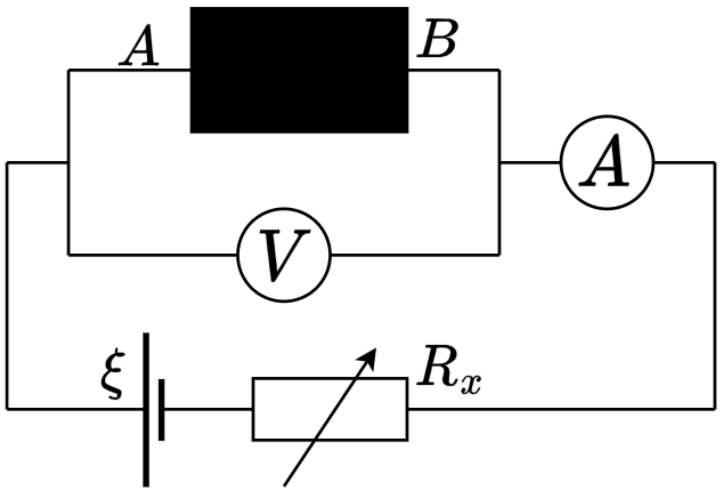
Капля воды (9 баллов)	
Балл	Содержание
1.5	Формула тонкой линзы для первого изображения
1.5	Формула тонкой линзы для второго изображения
1.0	$f_1 = f_2 = f$
1.0	Формула для d_1
0.5	Правильное соотношение L_1/L_2
0.5	Формула для Δ
1.5	Записано $\frac{1}{F'} = \frac{n-1}{R}$
1.0	Конечный ответ
0.5	Численный ответ

4 Черный Ящик

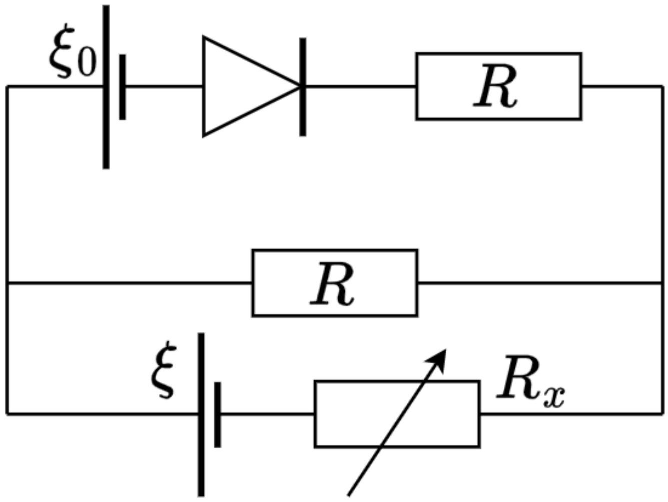
Вольтметр и амперметр позволяют измерить напряжение и ток в Чёрном Ящике. Однако, батарея может выдавать только одно значение напряжения, поэтому нужен какой-то ещё один элемент для того, чтобы изменять силу тока и напряжение. Этот элемент – реостат (резистор, сопротивление которого можно менять). И теперь можно собрать схему:



Батарейка и диод делают Черный Ящик асимметричным, то есть, при изменении полярности подключения, ВАХ будет другим (что эквивалентно отрицательным значениям тока в цепи). А значит, это тоже нужно учесть, и собрать ещё одну схему для того, чтобы нарисовать ВАХ при отрицательных значениях тока в цепи:



Для дальнейшего решения, в обеих цепях можно убрать вольтметр и амперметр, так как они не влияют на токи.



Распишем 2 закон Кирхгофа для маленьких контуров по часовой стрелке для случая, когда диод открыт:

$$\xi - \xi_0 = IR_x + I_1R$$
$$\xi = I_2R + IR_x$$

Очевидно, диод открыт только в том случае, когда $\xi - \xi_0 - IR_x \geq 0$, а иначе ток начнёт течь в обратную сторону, тем самым закрыв диод. Напряжение на Чёрном ящике $U = \xi - IR_x$. Тогда:

$$U - \xi_0 = I_1R$$
$$U = I_2R$$

По первому закону Кирхгофа, находим ток на реостате.

$$I = I_1 + I_2$$

Решая эти уравнения, получаем:

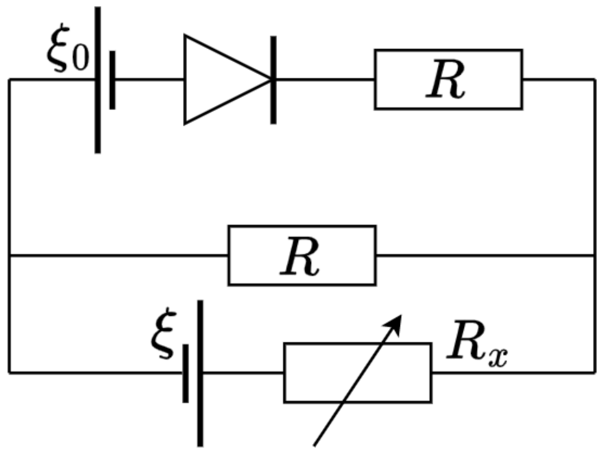
$$U = \frac{\xi_0 + IR}{2} \Longrightarrow I = \frac{2U - \xi_0}{R}$$

При этой же конфигурации цепи, диод закрыт при $\xi - \xi_0 - IR_x < 0$. В каком случае участок самый верхний участок цепи на рисунке будет отрезан (ток по нему не течёт), и тогда по второму закону Кирхгофа:

$$\xi = IR_x + IR$$
$$U = IR \Longrightarrow I = \frac{U}{R}$$

Очевидно, есть граничное условие, которое разделяет два верхних случая: $U = \xi_0$.

$$\xi_0 = \frac{\xi_0 + IR}{2} \Longrightarrow I = \frac{\xi_0}{R}$$



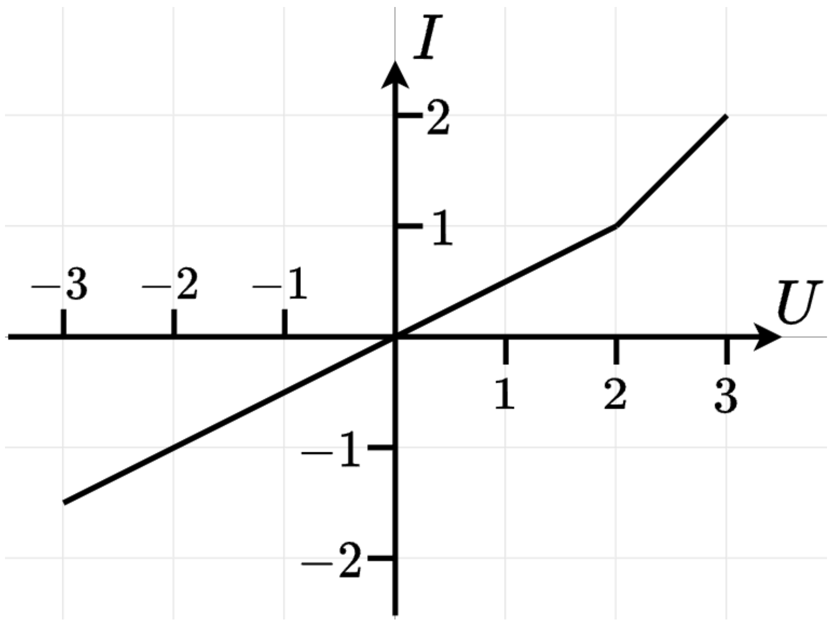
Во втором случае напряжение вдоль большого контура оба источника тока направлены против диода, следовательно, ток по диоду не течёт. И тогда по закону Кирхгофа:

$$\xi = IR_x + IR$$

ЭДС смотрит в другую сторону, но и ток течёт в другую сторону, а значит $U = \xi - IR_x$. И Тогда:

$$I = \frac{U}{R}$$

Остаётся подставить числа во все уравнения, и нарисовать ВАХ (по оси Ox — U, по оси Oy — I)



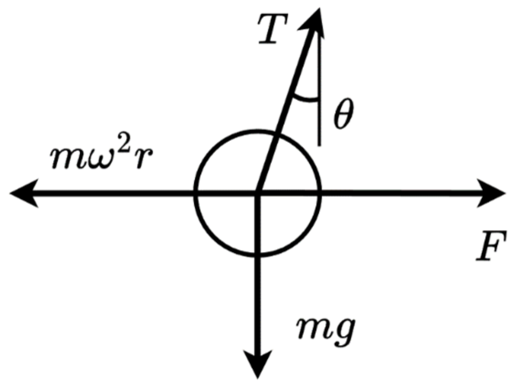
Чёрный ящик (8 баллов)			
Пункт	Балл		Содержание
a	2.0	1.0	Схема 1
		1.0	Схема 2
b	6.0	0.5	Закон Кирхгофа для большого контура
		0.5	Закон Кирхгофа для малого контура
		0.5	Закон Кирхгофа для токов
		0.5	Зависимость $I(U)$
		0.5	Условие зависимости
		0.5	Закон Кирхгофа для $\xi - \xi_0 - IR_X < 0$
		0.5	Вторая зависимость $I(U)$
		0.5	Закон Кирхгофа для конфигурации цепи, где ЭДС вдоль внешнего контура направлены одну сторону
		0.5	Третья зависимость $I(U)$
		0.5	Нарисована ВАХ на промежутке $U \in [-3; 0)$
		0.5	Нарисована ВАХ на промежутке $U \in [0; 1)$
		0.5	Нарисована ВАХ на промежутке $U \in [1; 3)$

Старшая лига

1 Равновесие

a)

Рассмотрим силы, которые действуют на один из шариков. В проекции на горизонтальную и вертикальную оси соответственно:



$$m\omega^2 r = F + T\sin\theta_0, \qquad mg = T\cos\theta_0.$$

Избавляясь от T, и с учётом того, что $r = L\sin\theta$ и $F = k\cdot 2r = 2kL\sin\theta$, получаем

$$\omega^2 L\sin\theta_0 = \frac{2k}{m}L\sin\theta_0 + g\tan\theta_0,$$

или же

$$\cos\theta_0 = \frac{mg/L}{m\omega^2 - 2k}.$$

b)

Модуль значения $\cos\theta_0$ не превышает единицы, а значит

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}.$$

При $\omega < \omega_0$ пружина всегда находится в сжатом положении, а система вращается в равновесии при угле, соответствующему $\theta_0 = 0$.

c)

В итоговую энергию входят: энергия гравитационного взаимодействия $E_g = 2mgh = 2mgL(1-\cos\theta)$, энергия пружины $E_s = \frac{1}{2}k(2r)^2 = 2kL^2\sin^2\theta$ и энергия вращательного движения $E_p = -\frac{1}{2}\cdot 2m\omega^2 r^2 = -m\omega^2 L^2\sin^2\theta$. Итого

$$\Pi(\theta) = E_s + E_g + E_p = \left(2k - m\omega^2\right)L^2\sin^2\theta + 2mgL(1-\cos\theta).$$

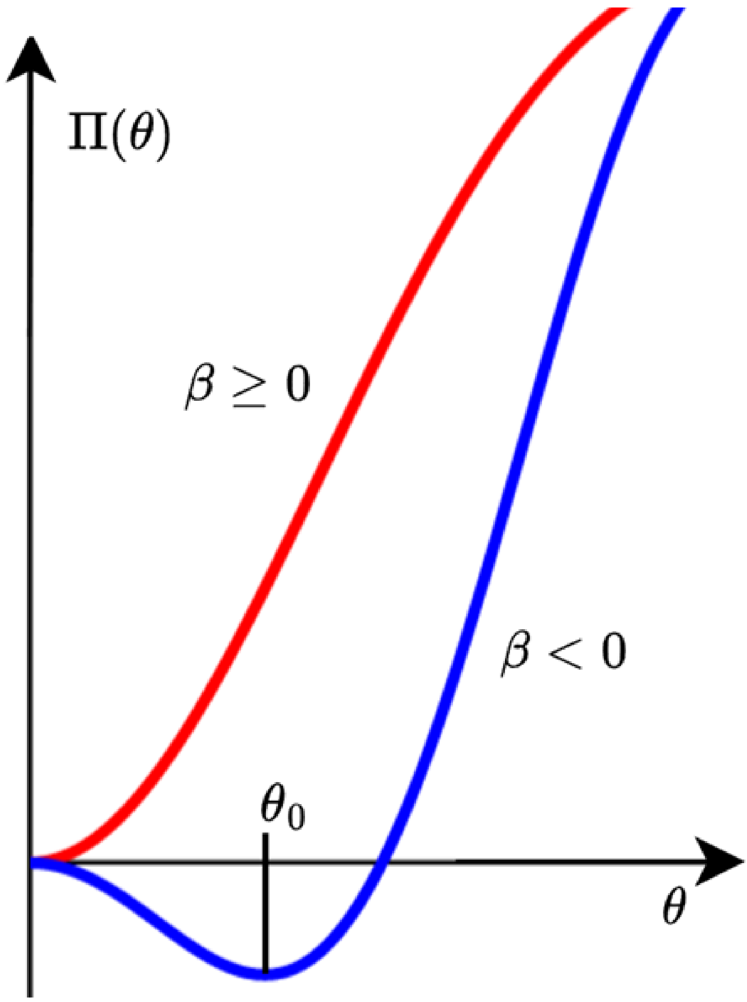
Преобразуем первое слагаемое с использованием результата пункта **b)**:

$$\begin{aligned}\Pi(\theta) &= m\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{g}{L}\right)L^2\sin^2\theta + 2mgL(1-\cos\theta) = \\ &= mgL\left(2(1-\cos\theta) + (\beta - 1)\sin^2\theta\right) = \\ &= mgL(1-\cos\theta)\cdot(2 + (\beta-1)(1+\cos\theta)).\end{aligned}$$

Теперь можно наглядно увидеть, что при малых значениях θ его косинус равен единице, и последний множитель в скобках можно переписать как

$$2 + (\beta - 1) \cdot 2 = 2\beta$$

В таком случае если $\beta \geq 0$, то из нулевого положения энергия системы сразу же возрастает, в ином случае общая энергия сначала падает ниже нуля, а затем увеличивается. Графически это представляется так:



Равновесие (10 баллов)			
Пункт	Балл		Содержание
a	3.0	1.5	Равенство сил (по 0.75 на каждую ось) *Допустимо использование равенства моментов сил
		0.5	Выражение для r
		0.5	Выражение для F
		0.5	Ответ
b	2.0	0.5	$\cos\theta_0 \leq 1$ *Если написать “$=$” вместо “$\leq$”, балл не снимается
		0.5	Ответ
		1.0	“При $\omega \leq \omega_0$ будет $\theta_0 = 0$”
c	5.0	1.0	Запись $E_g = 2mgL(1-\cos\theta)$ *Если учтена энергия только одного шарика (ответ в 2 раза меньше), то **-0.5**
		1.0	Запись $E_s = 2kL^2\sin^2\theta$ *Если использовано rвместо $2r$ (ответ в 4 раза меньше), то **-0.5**
		1.0	Выражение $\Pi\left(\theta\right)$ в любом верном виде с mgL, θ и β. *Если преобразования не удались исключительно из-за переноса ошибки, ставится **0.5**.
		0.8	График $\beta \geq 0$.
		1.2	График $\beta < 0$. *Если не показано, что локальному минимуму соответствует $\theta = \theta_0$, балл не снимается.

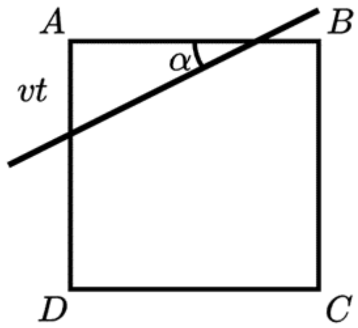
2 Светодиод

Напряжение на светодиоде появляется из-за электромагнитной индукции при прохождении стержня сквозь магнитное поле, то есть

$$U = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|,$$

где $\Phi = BS$ – проходимый поток магнитного поля. Если $B = \text{const}$, то $U = B \cdot \dfrac{\partial S}{\partial t}$.

a)



На первом этапе спустя время $t < t_0$, где $t_0 = L \tan\alpha / v$ (в момент времени t_0 стержень коснётся точки B), стержень заметёт область в виде прямоугольного треугольника с катетом vt и противолежащим углом α. Площадь такого треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot vt \cdot vt \cot\alpha = \frac{v^2 t^2}{2 \tan\alpha}.$$

Взяв производную по времени и домножив на B, получим

$$U = \frac{Bv^2}{\tan\alpha} t,$$

а интервал времени Δt, при котором напряжение станет U_0, равен

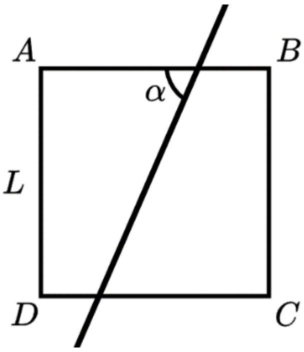
$$\Delta t = \frac{U_0 \tan\alpha}{Bv^2} = 144 \text{ мс} < Lv \tan\alpha,$$

то есть светодиод загорится прежде, чем стержень будет одновременно проходить через стороны AD и BC. Светодиод затухнет при положении стержня, симметричном описанному выше. Так как общее время прохождения стержнем магнитного поля равен $T = L(1 + \tan\alpha)/v$, то искомое время равно

$$\tau = T - 2\Delta t = \frac{L}{v}\left(1 + \left(1 - \frac{2U_0}{BvL}\right)\tan\alpha\right) = 500 \text{ мс}.$$

b)

Обратим внимание на то, что в области углов $\alpha < 45^\circ$ стержень обязательно сможет одновременно касаться AD и BC. В этом положении напряжение максимально и превышает U_0, следовательно, нужно рассматривать углы, большие 45°. В положении, указанном на рисунке справа, заметаемая площадь равна $S = v(t - t_0) \cdot L\cot\alpha$, и создаваемое стержнем напряжение равно



$$U = \frac{BvL}{\tan\alpha}.$$

При условии $U < U_0$ получаем

$$\alpha > \arctan\frac{BvL}{U_0} = 63.4^\circ.$$

<table>
<tr><td colspan="4">Светодиод (7 баллов)</td></tr>
<tr><td>Пункт</td><td colspan="2">Балл</td><td>Содержание</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">1.0</td><td>Формула для напряжения в любом допустимом виде.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">a</td><td rowspan="6">3.5</td><td>0.5</td><td>Выражение для S.</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Выражение для Δt.</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Указанный интервал времени и выражение для t_0</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Выражение для T</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>Выражение для τ</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Численный ответ для τ.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b</td><td rowspan="4">2.5</td><td>1.0</td><td>Выражение для U</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Ответ</td></tr>
<tr><td>1.0</td><td>Выражение для α
*Если будет знак “=” вместо “>”, то -0.2</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>Численный ответ для α.</td></tr>
</table>

3 Цилиндр с трением

Количество вещества ν в цилиндре определяется уравнением состояния газа в начальный момент: $P_0V_0 = \nu RT_0$. Поскольку на поршень действует внешнее атмосферное давление P_0, то, вследствие действия силы трения, равновесное значение давление газа в цилиндре лежит в диапазоне $P_0 \pm f/S$.Таким образом, давление газа P_i в i-ной точке описано в следующей таблице:

№	0	1	2	3	4
P_i	P_0	$P_0 + f/S$	$P_0 + f/S$	$P_0 - f/S$	$P_0 - f/S$

Теперь найдём соотношения между данными в условии величинами. Процесс $0-1$ представляет собой изохору, для него справедлив закон Шарля

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_1} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = T_0\left(1 + \frac{f}{P_0S}\right) = T_0\left(1+\gamma\right),$$

где для удобства введён параметр $\gamma \equiv f/(P_0S)$. Теплота, отданная на этот процесс, равна изменению внутренней энергии газа, т.е.

$$Q_{01} = C_V\left(T_1 - T_0\right) = \frac{3}{2}\nu R \cdot T_0\frac{f}{P_0S} = \frac{3\gamma}{2}P_0V_0.$$

Далее идёт прямая пропорциональность между объёмом и температурой в процессе $1-2$, что является изобарой. Для этого процесса потраченная теплота

$$Q_{12} = C_P\left(T_2 - T_1\right) = \frac{5}{2}\nu R \cdot T_0\left(\eta - (1+\gamma)\right) = \frac{5}{2}\left(\eta - 1 - \gamma\right)P_0V_0.$$

Нагреватель отдавал теплоту в течении процессов $0-1$ и $1-2$, значит

$$Q = Q_{01} + Q_{12} = P_0V_0\left(\frac{5}{2}\left(\eta-1\right) - \gamma\right) \Rightarrow \qquad f = P_0S\left(\frac{5}{2}\left(\eta-1\right) - 4.8\right) = 0.2P_0S.$$

В конечном положении температура равна T_0, а значит

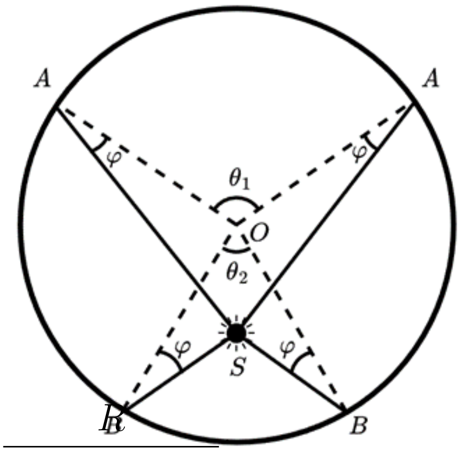
$$P_0V_0 = P_4V_4 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_4}{V_0} = \frac{1}{1-\gamma} = 1.25.$$

Цилиндр с трением (6 баллов)	
Балл	Содержание
0.5	Выражение для ν.
1.0	Выражение для T_1 *Если P_1 неверно, то ставится **0.5** за уравнение изопроцесса
1.5	Выражение для Q_{01} *Если T_1 неверен, то ставится **0.5** за формулу теплоты при изохоре.
1.5	Выражение для Q_{12} *При переносе ошибки ставится **0.5** за формулу теплоты при изобаре.
0.5	Ответ для f *Если только ответ в общем виде, то **-0.5** баллов.
1.0	Ответ для V_4/V_0 *Если только ответ в общем виде, то **-0.5** баллов

4 Область освещения

Обозначим искомое расстояние точечного источника S до центра цилиндра O как x. В крайних положениях видимой области лучи света из источника падают на точки A и B под предельным углом отражения, описываемый равенством

$$\sin\varphi = 1/n.$$



Применим теорему синусов на треугольники AOS и BOS соответственно:

$$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi - 180^\circ - \theta_1/2)} = \frac{R}{\sin(\theta_1/2 - \varphi)},$$
$$\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi - \theta_2/2)} = \frac{R}{\sin(\theta_2/2 + \varphi)}.$$

Из этого следует, что

$$\varphi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{4},$$

или же

$$n = \left(\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{4}\right)^{-1} = 1.48.$$

Подставляя результат для φ в одно из двух уравнений для x выше, находим, что

$$x = R\frac{\sin\frac{\theta_1 - \theta_2}{4}}{\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{4}} = 8.0 \text{ см}$$

Область освещения (7 баллов)	
Балл	Содержание
1.0	Формула предельного угла отражения
1.5	Теорема синусов для AOS *Если точечный источник был расположен неправильно, то за само уравнение ставится **1.0**
1.5	Теорема синусов для BOS *Если точечный источник был расположен неправильно, то за само уравнение ставится **1.0**
1.0	Ответ для n
0.5	Числовое значение n
1.0	Ответ для x
0.5	Числовое значение x